第14卷 第3期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol. 14 №. 3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年7月　　(NATURAL SCIENCE)　　Jul. 1993

离散型无失效数据的可靠性分析

吴 绍 敏

(管理信息科学系)

摘要 应用经典统计与 Bayes 方法，对离散型无失效数据进行可靠性分析．建立一个判别准则，用于判定分析结果是否符合实际，不受概型限制，适用所有寿命为离散型产品．

关键词 离散型，无失效数据，可靠性分析

0 引言

研究无失效数据的可靠性分析是科技发展的必然要求，在理论和应用上都具有很大的价值．目前只看到连续型的情况且文献不多，本文讨论离散型的情况．许多产品的寿命为离散型，如大炮、飞机的起落架，各种开关等产品，它们的寿命是以使用次数来度量寿命的长短．一般说来，这类产品的可靠性比较高，其寿命较长，要获得其寿命失效数据比较困难；另一方面有的产品造价昂贵，要获得失效数据就得付出较高的经济代价．若能从一批无失效数据中获得一些信息，对这类产品进行可靠性分析，无论从技术上或经济上来看，都是很有价值的．如以某种大炮为例，从"膛炸"试验中获得 50 个无失效数据列表 1

表 1 无失效数据(单位：次)

11	13	21	15	22	24	27	23	29	28	20	26	30	31	33	32	36
37	95	29	32	41	42	51	54	61	67	71	74	45	53	56	60	70
83	91	73	74	81	86	90	94	86	87	64	57	88	93	100	40	

表 1 中的数据不是大炮的失效时间，而是试验的无失效的截尾时间，这些数据中确实蕴含有大炮寿命的信息，到少可以肯定，大炮的寿命必大于各自测试的截尾时间．如在第 1 门大炮进行

本文 1992—04—02 收到

截尾寿命试验停止时，虽不知其确切的失效时间，但它总是大于11次．下面要根据表1的数据所提供的信息对该类大炮的可靠性进行分析．从表1的数据看，其中有些截尾时间是相同的，有些是相近的．把这些相同或相近的数据归为一组，总共得9组无失效数据，把第i组中最小的截尾时间记为t_i，用其代表该组的截尾时间，并设$t_1<t_2<t_3\cdots<t_9$用n_i表示第i组中无失效数据的个数据，记$N_i=\sum_{t=i}^{9}n_t(i=1,9)$．它表示50门大炮在寿试中，截尾时间达到或超过$t_i$的试验门数，即在$t_i$时刻还未失效的大炮总门数．把分组的情况列于表2(见节2)．

1　可靠度$R(t)=P(T>t)$的拟合

设每次试验时事件A发生的概率为q，不发生的概率为p，试验到事件A发生为止，记试验次数(寿命)为T，则

$$T\sim p(T=k)=p^{k-1}q\qquad p+q=1\quad(k=1,2,\cdots),\tag{1}$$

T的分布函数

$$F(t)=p(T\leqslant t)=\sum_{k\leqslant t}p^{k-1}q=1-p^t,\tag{2}$$

可靠度函数

$$R(t)=p(T>t)=p^t.\tag{3}$$

今从m个定时观测点$t_1,t_2,\cdots,t_m(t_i<t_{i+1}),(i=1,m-1)$，获得$m$组共$n$个无失效值．即在第$i$个点$t_i$处，观测的所有寿命都大于$t_i$，假定第$i$组观测$n_i$次，知$n=\sum_{i=1}^{m}n_i$该类型数据可简记为$(t_i,n_i)1\leqslant i\leqslant n$. 根据无失效数据，如何去估计参数$p$，从而获得产品的各种可靠性指标．

1.1　R_i的初估

令$R_i=p(T>t_i)=p^{t_i}(i=1,m)$设某事件$A$发生的概率为$(1-R)$，不发生的概率为$R$，在$n$次独立试验中$A$发生的次数为$r\geqslant1$. 则

$$L(r|R)=\binom{n}{r}(1-R)^rR^{n-r}.\tag{4}$$

特别，$L(0|R)=R^n$，显然这是大概率事件，那么对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，应有$R^n\geqslant\alpha$，于是有$R_i^{n_i}\geqslant\alpha$，作为最低的估计值$\underline{R}_i=\alpha^{\frac{1}{n_i}}$. 保守一些取$\alpha=0.5$，且为能更多地利用数据中的信息，将$n_i$换为$N_i$，从而得到$R_i$的初估值$\underline{R}_i=(0.5)^{\frac{1}{N_i}}(i=1,9)$，计算结果列于表2.

