第14卷 第3期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol. 14 №. 3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年7月　　(NATURAL SCIENCE)　　Jul. 1993

概周期微分方程的概周期解*

王　全　义

（管理信息科学系）

摘要　研究具有两个时间变量的概周期微分方程系的概周期解的存在性问题.在某些条件下，利用平均值法和逐步逼近法证明了这类方程系具有概周期解.在所得的结果中，定理2推广了文[1]中的结果，定理3推广了文[7]中的定理1.

关键词　微分方程、存在性、概周期解、平均值法，逐步逼近法

1　主要结果和引理

文[1—6]考虑一些含有“快时间”和“慢时间”的概周期微分系统的概周期解的存在性问题，本文也考虑这类概周期系统的概周期解的存在性问题.考虑如下微分方程系

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\varepsilon f(t,\varepsilon t,x,y,\varepsilon),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=g_0(t,\varepsilon t,x,y)+\varepsilon g_1(t,\varepsilon t,x,y,\varepsilon).\end{cases}\tag{1}$$

这里 $x\in R^n$、$y\in R^m$；f 是 n 维函数，g_0,g_1是 m 维函数；$f(t,\tau,x,y,\varepsilon),g_0(t,\tau,x,y),g_1(t,\tau,x,y,\varepsilon)$（其中 $\tau=\varepsilon t$ 也看作一个独立量）关于(t,τ,x,y,ε)连续；关于 t 以 T（$T>0$为常数）为周期；关于 τ 对$(t,x,y,\varepsilon)\in R\times R^n\times R^m\times[0,1]$是一致概周期的；且 f、g_1关于 x 和 y 的一阶偏导数在 $R\times R\times D_1\times D_2\times[0,1]$上一致连续；$g_0$关于 τ,x,y，的一阶和二阶偏导数在 $R\times R\times D_1\times D_2$ 上一致连续，这里 D_1为 R^n 中的任一紧集，D_2是 R^m 中的任一紧集.现在，假设下列(1)—(3)的条件被满足

(1)　假设存在着连续的 m 维函数 u 为 $R\times R\times R^m\to R^m$，满足下列(i)，(ii)的条件.(i)$u(t,\tau,x)$是 t 的 T-周期函数且关于 τ 对$(t,x)\in R\times R^n$ 是一致概周期的.此外，$u(t,\tau,x)$关于 τ 和 x 的一阶和二阶偏导数在 $R\times R\times D_1$上一致连续，这里 D_1为 R^n 中的任一紧集.(ii)$u(t,\tau,x)$满足下列微分方程系

本文1992-04-21收到.
校科研基金资助项目.

$$\frac{du(t,\tau,x)}{dt}=g_0(t,\tau,x,u(t,\tau,x)), \tag{2}$$

这里 τ,x 都视为参数. 因为 $f(t,\tau,x,u(t,\tau,x),0)$ 是 t 的 T-周期函数,因此下列平均值 $f_0(\tau,x)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t,\tau,x,u(t,\tau,x),0)dt$ 存在,且关于 τ 对 $x\in R^n$ 是一致概周期的.

(2)　假设下列方程系

$$\frac{dv}{dt}=\varepsilon f_0(\varepsilon t,v),\qquad (\varepsilon\in(0,1]) \tag{3}$$

有一个概周期解 $v(\varepsilon t)$,并且方程(3)关于 $v(\varepsilon t)$ 的线性变分方程系

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\frac{\partial f_0(\tau,v(\tau))}{\partial x}\xi\overset{\Delta}{=}A(\tau)\xi \tag{4}$$

(其中 $\tau=\varepsilon t$)的所有广义特征指数[8],都不等于零.

(3)　记 $c(t,\varepsilon)=[\partial g_0(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t),u(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t)))]/\partial y$,则对于每一个固定的 $\varepsilon>0$,$c(t,\varepsilon)$ 为 m 阶概周期函数方阵. 假设下列方程系

$$\frac{dy}{dt}=c(t,\varepsilon)y,\qquad (\varepsilon\in(0,1]) \tag{5}$$

有一个基本解方阵 $Y(t,\varepsilon)$,以及存在着一个 m 阶投影方阵 P_2(即 $P_2^2=P_2$),使得 $\|Y(t,\varepsilon)P_2Y^{-1}(s,\varepsilon)\|\leqslant k_2e^{-\alpha_2(t-s)}$,$(t\geqslant s)$,$\|Y(t,\varepsilon)(I_m-P_2)Y^{-1}(s,\varepsilon)\|\leqslant k_2e^{-\alpha_2(s-t)}$,$(s\geqslant t)$. 这里 k_2、α_2 是不依赖于 ε 的正常数,I_m 为 m 阶单位方阵.

说明1　由条件(2)及文[8]的结果可知,方程(4)具有一个基本解方阵 $X(\varepsilon t)$,以及存在着一个 n 阶投影方阵 P_1(与 ε 无关),使得 $\|X(\varepsilon t)P_1X^{-1}(\varepsilon s)\|\leqslant k_1e^{-\alpha_1(t-s)}$,$(t\geqslant s)$ 和 $\|X(\varepsilon t)(I_n-P_1)X^{-1}(\varepsilon s)\|\leqslant k_1e^{-\alpha_1(s-t)}$,$(s\geqslant t)$. 这里 k_1、α_1 是与 ε 无关的正常数,I_n 为 n 阶单位方阵.

