

极点配置系统的品质评估

王永初

(精密机械工程系)

摘要 极点配置是一种控制系统设计的重要方法. 系统品质取决于闭环控制系统的零极点位置(在 S 平面或 Z 平面上). 虽然这个方法可用于全状态反馈控制系统或部分状态反馈系统, 但至今很少讨论到零点对时间响应的影响的定量计算问题. 根据预期时间响应与极点位置的关系, 本文给出最优极点配置的选择与分部权系数的估计.

关键词 极点配置, 状态反馈, 系统品质

0 概述

零极点校正方法是控制系统设计的一种方法, 通常有开环校正与闭环校正两种方法. 开环校正基于单位反馈的闭环控制系统, 其开环系统的特性与闭环系统的特性有可对应应的关系, 人们可以依照闭环系统的设计特性(或称理想闭环系统特性), 预先推导出理想的开环系统特性, 实际系统的特性按零极点补偿方法进行校正, 最后修改成接近于理想的开环系统特性. 假设 $M_0(s)$ 为实际开环系统的特性, $M^*(s)$ 为理想开环系统的特性, 则从理论上计算, 校正函数 $\eta(s)$ 应为

$$\eta(s) = M^*(s)/M_0(s) \quad (1)$$

在微型机应用于工业生产过程以前, 利用模拟组件严格实现式(1)的校正函数是很困难的, 而在微型机大量应用的今天, 实现式(1)函数就比较容易, 但如果 $M_0(s)$ 为高阶有理函数, 且 $M^*(s)$ 的零极点均与 $M_0(s)$ 的零极点不一致, 则 $\eta(s)$ 的有理函数, 其分子与分母项式的阶次会比 $M_0(s)$ 高得多, 这样的系统实时控制有困难. 人们设计想了一种补偿计方法, 使 $M^*(s)$ 有部分

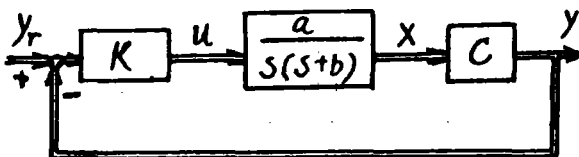


图1 典型二阶控制系统

本文 1992-09-03 收到.

的零极点与 $M_0(s)$ 的零极点相消, 使校正函数 $\eta(s)$ 简化. 这个问题又涉及高阶理想开环传递函数的闭环系统品质评价问题.

虽然, 差不多在控制理论发展的初期, 人们已经研究了低阶理想的开环传递函数, 理想的开环系统的 Bode 图与根轨迹, 尤其是二阶系统, 品质指标与开环传递函数的系数都有确定的对应关系, 例如图 1 所示的状态反馈控制系统, 其状态方程式和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} u = A x + B u, \quad (2a)$$

$$y = C x, \quad (2b)$$

控制方程为

$$u = K[y_r - y] \quad (3)$$

当 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 且 $K = [K_1 \ 0]$ 时, 图 1 演变为仅为状态 x_1 有观测输出与控制的方式, 即经典闭环控制方式, 不难得出其闭环传递函数为

$$W(s) = (k_1 a) / (s^2 + bs + K_1 a). \quad (4)$$

显然可取控制器参数

$$K_1 = \omega_n^2 / a \quad (5a)$$

或者

$$k_1 = b^2 / (4\xi^2 a). \quad (5b)$$

满足系统的无阻尼振荡系数 ξ 或振荡角频率 ω_n 的要求, 但仅可满足其中的一个控制系统品质指标 (ξ 或 ω_n).

当 $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 且 $K = [K_1 \ K_2]$, 图 1 变成两状态反馈控制系统. 其闭环系统状态方程式的系统矩阵

$$A_m = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ak_1 & -b - ak_2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

若取

$$k_1 = \omega_n^2 / a, \quad (7a)$$

$$k_2 = (2\xi\omega_n - b) / a, \quad (7b)$$

则系统的两个品质指标均可以同时得到满足. 这种状态反馈的实质是系统的极点匹配. 但是当系统状态变量多于两个时, 就很难按定量分析方法估计系统的品质. 因此研究极点配置有实际的工程应用意义.

