第14卷 第2期 华侨大学学报自然科学版 Vol.14 №.2
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年4月 (NATURAL SCIENCE) Apr. 1993

电网络矩阵分析法的场论

陈燊年 王建成 陈强顺

(华侨大学) (同济大学)

摘要 本文用非图论的场论方法,推导电网络矩阵分析中七种方法的全部基本矩阵方程及其主要关系,从而给出电网络矩阵分析法的场论.

关键词 电网络,电网络矩阵分析法,场论

0 引言

电网络场论的矩阵分析较网络图论[1]的矩阵分析有二个显著不同特点:一是篇幅少,删去了完全关联矩阵、完全回路矩阵、完全割集矩阵等非关键内容,符合对网络分析由表及里,去粗取精的认识过程;二是在给出必需的各个基本矩阵及有关重要关系时,并不借助线图来定义,而是从场论定律出发,经过全部数学演译来建立一种完全的解析理论.此外,本文还第一次给出独立割集矩阵元素和独立回路矩阵元素可按行列式计算的理论公式.

1 积分形式的基尔霍夫定律

对一个 B 条支路和 N 个节点且包含互感的 RLC 网络,由场论中电荷守恒定律对所有 $N-1$ 个节点和能量守恒与转换定律.对所有 B 条支路写出的方程分别已知为[2]

$$\sum_{t=1}^{B}\int \dot{\vec{j}}_t \cdot d\,\vec{\sigma}_\mu = 0,(\mu = 1,2,\cdots,N-1), \tag{1}$$

$$\sum_{t=1}^{B}\dot{j}_t^*\left(\int \dot{\vec{K}}_t \cdot d\vec{l}_t - \int \hat{\rho}_t \cdot \dot{\vec{j}}_t d\vec{l}_t\right) - \sum_{g=1}^{B}\dot{j}_g^* \sum_{\substack{t=1\\ g\neq t}}^{B}\int \hat{\rho}_{gt}^{(M)} \cdot \dot{\vec{j}}_t\vec{l}_t = 0, \tag{2}$$

式中复合阻抗率为3种元件阻抗率之和

$$\hat{\rho}_t = \rho_t^{(R+r)} + \hat{\rho}_t^{(c)} + \hat{\rho}_t^{(L)}, \tag{3}$$

本文1991-08-29收到.

并有

$$\hat{\rho}_l^{(c)} = \frac{1}{i\omega\epsilon}\frac{\rho}{S_l},$$

$$_{ll'} = \frac{i\omega\mu\sigma'}{4\pi}\int\frac{\cos(\vec{j}_l,\vec{j}_{l'})}{h_{ll'}}dl'_l, \qquad \hat{\rho}^{(L)} \tag{5}$$

$$\hat{\rho}_{gl}^{(M)} = \frac{i\omega\mu\sigma'}{4\pi}\int\frac{\cos(\vec{j}_g,\vec{j}_l)}{h_{gl}}dlg, \tag{6}$$

如引入系数 $a_{\mu l}$，定义为

$$a_{\mu l} = \cos(\vec{j}_l, d\vec{\sigma}_{\mu l}), \tag{7}$$

取值±1 或零，则式(1)表示为

$$\sum_{l=1}^{B} a_{\mu l}\hat{j}_l = 0, (\mu = 1,2,\cdots,N-1), \tag{8}$$

倘若网络线图满足了 D 定理的条件[3]，由方程组(8)的系数组成的矩阵的秩等于 $N-1$，则在方程组(8)中就有 $N-1$ 个的非独立变量电流，把其余 $B-(N-1)$ 个的独立变量电流移到每个方程的右边得

$$\sum_{i=1}^{N-1} a_{\mu i}\hat{j}_i = \sum_{k'=N}^{B}(-a_{\mu k'})\hat{j}_{k'}, (\mu = 1,2,\cdots,N-1), \tag{9}$$

式中用不带撇和带撇的拉丁字母以示区别非独立变量和独立变量的序数. 引用克莱姆规则，求得方程组(9)的解为

$$\hat{j}_i = \sum_{k'=N}^{B} g_{ik'}\hat{j}_{k'}, (i = 1,2,\cdots,N-1), \tag{10}$$

式中

$$g_{ik'} = D_{ik'}/D. \tag{11}$$

D 为方程组(9)左边系数组成的 $N-1$ 阶行列式，$D_{ik'}$ 是把方程组(9)右边含 $\hat{j}_{k'}$ 的系数项 $-a_{\mu k'}$ 作为一列代替 D 中第 i 列得到的 $N-1$ 阶行列式. 行列式 D 和 $D_{ik'}$ 若不为零，必取值±1，与网络线图有关，分别由下述 D 定理和 $D_{ik'}$ 定理[4]来判明.