定理1　对于方程(1),假设上述条件(1)—(3)都被满足,则存在着 $\varepsilon_0>0$ 充分小,使得当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时,方程(1)具有一个概周期解为 $x=x(t,\varepsilon)$ 和 $y=y(t,\varepsilon)$,满足方程组 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|x(t,\varepsilon)-v(\varepsilon t)\|=0$ 和 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|y(t,\varepsilon)-u(t,\varepsilon t,V(\varepsilon t))\|=0$,对 $t\in R$ 是一致成立的.

利用文[3]引理7的证明方法,可以证明下面引理,限于篇幅,此处证明从略.

引理1　设 f 为 $R\times R\times R^n\to R^n$ 连续,$f(t,\tau,x)$ 关于 t 以 T 为周期,且关于 τ 对 $(t,x)\in R\times R^n$ 是一致概周期的;此外还假定:(i)下列平均值

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(s,\tau,x)ds=0 \tag{6}$$

对任意的 $(\tau,x)\in R\times R^n$ 都成立. (ii) $f(t,\tau,x)$ 关于 (τ,x) 的一阶偏导数在 $R\times R\times D_1$(D_1 为 R^n 中的任一紧集)上一致连续.

则存在着 n 维函数 ω 为 $R^n\times R\times R\times(0,1]\to R^n$,具有下列(1)—(4)的性质. (1) $\omega(x,t,\tau,\varepsilon_1)$ 关于 (x,t,τ,ε_1) 连续,对 t,τ 属于 $C^{(1)}$ 类、关于 x 属于 $C^{(\infty)}$ 类. (2) $\omega(x,t,\tau,\varepsilon_1)$,$\partial\omega(x,t,\tau,\varepsilon_1)/\partial\tau$,$\partial\omega(x,t,\tau,\varepsilon_1)/\partial t$,$\partial\omega(x,t,\tau,\varepsilon_1)/\partial x_j(j=1,2\cdots,n)$ 都是 t 的 T-周期函数,且对于每一个固定的 $\varepsilon_1\in(0,1]$,它们都是关于 τ 对 $(x,t)\in R^n\times R$ 是一致概周期的. (3) $\partial^2\omega(x,t,\tau,\varepsilon_1)/\partial x_j\partial\tau$ 存在、连续且下列极限

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\varepsilon_1\omega(x,t,\tau,\varepsilon_1)=0, \tag{7}$$

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\varepsilon_1\frac{\partial\omega(x,t,\tau,\varepsilon_1)}{\partial\tau}=0, \tag{8}$$

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\varepsilon_1\frac{\partial\omega(x,t,\tau,\varepsilon_1)}{\partial x_j}=0,(j=1,2,\cdots,n), \tag{9}$$

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\varepsilon_1\frac{\partial^2\omega(x,t,\tau,\varepsilon_1)}{\partial x_j\partial\tau}=0,(j=1,2,\cdots,n), \tag{10}$$

对于 $t,\tau\in R, x\in D_1$（D_1是 R^n 中的任一紧集）是一致成立的．(4)令 $h(x,t,\tau,\varepsilon_1)=\partial\omega(x,t,\tau,\varepsilon_1)/\partial\tau+f(t,\tau,x)$，那末，下列极限 $\lim_{\varepsilon_1\to 0}h(x,t,\tau,\varepsilon_1)=0$，
$\lim_{\varepsilon_1\to 0}(\partial h(x,t,\tau,\varepsilon_1)/\partial x_j)=0,(j=1,2,\cdots,n)$，对于 $t,\tau\in R, x\in D_1$（D_1是 R^n 中的任一紧集）是一致成立的．

2　定理1的证明

首先我们把方程(1)重新写为如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\varepsilon f_0(\varepsilon t,x)+\varepsilon f_1(t,\varepsilon t,x)+\varepsilon f_2(t,\varepsilon t,x,y)+\varepsilon f_3(t,\varepsilon t,x,y,\varepsilon),\\ \dfrac{dy}{dt}=g_0(t,\varepsilon t,x,y)+\varepsilon g_1(t,\varepsilon t,x,y,\varepsilon).\end{cases} \tag{11}$$

