第14卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 14 №. 3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年7月 (NATURAL SCIENCE) Jul. 1993

关于TOR法的敛散性*

陈 恒 新

(管理信息科学系)

摘要 本文给出一些易于检验的TOR法的敛 散性定理. 获得的结果所涉及的算法和研究的敛散范围,均扩广并包含了文[1]中的相应定理.

关键词 TOR法,收敛,发散

0 引言

文[1]给出了一些易于检验的Jacobi,Gauss-Seidel迭代法敛散性定理. 然而,研究表明,这些定理尚可进一步改进并推广到TOR法中,使之应用和敛散范围更广,使用更为灵活方便. 本文所获得的结果,扩广了文[1]中的大部分定理,且使它们分别被包含在本文各个相应定理之中,也是文[5]结果的进一步推广. 例如,对于Jacobi迭代矩阵

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0 & 0.4 & -0.1 & -0.1\\ -0.45 & 0 & 0.2 & 0.3\\ 0.6 & 0.1 & 0 & -0.5\\ 0.4 & -0.4 & 0.3 & 0\end{bmatrix} \text{和} \ \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0 & 0.4 & 0.7\\ 0.3 & 0 & 0.3\\ 2.0 & 0.4 & 0\end{bmatrix}.$$

文[1]中的所有定理均无法判别它们的敛散性. 而应用本文定理1和定理6易于判别:对于$\boldsymbol{B}_1$,TOR迭代法(隐含Jacobi和Gauss-Seidel迭代法)收敛;对于$\boldsymbol{B}_2$,TOR迭代法(隐含Jacobi和Gauss-Seidel迭代法)发散. 详见后面的数值例子分析.

为叙述方便,引入如下记法:设Jacobi迭代阵$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$,$N_1\oplus N_2=\tilde{N}_1\oplus\tilde{N}_2=N=\{1,2,\cdots,n\}$,$N^-\oplus N^+=\tilde{N}^-\oplus\tilde{N}^+=N$. $b_i=\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|$,$\tilde{b}_i=\sum_{j=1}^{n}|b_{ji}|$,$N^-=\{i\,|\,b_i<1,i\in N\}$,$N^+=\{i\,|\,b_i\geqslant 1,i\in N\}$. $\tilde{N}^-=\{i\,|\,\tilde{b}_i<1,i\in N\}$,$\tilde{N}^+=\{i\,|\,\tilde{b}_i\geqslant 1,i\in N\}$. $\alpha_i=\sum_{j\in N_1}|b_{ij}|$,$\beta_i=\sum_{j\in N_2}|b_{ij}|$,$\tilde{\alpha}_i=\sum_{j\in\tilde{N}_1}|b_{ji}|$,$\tilde{\beta}_i=\sum_{j\in\tilde{N}_2}|b_{ji}|$. 空集$\varnothing$,集合$K-L=\{i\,|\,i\in K$ 而 $i\overline{\in}L\}$. 例如,对上面的$\boldsymbol{B}_1$,有$N^-=\{1,2\}$. N^+

本文1992-05-16收到

* 福建省自然科学基金资助项目

$=\{3,4\}$，若取 $N_1=\{1\}$，则 $N_2=\{2,3,4\}$，$N_2-N^+=\{2\}$. 若取 $N_2=\{3\}$，则 $N_1=\{1,2,4\}$. 这里预先说明，本文定理中所取数集 $N_1,\widetilde{N}_1,N_2,\widetilde{N}_2$ 皆非空.

1 TOR 迭代法

这里，我们采用与文[2]类似的记号. 考虑线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，$\boldsymbol{C}$ 为已知向量. 设 $\boldsymbol{A}$ 可分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^*-\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}^*$ 的形式，
其中 $-\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{F}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的严格下三角部分的元素组成的矩阵，$-\boldsymbol{\varepsilon}^*-\boldsymbol{F}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的严格上三角部分的元素组成的矩阵，$\boldsymbol{D}$ 为由 $\boldsymbol{A}$ 的对角元或对角块中元素组成的非奇异矩阵.

引入双参数 θ,λ，则 TOR 法迭代格式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}^{(m+1)} &= (2\boldsymbol{D}-\theta\boldsymbol{\varepsilon}-\lambda\boldsymbol{F})^{-1}\{(2-\theta-\lambda)\boldsymbol{D}+(\theta+\lambda)(\boldsymbol{\varepsilon}^*+\boldsymbol{F}^*)\\ &+\theta\boldsymbol{F}+\lambda\boldsymbol{\varepsilon}\}\boldsymbol{X}^{(m)}+(\theta+\lambda)(2\boldsymbol{D}-\theta\boldsymbol{\varepsilon}-\lambda\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{b}\,(m\geqslant 0).\end{aligned} \tag{1}$$