1 零、极点对系统品质的影响

一个闭环控制系统, 其闭环传递函数 $W(s)$ 可以分解成一系列简单环节的和, 即

$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s), \quad (8)$$

其中 $W_i(s)$ 可规定为下面三种形式

$$W_{m1}(s) = r/(s + a), \tag{9a}$$

$$W_{m2}(s) = b/(s^2 + a_1s + a_0), \tag{9b}$$

$$W_{m3}(s) = [b_0(s + \quad)]/(s^2 + a_1s + a_0), \tag{9c}$$

由于

$$\mathcal{L}^{-1}\{W_{m1}(s)\} = re^{-at}, \tag{10a}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{W_{m2}(s)\} = (b_0/k)e^{-a} \sin kt, \tag{10b}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{W_{m3}(s)\} = b_0e^{-a} \cos kt, \tag{10c}$$

式中

$$\begin{cases} a = a_1/2, \\ k = \sqrt{a_0^2 - (a_1/2)^2} \end{cases} \tag{11}$$

决定一个系统稳定性的是极点的实数部分,影响系统的波动度是极点的虚数部分. 零点可以改变正弦或余弦响应曲线的移相角,例如式(9b)比式(9c)多了一个零点,因此波形移相 $\pi/2$ 弧度.

理论上,我们可能为特定系统制定一条理想的单位阶跃曲线,并将此曲线分解成若干简单的基本时间函数,再由此简单的时间函数拉普拉斯变换、合并,得到该系统的理想闭环传递函数 $M^*(s)$. 兹举一例说明,图 2 的曲线(a)为理想的单位阶跃响应曲线,可由直线(b),指数函数(c),与衰减余弦函数(d)拟合,即

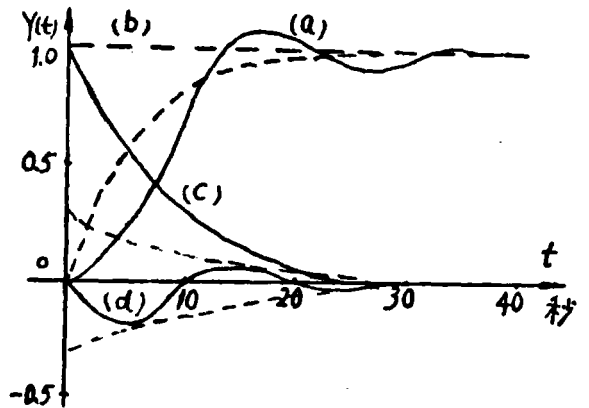


图 2 理想单位阶跃响应曲线

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W^*(s) \cdot \frac{1}{s}\} = 1 - e^{-\frac{t}{8}} + 0.3e^{-\frac{t}{23}} \cos \frac{\pi}{10}t, \tag{12}$$

故有

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{8}} + 0.3 \frac{(s + 0.087)}{(s^2 + 0.087s + 0.3172)} \\ &= \frac{s^3 + 0.362s^2 + 0.02176s + 0.03965}{(s + 0.125)(s^2 + 0.087s + 0.3172)} \cdot \frac{1}{s} \\ &= W^*(s) \cdot u(s), \end{aligned} \tag{13}$$

其中, $u(s)$ 为单位阶跃输入信号函数的拉普拉斯变换, $W^*(s)$ 为系统的理想闭环传递函数

$$\begin{aligned} W^*(s) &= \frac{s^3 + 0.362s^2 + 0.02176s + 0.03965}{(s + 0.125)(s^2 + 0.087s + 0.3172)} \\ &= \frac{(s + 0.4854)(s^2 - 0.1234s + 0.08169)}{(s + 0.125)(s^2 + 0.087s + 0.3172)}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$u(s) = 1/s. \tag{15}$$

通常采取零极点补偿与校正方法,满足 $W^*(s)$ 特性的要求.