这里，$f_0(\varepsilon t,x)=\frac{1}{T}\int_0^T f(s,\varepsilon t,x,u(s,\varepsilon t,x),0)ds$，$f_1(t,\varepsilon t,x)=f(t,\varepsilon t,x,u(t,\varepsilon t,x),0)-f_0(\varepsilon t,x)$，$f_2(t,\varepsilon t,x,y)=f(t,\varepsilon t,x,y,0)-f(t,\varepsilon t,x,u(t,\varepsilon t,x),0)$，$f_3(t,\varepsilon t,x,y,\varepsilon)=f(t,\varepsilon t,x,y,\varepsilon)-f(t,\varepsilon t,x,y,0)$．由定理的条件可知 $f_i(i=0,1,2,3)$具有与 f 相同的性质．并且容易验证 $f_1(t,\tau,x)$（这里 $\tau=\varepsilon t$）满足引理1的所有条件．因此由引理1可知：对于 $f_1(t,\tau,x)$，存在着向量函数 $\omega(x,t,\tau,\varepsilon_1)$具有引理1的四个性质．特别地，我们可以取 $\varepsilon_1=\varepsilon^{\frac{1}{2}}$．于是若记 $a=\sup_{\tau\in R}\|v(\tau)\|$，则存在着 $\delta_1>0$充分小，使得当$0<\varepsilon\leqslant\delta_1$，$\|z\|\leqslant a+1$，$z\in R^n$，$t,\tau\in R$ 时，就有

$$\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\omega(z,t,\tau,\varepsilon^{\frac{1}{2}})}{\partial z}\|\leqslant\frac{1}{2}. \tag{12}$$

现在对方程(11)施行下列变换

$$\begin{cases}x=z-\varepsilon\omega(z,t,\varepsilon t,\varepsilon^{\frac{1}{2}}),\\ y=u(t,\varepsilon t,z)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\varphi,\end{cases} \tag{13}$$

这里 $z\in R^n$ 且$\|z\|\leqslant a+1$，$0<\varepsilon\leqslant\delta_1$，$\varphi\in R^m$，于是我们有

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=(I_n-\varepsilon\dfrac{\partial\omega(z,t,\varepsilon t,\varepsilon^{\frac{1}{2}})}{\partial z})\dfrac{dz}{dt}-\varepsilon[\dfrac{\partial\omega(z,t,\tau,\varepsilon^{\frac{1}{2}})}{\partial t}+\varepsilon\dfrac{\partial\omega(z,t,\tau,\varepsilon^{\frac{1}{2}})}{\partial\tau}]_{\tau=\varepsilon t},\\ \dfrac{dy}{dt}=[\dfrac{\partial u(t,\tau,z)}{\partial t}+\varepsilon\dfrac{\partial u(t,\tau,z)}{\partial\tau}]_{\tau=\varepsilon t}+\dfrac{\partial u(t,\varepsilon t,z)}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\dfrac{d\varphi}{dt},\end{cases} \tag{14}$$

这里$\|z\|\leqslant a+1$，$0<\varepsilon\leqslant\delta_1$．又从式(12)可知$(I_n-\varepsilon\frac{\partial\omega(z,t,\varepsilon t,\varepsilon^{\frac{1}{2}})}{\partial z})$可逆，并且有

$$(I_n-\varepsilon\frac{\partial\omega(z,t,\varepsilon t,\varepsilon^{\frac{1}{2}})}{\partial z})^{-1}=I_n+\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon\frac{\partial\omega(z,t,\varepsilon t,\varepsilon^{\frac{1}{2}})}{\partial z})^k. \tag{15}$$

从式(11)—(15)直接计算可知，方程(11)可以被化为如下的形式

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dt}=\varepsilon f_0(\varepsilon t,z)+\varepsilon f_4(t,\varepsilon t,z,\varepsilon)+\varepsilon f_5(t,\varepsilon t,z,\varphi,\varepsilon),\\ \dfrac{d\varphi}{dt}=\dfrac{\partial g_0(t,\varepsilon t,z,u(t,\varepsilon t,z))}{\partial y}\varphi+\varepsilon^{\frac{1}{2}}g_2(t,\varepsilon t,z,\varphi,\varepsilon),\end{cases} \tag{16}$$

这里$\|z\|\leqslant a+1,0<\varepsilon\leqslant\delta_1,\varphi\in R^m$，

$$\begin{aligned}f_4(t,\varepsilon t,z,\varepsilon)=&[f_1(t,\varepsilon t,z-\varepsilon\omega)-f_1(t,\varepsilon t,z)]\\&+[f_0(\varepsilon t,z-\varepsilon\omega)-f_0(\varepsilon t,z)]\\&+[f_1(t,\varepsilon t,z)+\frac{\partial\omega(z,t,\tau,\varepsilon^{\frac{1}{2}})}{\partial t}|_{\tau=\varepsilon t}]\\&+\varepsilon\frac{\partial\omega(z,t,\tau,\varepsilon^{\frac{1}{2}})}{\partial\tau}|_{\tau=\varepsilon t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_5(t,\varepsilon t,z,\varphi,\varepsilon)=&f_2(t,\varepsilon t,z-\varepsilon\omega,u(t,\varepsilon t,z)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\varphi)\\&+f_3(t,\varepsilon t,z-\varepsilon\omega,u(t,\varepsilon t,z)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\varphi,\varepsilon)\\&+[\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon\frac{\partial\omega}{\partial z})^k](f_0+f_1+f_2+f_3+\frac{\partial\omega}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\omega}{\partial\tau}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\frac{1}{2}}g_2(t,\varepsilon t,z,\varphi,\varepsilon)=&\varepsilon^{-\frac{1}{2}}[g_0(t,\varepsilon t,z-\varepsilon\omega,u(t,\varepsilon t,z)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\varphi)\\&-g_0(t,\varepsilon t,z,u(t,\varepsilon t,z))-\frac{\partial g_0(t,\varepsilon t,z,u(t,\varepsilon t,z))}{\partial y}\varepsilon^{\frac{1}{2}}\varphi\\&-\frac{\partial u(t,\varepsilon t,z)}{\partial z}\frac{dz}{dt}-\varepsilon\frac{\partial u(t,\tau,z)}{\partial\tau}|_{\tau=\varepsilon t}\\&+\varepsilon g_1(t,\varepsilon t,z-\varepsilon\omega,u(t,\varepsilon t,z)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\varphi,\varepsilon)].\end{aligned}$$