1.2　参数P的估计

因$R\triangleq R(t)=p^t$，$\ln R=t\ln p$，令$y=\ln R$，$\mu=\ln p$，则$y=\mu t$. 那么，利用$\underline{R}_i$来估计p. 因$\hat{y}_i=\ln\underline{R}_i$，$y_i=\mu t_i$　$\hat{y}_i=\mu t_i+\varepsilon_i(i=1,m)$，$\varepsilon_i$是误差，应用最小二乘法求$\hat{p}$使得$Q(\hat{p})=\sum_{i=1}^{m}(\hat{y}_i-y_i)^2=\min$. 可得

$$\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{m}t_i\hat{y}_i/\sum_{i=1}^{m}t_i^2\tag{5}$$

$$\hat{p} = e^{\hat{\mu}}. R(\hat{p}) = \hat{p}^t \tag{6}$$

将表2第5列的$\underline{R}_i$ 代入可得

$$\hat{\mu} = -8.068 \times 10^{-4}. \hat{p} = 0.9992. R(t) = (0.9992)^t. R_i(\hat{p}) = R(t_i)(i = 1.9)$$

的具体计算列于表3的第3列.

表2　$\underline{R}_i$ 的初步估值表

i	T_i	n_i	N_i	$\underline{R}_i$
1	11	3	50	0.9862
2	20	10	47	0.9853
3	30	7	37	0.9814
4	40	4	30	0.9771
5	51	5	26	0.9736
6	60	4	21	0.9675
7	70	5	17	0.9600
8	81	6	12	0.9439
9	90	6	6	0.8909

表3　可靠度的数值表

i	t_i	$R_i(\hat{p})$	$\hat{R}_i(\hat{p})$	$\hat{R}(t_i)$
1	11	0.9912	0.9998	0.9980
2	20	0.9841	0.9996	0.9964
3	30	0.9762	0.9993	0.9946
4	40	0.9685	0.9985	0.9928
5	51	0.9600	0.9970	0.9909
6	60	0.9531	0.9952	0.9893
7	70	0.9455	0.9940	0.9875
8	81	0.9372	0.9844	0.9855
9	90	0.9305	0.9677	0.9839

2　等效失效数

上面求得可靠度函数 $R(t)=(0.9992)^t$,是否反映实际,如何判断,是有待解决的问题.为此,引进等效失效数的概念.

设总体 $T \sim P(T=x)=p^{x-1}q(x=1,2,\cdots)$,对 T 进行 n 次独立观测,第 i 次观测的截尾时间为 t_i,若末观测到失效结果,记为$(t_i,1)$;若观测到失效,以 x_i 记失效时间.那么无失效数据为$(t_i,1)1\leqslant i\leqslant n$.若其观测到 $k\geqslant 1$次失效,不妨设后 k 个失效则观测数据为$(t_i,1)_{1\leqslant i\leqslant n-k}$;$(x_i)$ $n-k+1\leqslant i\leqslant n$.则似然函数为

$$L(p\,|\,t_1,t_2,\cdots t_{n-k},x_{n+k+1},\cdots x_n) = \prod_{i=1}^{n-k} p(T > t_i) \prod_{i=n-k+1}^{n} p(T = x_i)$$

$$= p^{(\sum_{i=1}^{n-k} t_i + \sum_{i=n-k+1}^{n} x_i) - k} q^k = p^{T-k}(1-p)^k, \qquad T = \sum_{i=1}^{n-k} t_i + \sum_{i=n-k+1}^{n} x_i(\text{总时间}),$$

可得 p 的极大似然估计

$$\hat{p} = \frac{T-k}{T} = 1 - \frac{k}{T}(k\text{ 为失效数}). \tag{7}$$

另一方面记

$$R \triangleq R(t_1,t_2,\cdots t_n) = \prod_{i=1}^{n} p(T > t_i) = p^T. \quad T = \sum_{i=1}^{n} t_i(\text{总时间}),$$