其 TOR 法迭代矩阵为

$$\boldsymbol{L}_{\theta,\lambda,F}=(2\boldsymbol{D}-\theta\boldsymbol{\varepsilon}-\lambda\boldsymbol{F})^{-1}\{(2-\theta-\lambda)\boldsymbol{D}+(\theta+\lambda)(\boldsymbol{\varepsilon}^*+\boldsymbol{F}^*)+\theta\boldsymbol{F}+\lambda\boldsymbol{\varepsilon}\}. \tag{2}$$

几种常见迭代法为其特例：当 $\boldsymbol{F}=0,\theta=0,\lambda=2$ 时为 *Jacobi* 迭代；当 $\boldsymbol{F}=0,\theta=2,\lambda=2$ 时为 Gauss-Seidel 迭代；当 $\boldsymbol{F}=0,\theta=2\omega,\lambda=0$ 时为 SOR 迭代；当 $\boldsymbol{F}=0,\theta=2r,\theta+\lambda=2\omega$ 时为 AOR 迭代. 若令 $\theta'=\dfrac{\theta}{2},\lambda'=\dfrac{\lambda}{2},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon},\widetilde{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{F},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^*,\widetilde{\boldsymbol{F}}^*=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{F}^*$，则式(2)可简化为

$$\boldsymbol{L}_{\theta,\lambda,F}=(\boldsymbol{I}-\theta'\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\lambda'\widetilde{\boldsymbol{F}})^{-1}\{(1-\theta'-\lambda')\boldsymbol{I}+(\theta'+\lambda')(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*+\widetilde{\boldsymbol{F}}^*)+\theta'\widetilde{\boldsymbol{F}}+\lambda'\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})\}. \tag{3}$$

2 TOR 法的敛散性定理

由文[2]第三节我们有下述定义和引理1.

定义 对于 Jacobi 阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}^*+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^*)=\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*+\widetilde{\boldsymbol{F}}+\widetilde{\boldsymbol{F}}^*$，若 $\rho(|\boldsymbol{B}|)=\rho(|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}|+|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^*|+|\widetilde{\boldsymbol{F}}|+|\widetilde{\boldsymbol{F}}^*|)<1$，则称 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^*-\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}^*$ 为 $\boldsymbol{H}$-矩阵.

引理1 如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^*-\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}^*$ 是 H-矩阵，则当 $\theta\geqslant 0,\lambda\geqslant 0$，且 $0<\theta+\lambda<4/(1+\rho(|\boldsymbol{B}|))$ 时，TOR 迭代法收敛.

引理2 对于任意的 $i\in N_1,j\in N_2$，若 $i,j\in N^-$，则恒成立 $r_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j<1$.

证明 因为 $i,j\in N^-$，所以有 $\alpha_i+\beta_i=b_i<1,\alpha_j+\beta_j=b_j<1$，推出 $0\leqslant\beta_i<1-\alpha_i$ 和 $0\leqslant\alpha_j<1-\beta_j$.
于是 $\alpha_j\beta_i<(1-\alpha_i)(1-\beta_j)$，从而有 $r_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j<1$.

定理1. 在 Jacobi 阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}^*+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^*)$ 中任取一 $N_1\subset N^-$，若对 $i\in N_1,j\in N^+$，成立 $r_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j<1$，则当 $\theta\geqslant 0,\lambda\geqslant 0$，且 $0<\theta+\lambda<4/(1+\rho(|\boldsymbol{B}|))$ 时，TOR 迭代法收敛（且有 $\rho(|\boldsymbol{B}|)<1$）. 显然，取 $N_1=N^-$ 则 $N_2=N^+$；且让 TOR 迭代法(1)中 $\boldsymbol{F}=0$，$\theta=0,\lambda=2$ 和 $\boldsymbol{F}=0,\theta=2,\lambda=0$，即是文[1]定理1.

证明 若 $N_1\neq N^-$，则 $N_2-N^+\neq\varnothing$. 因 $i\in N_1\subset N^-$，对 $j\in N_2-N^+$ 有 $b_j<1$，即 $j\in N^-$，由引理2知成立 $r_{ij}<1$. 若 $N_1=N^-$ 则 $N_2=N^+$. 据此及定理条件知对 $i\in N_1,j\in N_2$，恒成立 r_{ij}

$=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_i<1$，得

$$0\leqslant\alpha_j\beta_i<(1-\alpha_i)(1-\beta_j).\tag{4}$$

又由 $\alpha_i+\beta_i=b_i<1$，得

$$0\leqslant\beta_i<1-\alpha_i.\tag{5}$$

由式(4)、(5)知$1-\beta_j>0$，因此 $\beta_j<1$.