由定理的条件和引理1及[3]的引理4的结论可知：方程(16)右边的所有函数关于Z,φ的一阶偏导数连续；对于每一个固定的$\varepsilon>0$，它们都是关于t对$(z,\varphi)\in D_{a+1}\times R^m$一致地概周期函数，这里$D_{a+1}=\{z|z\in R^n,\|z\|\leqslant a+1\}$；此外还有：对任意的$t、\tau\in R,\|z\|\leqslant a+1$，以及紧集里的$\varphi$，当$\varepsilon\to0$时，$f_4(t,\tau,z,\varepsilon)\to0$，$\dfrac{\partial f_4(t,\tau,z,\varepsilon)}{\partial z}\to0$，$f_5(t,\tau,z,\varphi,\varepsilon)\to0$，$\dfrac{\partial f_5(t,\tau,z,\varphi,\varepsilon)}{\partial z}\to0$，$\dfrac{\partial f_5(t,\tau,z,\varphi,\varepsilon)}{\partial\varphi}\to0$是一致地成立.

对于方程(16)再作变换

$$\begin{cases}z=v(\varepsilon t)+\xi,\\ \varphi=\varphi,\end{cases} \tag{17}$$

这里$\|\xi\|\leqslant1,\xi\in R^n,\varphi\in R^m,0<\varepsilon\leqslant\delta_1$.

则方程(16)可化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=\varepsilon A(\varepsilon t)\xi+\varepsilon f_6(t,\varepsilon t,\varepsilon)+\varepsilon f_7(t,\varepsilon t,\xi,\varphi,\varepsilon)+\varepsilon f_8(\varepsilon t,\xi),\\ \dfrac{d\varphi}{dt}=c(t,\varepsilon)\varphi+\varepsilon^{\frac{1}{2}}g_3(t,\varepsilon t,\varepsilon)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}g_4(t,\varepsilon t,\xi,\varphi,\varepsilon)+g_5(t,\varepsilon t,\xi,\varphi).\end{cases} \tag{18}$$

这里，$\|\xi\|\leqslant 1, 0<\varepsilon\leqslant\delta_1, A(\varepsilon t)=[\partial f_0(\varepsilon t,v(\varepsilon t))]/\partial x, c(t,\varepsilon)=[\partial g_0(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t),u(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t)))]/\partial y, f_8(\varepsilon t,\xi)=f_0(\varepsilon t,v(\varepsilon t)+\xi)-f_0(\varepsilon t,v(\varepsilon t))-A(\varepsilon t)\xi, f_6(t,\varepsilon t,\varepsilon)=f_4(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t),\varepsilon)+f_5(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t),0,\varepsilon), f_7(t,\varepsilon t,\xi,\varphi,\varepsilon)=[f_4(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t)+\xi,\varepsilon)-f_4(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t),\varepsilon)]+[f_5(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t)+\xi,\varphi,\varepsilon)-f_5(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t),0,\varepsilon)], g_3(t,\varepsilon t,\varepsilon)=g_2(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t),0,\varepsilon), g_4(t,\varepsilon t,\xi,\varphi,\varepsilon)=g_2(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t)+\xi,\varphi,\varepsilon)-g_2(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t),0,\varepsilon), g_5(t,\varepsilon t,\xi,\varphi)=[\partial g_0(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t)+\xi,u(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t)+\xi))/\partial y-c(t,\varepsilon)]\varphi$. 因此，当 $\varepsilon>0$ 固定时，方程(18)右边的所有函数都是关于 t 对 $(\xi,\varphi)\in D_1\times R^m$ 一致地概周期函数；而且它们关于 (ξ,φ) 都是连续可微的；此外还有 $f_8(\varepsilon t,0)=0, f_7(t,\varepsilon t,0,0,\varepsilon)=0, g_4(t,\varepsilon t,0,0,\varepsilon)=0, g_5(t,\varepsilon t,0,0)=0, \partial f_8(\varepsilon t,0)/\partial\xi=0$；且当 $\varepsilon\to 0$ 时，$f_6(t,\varepsilon t,\varepsilon)\to 0, \partial f_7(t,\varepsilon t,\xi,\varphi,\varepsilon)/\partial\xi\to 0, \partial f_7(t,\varepsilon t,\xi,\varphi,\varepsilon)/\partial\varphi\to 0$ 对 $t\in R, \|\xi\|\leqslant 1$、$\varphi\in s_1$ 是一致成立的，这里 s_1 为 R^m 的任一紧集；$g_5(t,\varepsilon t,\xi,\varphi)=0(\|\xi\|^2+\|\varphi\|^2)$，当 $\|\xi\|$、$\|\varphi\|$ 很小时.

