第14卷 第3期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol.14 №.3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年7月　　(NATURAL SCIENCE)　　Jul. 1993

一个单叶性判别法的推广

黄　心　中

(管理信息科学系)

摘要　本文给出一个判别形如 $f(z)=z/(1-a_2z+\varphi(z))$ 的解析函数的单叶性判别法. 推广了最近由 M. Nunkawa, M. Obradovic' 和 S. O_{wa}[1]所得到的结果.

关键词　单叶判别法，微分从属，解析函数

1　前言

记 A 是单位园 $U=\{|z|<1\}$ 内解析，具有形如 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$ 的函数族全体. 判别 A 中函数的单叶性是一个十分有趣的问题. 许多作者都研究过这个问题. 例如 Z. Nehari[2]判别法，J. Becker[3]判别法. 最近 M. Nunkawa, M. Obradovic' 和 S. O_{wa}[1]利用从属原理证明了下列的

定理 A　设 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots\in A$，当 $0<|z|<1$ 时，$\frac{f(z)}{z}\neq 0$，且 $|(\frac{z}{f(z)})''|\leqslant 1, z\in U$，则 $f(z)$ 在 U 内单叶.

本文研究 A 族中一类解析函数的单叶性问题，给出一个判别单叶性的充分条件，推广了定理 A 的结果. 我们的结论可述为

定理1　设 $f(z)=z/(1-a_2z+\varphi(z))=z+a_2z^2+\cdots\in A$，其中 $\varphi(z)$ 是 U 内的解析函数，$\varphi(0)=\varphi'(0)=0$，且满足对于任何 $z_1,z_2\in U$，有 $|\varphi(z_1)/z_1-\varphi(z_2)/z_2|\leqslant|z_1-z_2|$，则 $f(z)$ 在 U 内单叶.

2　定理1的证明

对任意的 $z_1\neq z_2, z_1,z_2\in U$，我们有

$$|f(z_1)-f(z_2)|=\left|\frac{z_1}{1-a_2z_1+\varphi(z_1)}-\frac{z_2}{1-a_2z_2+\varphi(z_2)}\right|$$

本文1992-05-14收到.

$$=\left|\frac{z_1-a_2z_1z_2+z_1\varphi(z_2)-z_2+a_2z_1z_2-z_2\varphi(z_1)}{(1-a_2z_1+\varphi(z_1))(1-a_2z_2+\varphi(z_2))}\right|$$

$$=\left|\frac{z_1-z_2+z_1\varphi(z_2)-z_2\varphi(z_1)}{(1-a_2z_1+\varphi(z_1))(1-a_2z_2+\varphi(z_2))}\right|$$

$$=\left|\frac{(z_1-z_2)(1-\frac{z_2z_1}{z_1-z_2}(\frac{\varphi(z_2)}{z_2}-\frac{\varphi(z_1)}{z_2})}{(1-a_2z_1+\varphi(z_1))(1-a_2z_2+\varphi(z_2))}\right|$$

$$\geqslant\frac{|z_1-z_2|(1-|z_1z_2|)}{|1-a_2z_1+\varphi(z_1)||1-a_2z_2+\varphi(z_2)|}>0.$$

从而 $f(z)$ 在 U 内单叶.

3 定理1推广定理 A 的证明

利用定理1,我们可得到如下推广定理 A 的结论的

推论 设 $f(z)\in A$,$\frac{f(z)}{z}\neq0$,$0<|z|<1$,若 $|(\frac{z}{f(z)})''|\leqslant2$ 在 $z\in U$ 内成立,则 $f(z)$ 在 U 内单叶.

证明 设 $f(z)\in A$,满足推论的条件,令 $\varphi(z)=(\frac{z}{f(z)})''$,则 $\varphi(z)$ 是 U 内的解析函数,我们有

$$(\frac{z}{f(z)})'=-a_2+\int_0^z\varphi(\tau)d\tau,$$

$$\frac{z}{f(z)}=1-a_2z+\int_0^z(\int_0^\xi\varphi(\tau)d\tau)d\xi.$$

从而

$$f(z)=\frac{z}{1-a_2z+\int_0^z(\int_0^\xi\varphi(\tau)d\tau)d\xi}.$$

记 $h(z)=\int_0^z(\int_0^\xi\varphi(\tau)d\tau)d\xi$,$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$,我们有

$$zh'(z)-h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)}z^{n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}z^{n+2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+2}z^{n+2},$$

故

$$zh'(z)-h(z)=\int_0^z\tau\varphi(\tau)d\tau.$$

由条件 $|\varphi(z)|\leqslant2$,$z\in U$,则

$$|zh'(z)-h(z)|\leqslant\int_0^{|z|}z|\tau||d\tau|=|z|^2$$

所以

$$|(\frac{h(z)}{z})'|\leqslant1,z\in U.$$

因而对任何 $z_1, z_2 \in U, z_1 \neq z_2$，有

$$\left|\frac{h(z_1)}{z_1} - \frac{h(z_2)}{z_2}\right| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

这说明定理1的条件满足，$f(z)$的单叶性得证.

值得一提的是，我们的证明是相当直接的，不必利用微分从属和优函数的方法，而我们的结论却是很实用的. 下面的例子说明定理1不会包含在定理 A 之中. 令

$$f(z) = \frac{z}{1 - \frac{z}{n} + \frac{z^{n+1}}{n}} \in A, (n = 1, 2, \cdots),$$

我们知道 $\varphi(z) = \frac{z^{n+1}}{n}$，且 $|\varphi(z_1)/z_1 - \varphi(z_2)/z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$，对任何 $z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in U$ 都成立，根据定理1知 $f(z)$是 U 内的单叶函数. 但是$\sup\limits_{z \in U} |(\frac{z}{f(z)})''| = (n+1) \geqslant 2$，从而不可用定理 A 来判别该函数的单叶性.

* 作者十分感谢 C. Earle 教授对本文所提出的有益的建议.

参 考 文 献

[1] Nunokawa, M., Oberdovic' M. and Owa, S., One criterion for univalency, *Proc. Amer. Matb. Soc.*, 106, 4(1989), 1035—1037.

[2] Nehari, Z., The Schwarzian derivative and schlicht functions, *Bull, Amer. Math. Soc.*, 55, (1949), 545—551.

[3] Becker, J., Löwnersche differentialgleichung and quasikonform fortsetzbare schlichte funktionen, *J. Reine Angew, Math.*, 255(1972), 23—43.

A Generalization of a Criterion for Univalency

Huang Xinzhong

(Department of Management Information Science)

Abstract The author gives a criterion for the analytic functions $f(z) = z/(1 - a_2 z + \varphi(z))$ to be univalent in $|z| < 1$. The result generalizes a result recently obtained by M. Nunokawa, M. Obradovic' and S. Owa [1].

Key words criterion for univalency, differential subordination, analytic function