若$\{i\mid\beta_i>0,i\in N_1\}\neq\varnothing$，则对于 N_1中一切使 $\beta_i>0$的 i，有$0\leqslant\alpha_j/(1-\beta_j)<(1-\alpha_i)/\beta_i$，取$\max\limits_{j\in N_2}\{\alpha_j/(1-\beta_j)\}<h<\min\limits_{\substack{i\in N_1\\ \beta_i>0}}\{(1-\alpha_i)/\beta_i\}$. 否则，$\{i\mid\beta_i>0,i\in N_1\}=\varnothing$，即 $\beta_i\equiv0,i\in N_1$，则取$\max\limits_{j\in N_2}\{\alpha_j/(1-\beta_j)\}<h<+\infty$. 作 $\boldsymbol{H}=\mathrm{diag}(h_i\mid h_i=h,i\in N_2;h_i=1,i\in N_1)$，显然.$\boldsymbol{H}$ 为非负非奇异对角阵，$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{H}=[b_{ij}^{(1)}]$. 则有 $b_{ij}^{(1)}=h_i^{-1}b_{ij}h_j,i,j\in N$，于是有

$$b_i^{(1)}=\alpha_i+h\beta_i=\begin{cases}\alpha_i<1, & \text{当 }\beta_i=0,i\in N_1,\\ \alpha_i+h\beta_i<\alpha_i+\dfrac{1-\alpha_i}{\beta_i}\beta_i=1, & \text{当 }\beta_i>0,i\in N_1,\end{cases}$$

$$b_j^{(1)}=\alpha_j\frac{1}{h}+\beta_j=\begin{cases}\beta_j<1, & \text{当 }\alpha_j=0,j\in N_2,\\ \alpha_j\dfrac{1}{h}+\beta_j<\alpha_j\dfrac{1-\beta_j}{\alpha_j}+\beta_j=1, & \text{当 }\alpha_j>0,j\in N_2,\end{cases}$$

于是得$\|\boldsymbol{B}_1\|_\infty=\max\limits_{i\in N}b_i^{(1)}<1$. 因为$\|\boldsymbol{B}_1\|_\infty=\|\boldsymbol{B}_1\|_\infty$，所以 $\rho(|\boldsymbol{B}_1|)\leqslant\||\boldsymbol{B}_1|\|_\infty<1$. 由 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{H}$，我们有 $b_{ij}^{(1)}=h_i^{-1}b_{ij}h_j,i,j=1,2,\cdots,n$. 又 $\boldsymbol{H}=\mathrm{diag}(h_1,h_2,\cdots,h_n)$中 $h_i>0$，所以有 $|b_{ij}^{(1)}|=|h_i^{-1}b_{ij}h_j|=h_i^{-1}|b_{ij}|h_j,i,j=1,2,\cdots,n$ 即$|\boldsymbol{B}_1|=\boldsymbol{H}^{-1}|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{H}$，则 $\rho(|\boldsymbol{B}_1|)=\rho(|\boldsymbol{B}|)$，因此 $\rho(|\boldsymbol{B}|)<1$.

由定义知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}^*-\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}^*$ 为 $\boldsymbol{H}$-矩阵. 从而由引理1知，当 $\theta\geqslant0,\lambda\geqslant0$，且$0<\theta+\lambda<4/(1+\rho(|\boldsymbol{B}|))$时 TOR 迭代法收敛.

定理2 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}^*+\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}^*)$为不可约矩阵，任取一 $N_1\subset N^-$，若对 $i\in N_1,j\in N^+$，成立 $r_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j<1$，且 $N_1\neq N^-$ 或 $r_{ij}\leqslant1$中至少有一严格不等式成立. 则当 $\theta\geqslant0,\lambda\geqslant0$，且$0<\theta+\lambda<4/(1+\rho(|\boldsymbol{B}|))$时 TOR 迭代法收敛.（且有 $\rho(|\boldsymbol{B}|)<1$）. 显然，取 $N_1=N^-$则 $N_2=N^+$；且让 TOR 迭代法(1)中 $\boldsymbol{F}=0,\theta=0,\lambda=2$和 $\boldsymbol{F}=0,\theta=2,\lambda=0$即是文[1]定理2.