为了方便起见，把方程(18)简写为如下形式

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=\varepsilon A(\varepsilon t)\xi+\varepsilon f_6(t,\varepsilon t,\varepsilon)+\varepsilon f_9(t,\varepsilon t,\xi,\varphi,\varepsilon)\\ \dfrac{d\varphi}{dt}=c(t,\varepsilon)\varphi+\varepsilon^{\frac{1}{2}}g_3(t,\varepsilon t,\varepsilon)+g_6(t,\varepsilon t,\xi,\varphi,\varepsilon),\end{cases}\tag{19}$$

这里 $\xi\in R^n, \varphi\in R^m$ 且 $\|\xi\|\leqslant 1, 0<\varepsilon\leqslant\delta_1, f_9=f_7+f_8, g_6=\varepsilon^{\frac{1}{2}}g_4+g_5$.

由 f_9 和 g_6 的定义可知：当 $\|\xi\|$、$\|\varphi\|$、$\varepsilon>0$ 充分小时，它们关于 ξ、φ 的李氏常数也充分小. 因此对于 $l=\dfrac{\alpha}{32k}$（这里 $k=max\{k_1,k_2\}, \alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2\}, k_i,\alpha_i(i=1,2)$ 由定理中的条件给出），存在着 $\rho>0, \delta_2>0$ 充分小（且 $\delta_2<\delta, \rho<\dfrac{1}{2}$）使得当 $\|\varphi_i\|\leqslant\rho$. $\|\xi_i\|\leqslant\rho, \varphi_i\in R^m, \xi_i\in R^n(i=1,2), 0<\varepsilon\leqslant\delta_2$ 时就有

$$\begin{cases}\|f_9(t,\varepsilon t,\xi_1,\varphi_1,\varepsilon)-f_9(t,\varepsilon t,\xi_2,\varphi_2,\varepsilon)\|\leqslant l(\|\varphi_1-\varphi_2\|+\|\xi_1-\xi_2\|),\\ \|g_6(t,\varepsilon t,\xi_1,\varphi_1,\varepsilon)-g_6(t,\varepsilon t,\xi_2,\varphi_2,\varepsilon)\|\leqslant l(\|\varphi_1-\varphi_2\|+\|\xi_1-\xi_2\|)\end{cases}.\tag{20}$$

再取 $\delta_3>0$ 充分小且 $\delta_3<\delta_2$ 使得 $0<\varepsilon\leqslant\delta_3$ 时就有

$$\sup_{\substack{0<\varepsilon\leqslant\delta_3\\ t\in R}}\{\|f_6(t,\varepsilon t,\varepsilon)\|+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}g_3(t,\varepsilon t,\varepsilon)\|\}\leqslant\frac{\alpha\rho}{16k}.\tag{21}$$

记

$$\delta(\varepsilon)=\sup_{t\in R}\{\|f_6(t,\varepsilon t,\varepsilon)\|+\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}g_3(t,\varepsilon t,\varepsilon)\|\}, 0<\varepsilon\leqslant\delta_3,\tag{22}$$

由于当 $\varepsilon\to 0$ 时 $f_6(t,\varepsilon t,\varepsilon)\to 0$ 对 $t\in R$ 一致地成立且 $g_3(t,\varepsilon t,\varepsilon)$ 有界，所以当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\delta(\varepsilon)\to 0$. 令

$$\begin{cases}\xi_0(t,\varepsilon)=\displaystyle\int_{-\infty}^{t}X(\varepsilon t)P_1X^{-1}(\varepsilon s)\varepsilon f_6(s,\varepsilon s,\varepsilon)ds\\ \qquad-\displaystyle\int_{t}^{+\infty}X(\varepsilon,t)(I_n-P_1)X^{-1}(\varepsilon s)\varepsilon f_6(s,\varepsilon s,\varepsilon)ds,\\ \varphi_0(t\varepsilon)=\displaystyle\int_{-\infty}^{t}Y(t,\varepsilon)P_2Y^{-1}(s,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{1}{2}}g_3(s,\varepsilon s,\varepsilon)ds\\ \qquad-\displaystyle\int_{t}^{+\infty}Y(t,\varepsilon)(I_m-P_2)Y^{-1}(s,\varepsilon)\varepsilon^{\frac{1}{2}}g_3(s,\varepsilon s,\varepsilon)ds.\end{cases}\tag{23}$$