在采用状态反馈的系统设计中,时间连续的状态方程式与输出方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (16)$$

可离散变换成时间离散的状态方程式与输出方程式

$$\begin{cases} x(k+1) = F X(k) + \Gamma u(k), \\ y(k) = H x(k), \end{cases} \quad (17)$$

其中 $F = e^{AT}$, $\Gamma = \int_0^T e^{A\tau} d\tau \cdot B$ 在线性反馈的情况下,有

$$u(k) = -K(k)X(k) = -[k_1(k), k_2(k_2) \cdots k_n(k)]x(k) \quad (18)$$

上式代入式(17)得 $X(k+1) = F X(k) - \Gamma K X(k)$. 则知闭环系统的特性方程式为

$$\det |ZI - F + \Gamma K| = 0, \quad (19)$$

并可分解成

$$p(z) = \det |ZI - F + \Gamma k| = (Z + \beta_1)(Z + \beta_2) \cdots (Z + \beta_n) = 0, \quad (20)$$

Z 可能是实数极点也可能是共轭复数极点,但它们是依照采样周期的量纲加以无因次化的数,例如 $Z_i = -\beta_i = a_i$, $a_i = 1$ 对应于等幅振荡; $a_i > 1$, 对应于发散振荡; $a_i < 1$, 对应于衰减振荡,且 a_i 越小,其信号分量的衰减度越大. 这里以原信号衰减至 0.5% 为例,给出不同 a_i 所对应的经历时间 t_p ($t_p = nT$, T 为采样周期),如表 1 所示

表 1 t_p 与 a_i 的一组关系数据

a_i	n	a_i	n	a_i	n
0.95	103	0.65	13	0.35	5
0.90	50	0.60	11	0.30	4.5
0.85	33	0.55	9	0.25	4.0
0.80	23	0.50	8	0.20	3.5
0.75	19	0.45	7	0.10	2.5
0.70	15	0.40	6		

复数极点可记为 $Z_{i1} = a_{i1}e^{j\theta_i}$, $Z_{i2} = a_{i1}e^{-j\theta_i}$, 这两个极点对应 z 变换为 $z/z - a_{i1}e^{j\theta_i}$ 与 $z/z - a_{i1}e^{-j\theta_i}$, 其复数极点对的 z 变换为

$$W_i(z) = \frac{z[z - a_i \cos \theta]}{z^2 - 2a_i(\cos \theta)z + a_i^2}, \quad (21)$$

式中 a_i 及 θ 与二阶振荡环节的振荡角频率 ω_n 及无阻尼振荡系数 ξ 有如下关系

$$\begin{cases} a_i = e^{-\xi \omega_n T}, \\ \theta = \omega_n T \sqrt{1 - \xi^2}, \end{cases} \quad (22)$$

极点决定系统的动态响应品质,而零点不仅影响系统响应的稳态值,而且对超调量也有重大影响. 例如式(21) $\cos \theta = \cos 45^\circ = 0.7071$, 零点分别取 0.90, 0.80, 0.70 与 0.6, 在 $\xi = 0.707$ 下, 其单位阶跃响应的稳态值如表 2 所示,表中 Z_0 表示零点, $X(\infty)$ 表示稳态值, $\Delta X(\infty)$ 为稳态偏差.

表 2 Z_0 对 $X(\infty)$ 的影响

Z_0	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
$X(\infty)$	0.122	0.294	0.517	0.769	1.00
$\Delta X(\infty)$	0.878	0.706	0.483	0.231	0

为了研究 Z_0 零点对超调量的影响,应使各种情况的 $X(\infty)$ 处在同一个可比的稳态值下,为此将式(21)改写成

$$\frac{X(z)}{u(z)} = K_I \frac{z^{-1}(1 - bz^{-1})}{(1 - az^{-1} + cz^{-2})}. \tag{23}$$

例如 $Z_0=0.7$,则 K_I 取 1.934. 在这种情况下,式(23)可写成

$$X(n) = 1.4X(n-1) - 0.98X(n-2) + 1.934u(n-1) - 1.3538u(n-2). \tag{24}$$

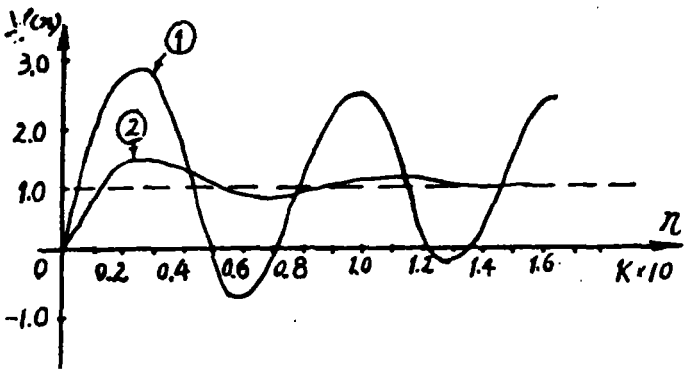
当 $u(n)$ 为 $t \geq 0$ 的单位阶跃信号时, $X(n)$ 的响应曲线如图 3 的曲线①所示. 如果取 $Z_0=0.50$,则 $K_I=1$,此时式(23)变成