证明 若 $N_1\neq N^-$，则 $N_2-N^+\neq\varnothing$，因 $i\in N_1\subset N^-$，对 $j\in N_2-N^+$有 $b_j<1$即 $j\in N^-$，由引理2知成立 $r_{ij}<1$. 若 $N_1=N^-$，则 $N_2=N^+$. 据此及定理条件知，对 $i\in N_1,j\in N_2$，恒成立 $r_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j\leqslant1$，且至少有一严格不等式成立，得

$$\alpha_j\beta_i\leqslant(1-\alpha_i)(1-\beta_j).\tag{6}$$

又由 $\alpha_i+\beta_i=b_i<1$，得

$$0\leqslant\beta_i<1-\alpha_i.\tag{7}$$

由式(6)、(7)知$1-\beta_j\geqslant0$，即 $\beta_j\leqslant1$. 若 $\beta_j=1$，由式(6)知 $\alpha_j\beta_i=0,i\in N_1$. 但由于 $\boldsymbol{B}$ 是不可约的，因此不可能出现 $\beta_i\equiv0,i\in N_1$，于是相应之 $\alpha_j=0$. 由式(6)有 $\alpha_j/(1-\beta_j)\leqslant(1-\alpha_i)/\beta_i,j\in N_2$且 $\beta_j<1$，其中至少有一严格不等式成立. 取

$$\max_{\substack{j\in N_2\\ \beta_j<1}}\{\alpha_j/(1-\beta_j)\}\leqslant h\leqslant\min_{i\in N_1}\{(1-\alpha_i)/\beta_i\}.\tag{8}$$

由于 B 为不可约阵，因此不可能出现 N_2 中一切 $\alpha_j=0$. 所以(8)左端大于零，于是有 $h>0$. 作 $H_0=\mathrm{diag}(h_i|h_i=h,i\in N_2;h_i=1,i\in N_1)$，$B_1=H_0^{-1}BH_0=[b_{ij}^{(1)}]$ 亦为不可约阵. 则有 $b_i^{(1)}=\alpha_i+h\beta_i\leqslant\alpha_i+\frac{1-\alpha_i}{\beta_i}\beta_i=1(i\in N_1)$，或 $b_i^{(1)}=\alpha_i+h\cdot 0=\alpha_i<1(i\in N_1)$，以及 $b_j^{(1)}=\alpha_j\frac{1}{h}+\beta_j\leqslant\alpha_j\frac{1-\beta_j}{\alpha_j}+\beta_j=1(j\in N_2)$，或 $b_j^{(1)}=0\frac{1}{h}+\beta_j=\beta_j=1,j\in N^+$(或 $=\beta_j<1,j\in N_2-N^+$)$(j\in N_2)$. 且 $b_i^{(1)}\leqslant 1,i\in N$ 中至少有一严格不等式成立.

类似文[1]定理2证法，可设 $b_p^{(1)}<1$，则取 $b_p^{(1)}<\tilde{h}<1$，由 B_1 不可约性知至少存在一 $b_{qp}^{(1)}\neq 0$ $(q\neq p)$，作 $H_1=\mathrm{diag}(h_i|h_p=\tilde{h},h_i=1,i\neq p)$，$B_2=H_1^{-1}B_1H_1=[b_{ij}^{(2)}]$，$b_{ij}^{(2)}=h_i^{-1}b_{ij}^{(1)}h_j$，可推出 B_2 中至少有 $b_p^{(2)}<1$，$b_q^{(2)}<1$，而 $b_i^{(2)}\leqslant 1$.

依次类推则必有 $B_n=H_{n-1}^{-1}B_{n-1}H_{n-1}=H_{n-1}^{-1}H_{n-2}^{-1}B_{n-2}H_{n-2}H_{n-1}=\cdots=H^{-1}BH$，其中 $H=\mathrm{diag}(h_1,h_2,\cdots,h_n)=H_0H_1\cdots H_{n-1}$ 非负非奇，且满足 $b_i^{(n)}<1,i\in N$. 即 $\|B_n\|_\infty<1$. 由于 $\||B_n|\|_\infty=\|B_n\|_\infty$，$B_n=H^{-1}BH$，类似本文定理1证法可推出 $\rho(|B|)=\rho(|B_n|)<1$，从而得证当 $\theta\geqslant 0,\lambda\geqslant 0$，且 $0<\theta+\lambda<4/(1+\rho(|B|))$ 时 TOR 迭代法收敛. 证毕.

同理，对列亦有如下相应定理

定理3 在 Jacobi 阵 $B=I-D^{-1}A=D^{-1}(\varepsilon+\varepsilon^*+F+F^*)$ 中任取一 $\tilde{N}_1\subset\tilde{N}^-$，若对 $i\in\tilde{N}_1$，$j\in\tilde{N}^+$ 成立 $\tilde{r}_{ij}=\tilde{\alpha}_i+\tilde{\beta}_j+\tilde{\alpha}_j\tilde{\beta}_i-\tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_j<1$，则当 $\theta\geqslant 0,\lambda\geqslant 0$，且 $0<\theta+\lambda<4/(1+\rho(|B|))$ 时 TOR 迭代法收敛.