易证由式(23)所定义的函数存在且关于 t 是连续可微的. 另一方面,因为对于每一个固定的 $\varepsilon>0$, $c(t,\varepsilon)$, $A(\varepsilon t)$, $f_6(t,\varepsilon t,\varepsilon)$, $g_3(t,\varepsilon t,\varepsilon)$ 是 t 的概周期函数,因此当 $\varepsilon>0$ 固定时, $\{\xi_0(t,\varepsilon),\varphi_0(t,\varepsilon)\}$ 也是 t 的概周期函数. 此外由定理的条件以及(22)可得

$$\begin{cases}\|\xi_0(t,\varepsilon)\| \leqslant \dfrac{2k\delta(\varepsilon)}{\alpha}\\ \|\varphi_0(t,\varepsilon)\| \leqslant \dfrac{2k\delta(\varepsilon)}{\alpha}, 0<\varepsilon\leqslant\delta_3.\end{cases} \tag{24}$$

因此

$$\sup_{t\in R}\{\|\xi_0(t,\varepsilon)\| + \|\varphi_0(t,\varepsilon)\|\} \triangleq \frac{4\theta k\delta(\varepsilon)}{\alpha}, 0<\varepsilon\leqslant\delta_3, \tag{25}$$

其中 $\theta=\theta(\varepsilon)$ 且 $0<\theta\leqslant1$(因为如果 $\theta=0$, 此时必有 $f_6\equiv0$, $g_3\equiv0$, 从而定理显然成立). 又由式(21)和(23)得 $\sup\limits_{t\in R}\{\|\xi_0(t,\varepsilon)\|+\|\varphi_0(t,\varepsilon)\|\}\leqslant\dfrac{\rho}{4}, 0<\varepsilon\leqslant\delta_3$,

因此有

$$\frac{4\theta k\delta(\varepsilon)}{\alpha} \leqslant \frac{\rho}{4}, 0<\varepsilon\leqslant\delta_3. \tag{26}$$

下面用逐步逼近法证明方程(19)当 $0<\varepsilon\leqslant\delta_3$ 时有一个概周期解.

(1) 用归纳法构造概周期函数序列 $\{\xi_j(t,\varepsilon),\varphi_j(t,\varepsilon)\}$ 满足下式

$$\|\xi_j(t,\varepsilon)\| + \|\varphi_j(t,\varepsilon)\| \leqslant \frac{5\theta k\delta(\varepsilon)}{\alpha} < \frac{\rho}{2}, (0<\varepsilon\leqslant\delta_3), \tag{27}$$

事实上,首先定义函数

$$\begin{cases}\xi_1(t,\varepsilon) = \xi_0(t,\varepsilon) + \left[\int_{-\infty}^{t} X(\varepsilon t)P_1X^{-1}(\varepsilon s) - \int_t^{+\infty} X(\varepsilon t)(I_n - P_1)X^{-1}(\varepsilon s)\right]\\ \qquad \times \varepsilon f_9(s,\varepsilon s,\xi_0(s,\varepsilon),\varphi_0(s,\varepsilon),\varepsilon)ds\\ \varphi_1(t,\varepsilon) = \varphi_0(t,\varepsilon) + \left[\int_{-\infty}^{t} Y(t,\varepsilon)P_2Y^{-1}(s,\varepsilon) - \int_t^{+\infty} Y(t,\varepsilon)(I_m - P_2)Y^{-1}(s,\varepsilon)\right]\\ \qquad \times g_6(s,\varepsilon s,\xi_0(s,\varepsilon),\varphi_0(s,\varepsilon),\varepsilon)ds.\end{cases} \tag{28}$$

于是,由式(20)、(25)、(26)、(28)及定理的条件(2)、(3)可得 $\|\xi_1(t,\varepsilon)\|+\|\varphi_1(t,\varepsilon)\|\leqslant\dfrac{5\theta k\delta(\varepsilon)}{\alpha}<\dfrac{\rho}{2}$, $(0<\varepsilon\leqslant\delta_3)$.

且由式(23)、(28)可知 $\{\xi_1(t,\varepsilon),\varphi_1(t,\varepsilon)\}$ 是连续可微的. 因此直接对式(28)的两边求导得

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi_1}{dt} = \varepsilon A(\varepsilon t)\xi_1 + \varepsilon f_6(t,\varepsilon t,\varepsilon) + \varepsilon f_9(t,\varepsilon t,\xi_0(t,\varepsilon),\varphi_0(t,\varepsilon),\varepsilon),\\ \dfrac{d\varphi_1}{dt} = c(t,\varepsilon)\varphi_1 + \varepsilon^{\frac{1}{2}}g_3(t,\varepsilon t,\varepsilon) + g_6(t,\varepsilon t,\xi_0(t,\varepsilon),\varphi_0(t,\varepsilon),\varepsilon).\end{cases} \tag{29}$$

由于方程(29)的右边所有函数都是 t 的一致概周期函数并且下列方程系

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=\varepsilon A(\varepsilon t)\xi,\\ \dfrac{d\varphi}{dt}=c(t,\varepsilon)\varphi.\end{cases}\tag{30}$$