$$X(n) = X(n-1) - 0.5X(n-2) + u(n-1) - 0.5u(n-2). \tag{25}$$

当 $u(n)$ 为 $t \geq 0$ 的单位阶跃信号时,其响应曲线如图 3 的曲线②所示,其中 $n=k \times 10, n$ 为采样序号. 显然零点 Z_0 不宜选择太大,一般在 0.2—0.6 之间选择. 具有零点的二阶振荡环节,其超调量 $\sigma\%$ 同 ξ 的关系已不是单值关系. 只有不具零点的二阶振荡 z 变换离散系统 ξ 同 $\sigma\%$ 才有确定关系,并可按下式估计

$$\begin{cases} \xi \approx 0.6(1 - \sigma/100), \\ \omega_n \approx 4.6/t_p, \end{cases} \tag{26}$$

图 3 不同 Z_0 值的响应曲线比较



式中 ω_n 及 ξ 分别表示无阻尼振荡角频率与无阻尼振荡系数, t_p 为输出变量跃变以后至稳态值 1%附近所经历的时间. 表 3 列出一组 σ 与 ξ, t_p 与 ω_n 的关系数据.

离散数字控制系统的采样周期选择,同样对系统的零极点配置会产生影响. 以往的采样周期选择,仅仅从信号处理过程的保真度考虑,这是不合适的.

由式(22)知道

$$T = \frac{\theta}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}, \tag{27}$$

θ 至 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 范围内,一般在 $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ 内取值.

表 3 $\sigma\%$ 与 ξ, t_p 与 ω_n 的一组关系数据

$\sigma\%$	ξ	t_p	ω_n
10	0.54	5s	0.92rad/s
15	0.51	10s	0.46rad/s
20	0.48	1min	4.6rad/min
25	0.45	5min	0.92rad/min
30	0.42	20min	0.23rad/min
35	0.39	30min	0.153rad/min
40	0.36		

2 状态反馈系统的零极点配置

状态反馈控制系统是属于现代控制理论范畴. 常见的系统设计方法,是设计反馈矩阵 K 以满足预定的二次型目标函数达最小值的条件. 近几年来,零极点配置的方法引起广泛兴趣,原因是这种方法简单、直观,而且控制效果容易估计.

状态方程式的闭环传递函数为

$$W(s) = B[SI - A + B K]^{-1}C, \tag{28}$$

其极点满足 $\det[SI - A + B K] = 0$. $W(s)$ 的零点满足 $\det[SI - A + B K] = \infty$. 当状态方程采用如下范型结构时

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u, \tag{29}$$

则有 $\det[SI - A + B K] = s^n + (K_n + a_{n-1})s^{n-1} + (K_{n-1} + a_{n-2})s^{n-2} + \cdots + (K_2 + a_1)s + (K_1 + a_0).$ (30)

式(30)同理想的闭环特征方程式相比较,就可以确定矩阵 $K=[K_1 K_2 \cdots K_n]$. 离散状态方程的闭环反馈增益矩阵的选择,如前面式(20)所示.

一个闭环系统,按 ITAE 法则选择,其理想特征方程式的系数如表 4 表示.