定理4 设 $B=I-D^{-1}A=D^{-1}(\varepsilon+\varepsilon^*+F+F^*)$ 为不可约阵，任取一 $\tilde{N}_1\subset\tilde{N}^-$，若对 $i\in\tilde{N}_1$，$j\in\tilde{N}^+$ 成立 $\tilde{r}_{ij}=\tilde{\alpha}_i+\tilde{\beta}_j+\tilde{\alpha}_j\tilde{\beta}_i-\tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_j\leqslant 1$，且 $\tilde{N}_1\neq\tilde{N}^-$ 或 $\tilde{r}_{ij}\leqslant 1$ 中至少有一严格不等式成立. 则当 $\theta\geqslant 0,\lambda\geqslant 0$，且 $0<\theta+\lambda<4/(1+\rho(|B|))$ 时 TOR 迭代法收敛.

显然，定理3和定理4亦分别包含了文[1]中的定理3和定理4. 对于 $B=\tilde{\varepsilon}+\tilde{\varepsilon}^*+\tilde{F}+\tilde{F}^*\geqslant 0$，若 $\theta\geqslant 0,\lambda\geqslant 0,0<\theta+\lambda\leqslant 2$. 因 $\theta'=\frac{\theta}{2}$，$\lambda'=\frac{\lambda}{2}$，于是有 $\theta'\geqslant 0,\lambda'\geqslant 0,0<\theta'+\lambda'\leqslant 1$. 又因 $\tilde{\varepsilon}+\tilde{F}$ 为严格下三角阵，则 $\rho(\theta'\tilde{\varepsilon}+\lambda'\tilde{F})=0$，由式(3)知 $L_{\theta,\lambda,F}\geqslant 0$. 从而由文[2]定理3及其推论和它们的证明过程，并结合文[3]定理2($\omega=1$ 情况)便得下述引理.

引理3 如果 $B=\tilde{\varepsilon}+\tilde{F}+\tilde{\varepsilon}^*+\tilde{F}^*\geqslant 0$，且 $\theta\geqslant 0,\lambda\geqslant 0,0<\theta+\lambda\leqslant 2$. 则有：(i) $\rho(B)<1\Leftrightarrow\rho(L_{\theta,\lambda,F})<1$，(ii) $\rho(B)\geqslant 1\Leftrightarrow\rho(L_{\theta,\lambda,F})\geqslant 1$.

定理5 若 $B=I-D^{-1}A=D^{-1}(\varepsilon+\varepsilon^*+F+F^*)=\tilde{\varepsilon}+\tilde{\varepsilon}^*+\tilde{F}+\tilde{F}^*$ 为非负(或非正)阵，且 $C=\frac{1}{2}(B+B^T)$ 满足定理1～4之一条件. 则当 $\theta\geqslant 0,\lambda\geqslant 0,0<\theta+\lambda\leqslant 2$ 时，TOR 迭代法收敛.

证明 这里，只对 $C=\frac{1}{2}(B+B^T)$ 满足定理1条件证明，其余类似. 若 B 为非负阵，C 亦为非负阵，则由文[4]引理1及非负矩阵性质可得 $\rho(B)\leqslant\rho(C)$. 因 $C=|C|$，又由本文定理1得 $\rho(C)=\rho(|C|)<1$. 因此 $\rho(B)\leqslant\rho(C)<1$，由引理3便得 $\rho(L_{\theta,\lambda,F})<1$，即 TOR 迭代法收敛. 若 B 为非正阵，则 $-B$ 为非负阵，$-C=\frac{1}{2}(-B-B^T)$ 亦为非负阵，于是有 $\rho(B)=\rho(-B)\leqslant\rho(-C)=\rho(|C|)<1$. 设 $-B$ 对应的 TOR 法迭代阵为 $\tilde{L}_{\theta,\lambda,F}$，因 $-B=-\tilde{\varepsilon}-\tilde{\varepsilon}^*-\tilde{F}-\tilde{F}^*\geqslant 0$，则

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{\theta,\lambda,F}=(I-\theta'(-\tilde{\varepsilon})-\lambda'(-\tilde{F}))^{-1}\{(1-\theta'-\lambda')I+(\theta'+\lambda')\\(-\tilde{\varepsilon}^*-\tilde{F}^*)+\theta'(-\tilde{F})+\lambda'(-\tilde{\varepsilon})\}.\end{aligned}\tag{9}$$

当 $\theta\geqslant0,\lambda\geqslant0,0<\theta+\lambda\leqslant2$ 时有 $\theta'\geqslant0,\lambda'\geqslant0,0<\theta'+\lambda'\leqslant1$. 因

$$\rho(\theta'\tilde{\varepsilon}+\lambda'\tilde{F})=\rho(\theta'(-\tilde{\varepsilon})+\lambda'(-\tilde{F}))=0, \tag{10}$$

于是有 $(I-\theta'\tilde{\varepsilon}-\lambda'\tilde{F})^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\theta'\tilde{\varepsilon}+\lambda'F)^k$,