满足指数型二分法，因此$\{\xi_1(t,\varepsilon),\varphi_1(t,\varepsilon)\}$是$t$的概周期函数. 一般地可由归纳法得到概周期数列

$$\begin{cases}\xi_{j+1}(t,\varepsilon)=\xi_0(t,\varepsilon)+[\int_{-\infty}^{t}X(\varepsilon t)P_1X^{-1}(\varepsilon s)-\int_t^{+\infty}X(\varepsilon t)(I_n-P_1)X^{-1}(\varepsilon s)]\\ \qquad\times\varepsilon f_9(s,\varepsilon s,\xi_j(s,\varepsilon),\varphi_j(s,\varepsilon),\varepsilon)ds\\ \varphi_{j+1}(t,\varepsilon)=\varphi_0(t,\varepsilon)+[\int_{-\infty}^{t}Y(t,\varepsilon)P_2Y^{-1}(s,\varepsilon)-\int_t^{+\infty}Y(t,\varepsilon)(I_m-P_2)Y^{-1}(s,\varepsilon)]\\ \qquad\times g_6(s,\varepsilon s,\xi_j(s,\varepsilon),\varphi_j(s,\varepsilon),\varepsilon)ds.\end{cases}\tag{31}$$

$(j=0,1,2,\cdots)$且满足式(27).

(2) 设$L_{j+1}=\sup\limits_{t\in R}\{\|\xi_{j+1}(t,\varepsilon)-\xi_j(t,\varepsilon)\|+\|\varphi_{j+1}(t,\varepsilon)-\varphi_j(t,\varepsilon)\|\}$，于是由式(20)、(27)、(31)以及定理的条件易得$L_{j+1}\leqslant\frac{1}{2}L_j$，因此$\{\xi_j(t,\varepsilon),\varphi_j(t,\varepsilon)\}$是一致收敛的. 设它的极限函数为$\{\xi(t,\varepsilon),\varphi(t,\varepsilon)\}$. 从而$\{\xi(t,\varepsilon),\varphi(t,\varepsilon)\}$也$t$的概周期函数. 于是从式(31)两边同时取极限可知$\{\xi(t,\varepsilon),\varphi(t,\varepsilon)\}$满足下式

$$\begin{cases}\xi(t,\varepsilon)=\xi_0(t,\varepsilon)+[\int_{-\infty}^{t}X(\varepsilon t)P_1X^{-1}(\varepsilon s)-\int_t^{+\infty}X(\varepsilon t)(I_n-P_1)X^{-1}(\varepsilon s)]\\ \qquad\times\varepsilon f_9(s,\varepsilon s,\xi(s,\varepsilon),\varphi(s,\varepsilon),\varepsilon)ds\\ \varphi(t,\varepsilon)=\varphi_0(t,\varepsilon)+[\int_{-\infty}^{t}Y(t,\varepsilon)P_2Y^{-1}(s,\varepsilon)-\int_t^{+\infty}Y(t,\varepsilon)(I_m-P_2)Y^{-1}(s,\varepsilon)]\\ \qquad\times g_6(s,\varepsilon s,\xi(s,\varepsilon),\varphi(s,\varepsilon),\varepsilon)ds.\end{cases}\tag{32}$$

由式(32)右端可知$\begin{pmatrix}\xi(t,\varepsilon)\\ \varphi(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$是连续可微的，因此直接微分式(32)可知，$\begin{pmatrix}\xi(t,\varepsilon)\\ \varphi(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$是方程(19)在$0<\varepsilon\leqslant\delta_3$时的概周期解，且满足$\sup\limits_{t\in R}\{\|\xi(t,\varepsilon)\|+\|\varphi(t,\varepsilon)\|\}\leqslant\frac{5\theta k\delta(\varepsilon)}{\alpha}$，$(0<\varepsilon\leqslant\delta_3)$. 因此当$\varepsilon\to0$时，$\begin{pmatrix}\xi(t,\varepsilon)\\ \varphi(t,\varepsilon)\end{pmatrix}\to0$对$t\in R$一致地成立. 所以当$0<\varepsilon\leqslant\delta_3$时，方程(1)有一个概周期解

$$\begin{cases}x(t,\varepsilon)=v(\varepsilon t)+\xi(t,\varepsilon)-\varepsilon w(v(\varepsilon t)+\xi(t,\varepsilon),t,\varepsilon t,\varepsilon^{\frac{1}{2}}),\\ y(t,\varepsilon)=u(t,\varepsilon t,v(\varepsilon t)+\xi(t,\varepsilon))+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\varphi(t,\varepsilon).\end{cases}$$

满足$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|x(t,\varepsilon)-v(\varepsilon t)\|=0$，$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\|y(t,\varepsilon)-ut,\varepsilon t,v(\varepsilon t))\|=0$，对$t\in R$一致成立. 定理1证毕.