则 $p=R^{\frac{1}{T}}$,因$0<R<1$,故存在正数 β 使得 $R=e^{-\beta}$.得 $\beta=-\ln R$,故有

$$p = e^{-\beta/T} = 1 - \beta/T \tag{8}$$

比较式(7)与(8)知 $\beta=-\ln R$ 是等效失效数,β 是 R 的单调减函数,在无失效的情况下,β 近似

等于零，其估计值应接近于零. 当 $\beta \geq 1$时，$R \leq 0.3678$，可知 $R_i = p(T > t_i)$或 p 的估计明显偏低故利用 β 估计值的大小可以判断拟合的可靠度函数是否符合实际. 上面所求得的 $R(t) = (0.9992)^t$，因 $\hat{\beta} = 2.03729 > 1$，显然大于1，故知 p 的估计值偏低，应加以改进.

3 Bayes 修正

从前面的数据分析中获得两个信息可以利用.

(1)因$R_i = (0.5)^{1/N_i}$随着 N_i 的减少而下降较快，因而导致 $R(t) = (0.9992)^t$ 尾部偏低，于是有理由认为 $R_m \geq R_m(\hat{p})$，从而可取 R_m 的先验分布为 $U(R_m(\hat{p})、1)$，在平方损失下，由数据(t_m, n_m)获得 R_m 的 Bayes 估计为

$$\hat{R}_m(\hat{p}) = \int_{R_m(\hat{p})}^{1} u^{n_m+1} du \Big/ \int_{R_m(\hat{p})}^{1} u^{n_m} du$$

$$= (n_m + 1)(1 - [R_m(\hat{p})]^{n_m+2}) / (n_m + 2)(1 - [R_m(\hat{p})]^{n_m+1}). \tag{9}$$

(2)因 $R = p(T > t)$随着 t 的增大而减少，即

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_m \text{ 时}, R_1 \geq R_2 \geq \cdots \geq R_m.$$

因此我们期望 R_{i-1}的估计大于 R_i 的估计，故取 R_{i-1}的先验分布为 $U(\hat{R}_i(\hat{p}).1)$，类似可得

$$\hat{R}_{i-1}(\hat{p}) = (n_{i-1} + 1)(1 - [\hat{R}_i(\hat{p})]^{n_i+2}) / (n_{i-1} + 2)(1 - [\hat{R}_i(\hat{p})]^{n_i+1})(i = m, m-1, \cdots 2). \tag{10}$$

应用式(9)与式(10)可以计算 R_i 的估计值 $\hat{R}_i(\hat{p})(i=1,m)$，列于表3的第4列.

应用表3第4列的数据和最小二乘法对 p 进行再估计，由公式(5)与(6)可得

$$\hat{\mu} = 1.8 \times 10^{-4}, \quad \hat{p} = 0.99982, \quad \hat{R}(t) = (0.99982)^t, \quad \beta = 0.458112 < 1.$$

情况大为改善，可以认为所求的可靠度函数基本符合要求. $\hat{R}(t_i)(i=1,9)$的具体数值列于表3第5列. 那么所试验的大炮的各种可靠性指标如下

$$\hat{R}(t) = (0.99982)^t (t = 1, 2\cdots)(\text{可靠度函数}),$$

$$\hat{q} = 1.8 \times 10^{-4}(\text{失效率}),$$

$$ET = \frac{\hat{p}}{q} = 5555 \text{ 次}(\text{平均寿命}),$$

$$T(0.99) = -\ln(0.99)/\hat{\mu} = 56 \text{ 次}(\text{可靠寿命}).$$

问题是到底 β 应等于多少，才算真正符合实际. 这个问题，目前尚无法解决.

参 考 文 献

[1] 节诗松、罗朝斌，无失效数据的可靠性分析数理统计与应用概率，4，4(1989).

[2] 张忠占、杨振海，无失效数据处理，数理统计与应用概率，4，4(1989).

Reliability Analysis of the Discrete Type of Zero-Failure Data

Wu Shaomin

(Department of Management Information Science)

Abstract In this paper, the author applies classical statistics and bayesian method to analyse the Reliability of zero-faulure data with discrete distribution; and creates a criterion for deciding whether the result of analysis tallies with the reality or not. The method can be freed from the confinement of scheme, and it can be suited to all the products showing a life of discrete type.

Key words discrete type, zero-failure data, reliability analysis