$|(I-\theta'\tilde{\varepsilon}-\lambda'\tilde{F})^{-1}|=|\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\theta'\tilde{\varepsilon}+\lambda'F)^k|$,

$\leqslant\sum\limits_{k=0}^{\infty}|(\theta'\tilde{\varepsilon}+\lambda'F)|^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\theta'(-\tilde{\varepsilon})+\lambda'(-\tilde{F}))^k$. 又由式(10)有 $0\leqslant\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\theta'(-\tilde{\varepsilon})+\lambda'(-\tilde{F}))^k=(I-\theta'(-\tilde{\varepsilon})-\lambda'(-\tilde{F}))^{-1}$, 由上式及式(9)知 $\tilde{L}_{\theta,\lambda,F}\geqslant0$. 又因 $|L_{\theta,\lambda,F}|=|(I-\theta'\tilde{\varepsilon}-\lambda'\tilde{F})^{-1}\{(1-\theta'-\lambda')I+(\theta'+\lambda')(\tilde{\varepsilon}^*+\tilde{F}^*)+\theta'\tilde{F}+\lambda'\tilde{\varepsilon})|\leqslant|(I-\theta'\tilde{\varepsilon}-\lambda'\tilde{F})^{-1}||(1-\theta'-\lambda')I+(\theta'+\lambda')(\tilde{\varepsilon}^*+\tilde{F}^*)+\theta'\tilde{F}+\lambda'\tilde{\varepsilon})|\leqslant(\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\theta'(-\tilde{\varepsilon})+\lambda(-\tilde{F}))^k)\{|(1-\theta'-\lambda')I|+|(\theta'+\lambda')(\tilde{\varepsilon}^*+\tilde{F}^*)|+|\theta'\tilde{F}|+|\lambda'\tilde{\varepsilon}|\}=(I-\theta'(-\tilde{\varepsilon})-\lambda'(-\tilde{F}))^{-1}\{(1-\theta'-\lambda')I+(\theta'+\lambda')(-\tilde{\varepsilon}^*-\tilde{F}^*)+\theta'(-\tilde{F})+\lambda'(-\tilde{\varepsilon})\}=\tilde{L}_{\theta,\lambda,F}$.

这样由 $|L_{\theta,\lambda,F}|\leqslant\tilde{L}_{\theta,\lambda,F}$ 和 $\rho(-B)<1$. 利用引理3便得 $\rho(L_{\theta,\lambda,F})\leqslant\rho(\tilde{L}_{\theta,\lambda,F})<1$, 即 TOR 迭代法收敛. 证毕.

引理4 对于任意的 $i\in N_1,j\in N_2$, 若 $i,j\in N^+$, 且 $\alpha_i<1$, 则恒成立 $r_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j\geqslant1$.

证明 因为 $i,j\in N^+$, 所以有 $\alpha_i+\beta_i=b_i\geqslant1,\alpha_j+\beta_j=b_j\geqslant1$, 因 $\alpha_i<1$, 推出 $\beta_i\geqslant1-\alpha_i>0$ 和 $\alpha_j\geqslant1-\beta_j$, 于是 $\alpha_j\beta_i\geqslant(1-\alpha_i)(1-\beta_j)$, 从而有 $r_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j\geqslant1$. 证毕.

定理6 设 $B=I-D^{-1}A=D^{-1}(\varepsilon+\varepsilon^*+F+F^*)$ 为不可约非负阵, 任取一 $N_2\subset N^+$, 使相应的 N_1 中一切 $\alpha_i<1$, 若对 $i\in N^-,j\in N_3=\{j|\beta_j<1,j\in N_2\}\neq\varnothing$, 成立 $r_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j\geqslant1$(当 $N_3=\varnothing$, 该条件用 $\beta_i>0,i\in N_1$ 替代), 则当 $\theta\geqslant0,\lambda\geqslant0,0<\theta+\lambda\leqslant2$ 时, TOR 迭代法发散.

显然, 若取 $N_2=N^+$ 则 $N_1=N^-$; 且让 TOR 迭代法式(1)中 $F=0,\theta=0,\lambda=2$ 和 $F=0,\theta=2,\lambda=0$, 即是文[1]定理6.

需要说明的是, 若 $N_2-N_3\neq\varnothing$, 则对 $j\in N_2-N_3$ 有 $\beta_j\geqslant1$, 亦可能有 $\beta_j>1$. 因此文[1]证明中取 $1<\max\limits_{i\in N_1}\frac{1-\alpha_i}{\beta_i}\leqslant d\leqslant\min\limits_{j\in N_2}\frac{\alpha_j}{1-\beta_j}$(其 $N_1=N^-,N_2=N^+$)是一疏忽. 从本文定理证明中知取 $j\in N_2-N_3$ 是不必要的. 另, 考虑到当 $N_3=\varnothing$, 意味着条件 $r_{ij}\geqslant1$(它隐含 $\beta_i>0,i\in N_1$)已消失. 这时, 可以括号内条件代之.