3 一些应用

在本节，我们再考虑一些特殊系统的概周期解的存在性问题. 首先考虑下列方程系

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon f(t,x)+\varepsilon h(\varepsilon t,x),\tag{33}$$

这里 $x\in R^n$，$t\in R$，$\varepsilon\in[0,1]$。$f(t,x)$，$h(t,x)$都是 n 维的连续函数；f 和 h 关于 x 的一阶偏导数在 $R\times D$(D 为 R^n 中的任一紧集)上一致连续；假设 $f(t,x)$，$h(t,x)$都是关于 t 对 $x\in R^n$ 一致地概周期函数；现在对“快”时间进行平均，得 $f_0(x)=\lim\limits_{T_1\to 0}\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(s,x)ds$，我们就得到“平均”方程

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon f_0(x)+\varepsilon h(\varepsilon t,x)\triangleq\varepsilon G(\varepsilon t,x),(\varepsilon\in(0,1]).\tag{34}$$

再假设系统(34)有一个概周期解 $x_0(\varepsilon t)$，并且方程(34)关于 $x_0(\varepsilon t)$的线性变分方程系

$$\frac{d\xi}{d\tau}=\frac{\partial G(\tau,x_0(\tau))}{\partial x}\xi\triangleq B(\tau)\xi,\tag{35}$$

(其中 $\tau=\varepsilon t$)的广义特征指数都不等于零. 于是有

定理2 对于方程(33)，如果上面所述的条件都被满足，则存在着 $\varepsilon_0>0$充分小，使得当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，方程(33)具有一个概周期解 $x=x(t,\varepsilon)$满足$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|x(t,\varepsilon)-x_0(\varepsilon t)\|=0$，对 $t\in R$ 一致地成立.

应用文[3]中的引理7，这个定理的证明完全与定理1的证明类似，此处证明从略.

说明2 当 $h(t,x)$关于 t 以 T 为周期时，这时定理2就是文[1]中的结果. 因此定理2是文[1]中的结果的推广.

其次，考虑如下方程系

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t)\cdot f_1(\varepsilon t)+\varepsilon g(t,\varepsilon t,x,\varepsilon),\tag{36}$$

这里 $t\in R$，$x\in R^n$，$\varepsilon\in[0,1]$；$A(t)$为 $n\times n$ 阶的概周期函数方阵，$f(t)$，$f_1(t)$分别为 n 维、一维的概周期函数，且 $f_1(t)$关于 t 的一阶导数一致连续；$g(t,\tau,x,\varepsilon)$($\tau=\varepsilon t$ 作为独立变量)是 n 维的连续函数，且关于 τ 以 T 为周期，关于 t 对$(\tau,x,\varepsilon)\in R\times R^n\times[0,1]$一致地概周期函数. 此外还假设下列方程系

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x,\tag{37}$$

满足指数型二分法，即方程(37)存在一个基本解方阵 $X(t)$以及一个 n 阶投影方阵 P 使得$\|X(t)PX^{-1}(s)\|\leqslant\beta e^{-\alpha(t-s)}(t\geqslant s)$，$\|X(t)(I_n-P)X^{-1}(s)\|\leqslant\beta e^{-\alpha(s-t)}(s\geqslant t)$.

这里 β、α 都是正常数，I_n 为 $n\times n$ 阶单位方阵. 于是有

定理3 对于方程(36)，如果上面所述条件被满足，则存在着 $\varepsilon_0>0$充分小，使得当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，方程(36)有一个概周期解 $x(t,\varepsilon)$满足$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|x(t,\varepsilon)-u(t,\varepsilon t)\|=0$，一致地对 $t\in R$ 成立. 其中 $u(t,\varepsilon t)=f_1(\varepsilon t)[\int_{-\infty}^{t}X(t)PX^{-1}(s)f(s)ds-\int_t^{+\infty}X(t)(I_n-P)X^{-1}(s)f(s)ds]$.

定理3的证明可以从定理1的证明过程中得到，此处证明从略.

说明3. 在定理3中，如果 $f_1(\varepsilon t)\equiv 1$，$g(t,\varepsilon t,x,\varepsilon)\equiv g(t,x,\varepsilon)$，即 $g(t,\varepsilon t,x,\varepsilon)$不显含 εt，那么定理3就是文[7]中的定理1.

参 考 文 献

[1] Sethna, P. R., An *extension of the method of averaging*, Q. App. Math., XXV, (1967), 205—211.
[2] Roseau, M., *C. R. Acad. Sc. Paris*, 258, (1969), 409—412.
[3] 王全义,微分方程年刊4,1(1988),83—116.
[4] Hale, J. K. and Seifert, G., *J. Math. Anal. Appl.* 3(1961), 18—24
[5] Chang, K. W., *J. Diff. Eqs.*, 4, (1968), 300—307.
[6] Huang Yuanshi, *Chin. Ann. of Math.* 6B(1985), 15—26.
[7] 林振声,数学学报,22,(1979),515—529.
[8] Lin Zhensheng, *Chin. Ann. of Math.*, 2(1982), 131—146.

Almost Periodic Solutions of Almost Periodic Differential Systems

Wang Quanyi

(*Department of Management Information Science*)

Abstract This paper centers on the existence of almost periodic solutions of some almost periodic differential systems with two time variables. Under certain conditions, these systems are proved by mean value method and successive approximation method to have almost periodic solutions. In the results obtained, theorem 2 extends the result in the paper [1] and theorem 3 extends theorem 1 in the paper [7].

Key words differential equation, existence, almost periodic solution, mean value method, successive approximation method