表 4 s^i 对应的系数

系统阶次	s^5	s^4	s^3	s^2	s^1	s^0
n	\hat{a}_5	\hat{a}_4	\hat{a}_3	\hat{a}_2	\hat{a}_1	\hat{a}_0
2				1.000	1.4140	1.000
3			1.000	1.750	2.150	1.000
4		1.000	2.100	3.400	2.700	1.000
5	1.000	2.086	4.999	5.499	3.399	1.000
6	1.000	3.250	6.596	8.592	7.441	3.945

因此,状态负反馈的理想闭环传递函数的特征方程式可记成

$$s^n + \hat{a}_{n-1}s^{n-1} + \hat{a}_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \hat{a}_1s + \hat{a}_0 = 0, \quad (31)$$

比较式(30)与式(31)的系数,可得

$$K_i = \hat{a}_{n-1} - a_{i-1}, \quad (32)$$

式中 \hat{a}_{i-1} 如表 4 所示,它与特征方程式的最高阶次及 s 的幂次数有关. 例如

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -2.1 & -4.3 & -6.2 & -5.5 & -1.25 \end{bmatrix},$$

则有

$$K = [0.5 \quad 1.845 \quad 3.141 \quad 2.392 \quad 1.096 \quad 1.000],$$

因此,按照极点校正方法,有可能得到一个 ITAE 为最小值的闭环状态反馈控制系统. 同样,也可以按分部极点与零点配置,即

$$\hat{W}(s) = \sum_{i=1}^k \hat{W}_i(s),$$

其中, $\hat{W}_i(s)$, $i=1, 2, \dots, k$, 一般可取 $i \leq 3$, 预先按理想的时间响应选择, 并采取状态反馈将闭环系统的极点校正为 $\hat{W}(s)$ 所选择的极点. 由于 $\hat{W}_i(s)$ 均可以估计其时间响应, 所以 $\hat{W}(s)$ 的时间响应也可以估计. 这样系统设计的品质指标就变及异常清晰.

3 小结

零极点配置的方法很多,其中最常用的方法是利用补偿器的部分零点与极点同对象的极点与零点相消. 这种方法简单,但不稳定的零点(或极点)需要由不稳定的极点(或零点)才能消除,这可导致补偿器实现的困难.

状态反馈极点配置同时可兼顾极点校正与最优调节两种功能. 尤其是当系统可观测时,引入状态观测器,可减少大量的检测器与传感器,利用观测的状态代替实际对象的状态,实现状态反馈控制,按理想极点配置实现某一种准则下的最优控制是完全可能的. 这种方法的进一步发展有两种趋势:(1)研究高阶系统的理想极点(本文仅给出 6 阶)配置,在计算技术高度发展的今天是完全可能的,并对不同对象的最优准则,如 $ISE = \int_0^\infty e(t)^2 dt$, $ITAE = \int_0^\infty |te(t)| dt$ 等等进行比较,即从优化之中选优,进一步提高系统的控制品质. 考虑到工业对象对控制的要求不是唯一的. 如 P-L 调节、浮压调节,其理想的过渡过程均不是最小的 ISE 值、ITAE 值等,而是一个平缓的渐稳曲线,这种曲线由若干分部传递函数的时间响应曲线来逼近,因此分部配置零极点的方法研究仍有实际的工程意义;(2)配合降阶观测器的研究,开展降阶状态反馈控制器的研究,其核心是优化控制,但最困难的仍然保证降阶控制系统的鲁棒性.

系统设计走向定时化是必然的趋势,各种系统质量评估的方法相信会引起人们更大的重视

参 考 文 献

- [1] Franklin, G. F. , Powell, J. D. , *Feedback Control of Dynamic system*, Addison-wesley, (1986).
- [2] Emami, N. A. , Zero Assignment in the Multivariable Robust Servomechanism, *proceeding of the IEEE conference on Decision and Control*, December, (1982), 219—226.
- [3] Richard, c. f, *Modern control system*, Addison-wesley, (1990).
- [4] Rosenberg, R. C. and karmopp, D. C. , *Introduction of physical system Design*, McGraw-Hill, (1987).
- [5] 黄家英, 自动控制原理(上、下册), 东南大学出版社, (1990).

Quality Evaluation of the Pole Placement System

Wang Yongchu

(Department of Precision Mechanical Engineering)

Abstract The pole Placement is an important method for designing a cintrol system. The system performance of a closed control system depends upon the location of zeros and poles on s and Z planes. This is a method applicable to all or partial state feedback system, however, so far there are very few papers discussing the quantitative computation as an effect of zeros and poles on time response. In the light of the relation between the expected time response and the location of poles, the author makes a selection of the optimal pole Placement and an estimate of the weight coefficient by parts.

Key words pole Placement, state feedback, system performance