证明 若 $N_2\neq N^+$, 则 $N_1-N^-\neq\varnothing$, 因对 $i\in N_1-N^-$ 有 $\alpha_i<1$ 和 $b_i\geqslant1$, 即 $i\in N^+$ 又 $j\in N_3\subset N_2\subset N^+$, 由引理4知有 $r_{ij}\geqslant1$. 若 $N_2=N^+$, 则 $N_1=N^-$. 据此及定理条件知对 $i\in N_1,j\in N_3\neq\varnothing$ 成立 $r_{ij}=\alpha_i+\beta_j+\alpha_j\beta_i-\alpha_i\beta_j\geqslant1$. 得

$$(1-\alpha_i)(1-\beta_j)\leqslant\alpha_j\beta_i. \tag{11}$$

因 $\alpha_i<1,\beta_j<1$, 由(11)知 $\alpha_j>0,\beta_i>0$. 从而有 $0<(1-\alpha_i)/\beta_i\leqslant\alpha_j/(1-\beta_j)$ 取

$$0<\max_{i\in N_1}\frac{1-\alpha_i}{\beta_i}\leqslant h\begin{cases}\leqslant\min\limits_{j\in N_3}\dfrac{\alpha_j}{1-\beta_j}, N_3\neq\varnothing;\\ <+\infty, N_3=\varnothing,\end{cases}$$

作 $H=\mathrm{diag}(h_i|h_i=h,i\in N_2;h_i=1,i\in N_1)$, $B_1=H^{-1}BH=[b_{ij}^{(1)}]$. 则 B_1 仍不可约非负, 且有 $b_i^{(1)}$

$=\alpha_i+h\beta_i\geqslant\alpha_i+\frac{1-\alpha_i}{\beta_i}\beta_i=1, i\in N_1; b_j^{(1)}=\alpha_j\frac{1}{h}+\beta_j\geqslant\alpha_j\frac{1-\beta_j}{\alpha_j}+\beta_j=1, j\in N_3$（当 $N_3\neq\varnothing$）；$b_j^{(1)}=\alpha_j\frac{1}{h}+\beta_j\geqslant\beta_j\geqslant1, j\in N_2-N_3$. 即 B_1满足条件 $b_i^{(1)}\geqslant1, i\in N$. 由 B_1之不可约非负性知 $\rho(B)=\rho(B_1)\geqslant\min\limits_{i\in N}b_i^{(1)}\geqslant1$. 于是由引理3便得 $\rho(L_{\theta,\lambda,F})\geqslant1$，即 TOR 迭代法发散. 证毕.

同理对列亦有相应结果.

定理7 设 $B=I-D^{-1}A=D^{-1}(\varepsilon+\varepsilon^*+F+F^*)$为不可约非负阵，任取 $-\tilde{N}_2\subset\tilde{N}^+$，使相应之 $\tilde{N}_1$中一切 $\tilde{\alpha}_i<1$. 若对 $i\in\tilde{N}^-$，$j\in\tilde{N}_3=\{j\,|\,\tilde{\beta}_j<1, j\in\tilde{N}_2\}\neq\varnothing$成立 $\tilde{r}_{ij}=\tilde{\alpha}_i+\tilde{\beta}_j+\tilde{\alpha}_j\tilde{\beta}_i-\tilde{\alpha}_i\tilde{\beta}_j\geqslant1$.（当 $\tilde{N}_3=\varnothing$，该条件用 $\tilde{\beta}_i>0, i\in\tilde{N}_i$ 替代），则当 $\theta\geqslant0, \lambda\geqslant0, 0<\theta+\lambda\leqslant2$时，TOR 迭代法发散.

显然，定理7亦包含了文[1]中定理7.

3 数值例子

例1 设线性方程组 $AX=C$ 中的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}10 & -4 & 1 & 1\\ 6.3 & 14 & -2.8 & -4.2\\ 3 & 0.5 & -5 & -2.5\\ -2 & 2 & -1.5 & 5\end{bmatrix}，若取 D=\begin{bmatrix}10 & & & \\ & 14 & & \\ & & -5 & \\ & & & 5\end{bmatrix}$$

则 Jacobi 矩阵

$$B=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix}0 & 0.4 & -0.1 & -0.1\\ -0.45 & 0 & 0.2 & 0.3\\ 0.6 & 0.1 & 0 & -0.5\\ 0.4 & -0.4 & 0.3 & 0\end{bmatrix},$$

$\|B\|_\infty=1.2>1, \|B\|_1=1.45>1$.

因为 $b_1=0.6<1, b_2=0.95<1, b_3=1.2>1, b_4=1.1>1$. 所以 $N^-=\{1,2\}, N^+=\{3,4\}$. 按文[1]定理1只能取 $N_1=N^-, N_2=N^+$. 但因 $r_{23}=0.45+0.5+0.7\times0.5-0.45\times0.5=1.075>1$，所以用文[1]定理1无法判别其收敛性. 又因 $\tilde{b}_1=1.45>1, \tilde{b}_2=0.9<1, \tilde{b}_3=0.6<1, \tilde{b}_4=0.9<1$，所以 $\tilde{N}^-=\{2,3,4\}, \tilde{N}^+=\{1\}$. 按文[1]定理3只能取 $\tilde{N}_1=\tilde{N}^-, \tilde{N}_2=\tilde{N}^+$. 但因 $\tilde{r}_{21}=0.5+1.45\times0.4=1.08>1$，所以用文[1]定理3亦无法判别其收敛性. 显然，用文[1]其它任何定理均不能判别其收敛性. 现取 $N_1=\{1\}\subset N^-$，则 $N_2=\{2,3,4\}$，于是对 $i\in N_1=\{1\}, j\in N^+=\{3,4\}$，成立 $r_{13}=0.6+0.6\times0.6=0.96<1; r_{14}=0.7+0.4\times0.6=0.94<1$. 由本文定理1知 $\rho(|B|)<1$. 当 $\theta\geqslant0, \lambda\geqslant0$，且$0<\theta+\lambda<4/(1+\rho(|B|))$（或$0<\theta+\lambda\leqslant2$）时 TOR 迭代法（隐含 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法）收敛. 且本文判别条件 $r_{ij}<1$较少.

例2 设线性方程组 $AX=C$ 中的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & -0.8 & -1.4\\ 1.2 & -4 & 1.2\\ 5 & 1 & -2.5\end{bmatrix}，取 D=\begin{bmatrix}2 & & \\ & -4 & \\ & & -2.5\end{bmatrix}$$

则 Jacobi 矩阵

$$B = I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.7 \\ 0.3 & 0 & 0.3 \\ 2.0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}.$$

显然 B 为不可约非负阵. 因 $b_1=1.1>1, b_2=0.6<1, b_3=2.4>1$,所以 $N^-=\{2\}, N^+=\{1,3\}$. 按文[1]定理6只能取 $N_1=N^-, N_2=N^+$. 但因 $r_{21}=0.7+0.6\times0.4=0.94<1$,所以用文[1]定理6其发散性无法判别. 又因 $\tilde{b}_1=2.3>1, \tilde{b}_2=0.8<1, \tilde{b}_3=1$,所以 $\tilde{N}^-=\{2\}, \tilde{N}^+=\{1,3\}$. 按文[1]定理7只能取 $\tilde{N}_1=\tilde{N}^-, \tilde{N}_2=\tilde{N}^+$. 但因 $\tilde{r}_{23}=0.7+0.3\times0.8=0.94<1$,所以其发散性亦无法判别. 显然,用文[1]其它任何定理亦无法判别.

由本定理6,可以取 $N_2=\{3\}\subset N^+=\{1,3\}$ 则 $N_1=\{1,2\}$ 中 $\alpha_1=0.4, \alpha_2=0.3<1, N_3=N_2=\{3\}$. 因对 $i\in N^-=\{2\}, j\in N_3=\{3\}$,成立 $r_{23}=0.3+2.4\times0.3=1.02>1$. 由本文定理6知,当 $\theta\geq0, \lambda\geq0, 0<\theta+\lambda\leq2$ 时 TOR 迭代法(隐含 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法)发散. 其判别条件 $r_{ij}\geq1$ 亦少.

参 考 文 献

[1] 高益明,Jacobi,Gauss-Seidel 迭代法的收敛准则,高等学校计算数学学报,4(1989).

[2] 曾文平,关于 TOR 方法的收敛性,高等学校计算数学学报,1(1986).

[3] 王新民,关于 L_ω 敛散性的定理,计算数学,1(1980).

[4] 高益明,矩阵广义对角占优和非奇的判定,东北师大学报,3(1982).

[5] 陈恒新,Jacobi,Gauss-Seidel 迭代法收敛准则的改进,应用数学与计算数学学报,2(1991)

On the Convergence and the Divergence of TOR Method

Chen Hengxin

(Department of Management Information Science)

Abstract In relation to TOR method, the author gives some theorems of convergence and divergence which can be tested easily. In the results, the algorithms involved and the domain of convergence and divergence investigated extend and contain the corresponding theorems in paper [1].

Key words TOR method, convergence, divergence