如称非独立变量电流和独立变量电流通过的支路分别为非独立电流支路 i 和独立电流支路 k'，则 D 定理说：

若 D 的线图同时满足下列三点，则行列式 D 不为零：(1) $N-1$ 条非独立电流支路不形成任一闭合回路；(2)在 $N-1$ 个节点中，每一个节点至少被一条非独立电流支路所连通；(3)不能分解成几个完全分离的独立部分.

$D_{ik'}$ 定理：若非独立电流支路 i 与若干条非独立电流支路连接后不与一条独立电流支路 k' 组成一个闭合回路，则行列式 $D_{ik'}=0$；若与一条独立电流支路 k' 组成了一个闭合回路，则行列式 $D_{ik'}\neq 0$.

根据支路分为非独立电流支路和独立电流支路的概念，现把式(2)中对 B 个支路的求和亦分为对此二类支路的求知，并用式(10)代入消去非独立电流变量，得

$$\sum_{k'=N}^{B}\hat{j}_{k'}^{*}\{(\sum_{i=1}^{N-1}g_{ik'}\int\vec{K}_i\cdot d\vec{l}_i + \int\vec{K}_{k'}\cdot d\vec{l}_{k'}) - (\sum_{i=1}^{N-1}g_{ik'}\int\hat{\rho}_i\,\vec{\hat{j}}_i\cdot d\vec{l}_i + \int\hat{\rho}_{k'}\,\vec{\hat{j}}_{k'}\cdot d\vec{l}_{k'})$$

$$-\sum_{e=1}^{B}(\sum_{\substack{i=1\\i\neq e}}^{N-1}g_{ik'}\int\hat{\rho}_{ie}^{(M)}\,\vec{\hat{j}}_e\cdot d\vec{l}_e + \int\hat{\rho}_{k'e}^{(M)}\vec{\hat{j}}_e\cdot d\vec{l}_e)\} = 0, \tag{12}$$

当满足D定理条件时，上式每一个$g_{ik'}$都等于$\pm D_{ik'}$. 又按$D_{ik'}$定理知，凡与支路k'组成一个闭合回路的支路i所对应的系数$D_{ik'}$不为零. 设不为零系数$D_{ik'}$的数目为m，则上式表示成

$$\sum_{k'=N}^{B}\hat{j}_{k'}^{*}\left(\oint_{l_{k'}}\dot{\vec{K}}\cdot d\vec{l}-\oint_{l_{k'}}\hat{\rho}\,\dot{\vec{j}}\cdot d\vec{l}-\sum_{t=1}^{m+k'}\sum_{\substack{e=1\\(e\neq t)}}^{B}\int_{l_t}\hat{\rho}_{te}^{(M)}\,\dot{\vec{j}}_e\cdot d\vec{l}_e\right)=0, \tag{13}$$

式中积分回路$l_{k'}$是由m条i非独立电流支路和一条k'独立电流支路所组成. 由于$k'=N,N+1,\cdots,B$，不同回路各有不同的k'支路，因而每一回路$l_{k'}$都是独立回路，而且独立回路数目等于$B-N+1$.

利用全回路欧姆定律的微分形式[5]，可以证明有下式成立.

$$\oint_{l_{k'}}\dot{\vec{K}}\cdot d\vec{l}=\oint_{l_{k'}}\hat{\rho}\,\dot{\vec{j}}\cdot d\vec{l}+\sum_{t=1}^{m+k'}\sum_{\substack{e=1\\(e\neq t)}}^{B}\int\hat{\rho}_{te}^{(M)}\,\dot{\vec{j}}_e\cdot d\vec{l}_e, \tag{14}$$

这正是多项式(13)中的每项系数. 按式(13)，$k'=N,N+1,\cdots,B$，故由以上二式得出

$$\oint_{l_{k'}}\dot{\vec{K}}\cdot d\vec{l}=\oint_{l_{k'}}\hat{\rho}\,\dot{\vec{j}}\cdot d\vec{l}+\sum_{t=1}^{m+k'}\sum_{\substack{e=1\\(e\neq t)}}^{B}\int\hat{\rho}_{te}^{(M)}\,\dot{\vec{j}}_e\cdot d\vec{l}_e,\ (k'=N,N+1,\cdots,B), \tag{15}$$

式(1)和式(15)代表电网络中积分形式的基尔霍夫两定律.

2　推导五个基本矩阵

五个基本矩阵是指关联矩阵、独立回路矩阵、复阻抗矩阵、独立割集矩阵和网孔矩阵，以下分别进行推导.

2.1　关联矩阵

在式(8)中凡有支路t或与节点μ关联，或没有关联. 因此，由式(7)定义的系数仍表明：(1)$a_{\mu t}=1$，表示支路t与节点μ关联，且电流方向离开节点；(2)$a_{\mu t}=-1$，表示支路t与节点μ关联，且电流方向趋于节点；(3)$a_{\mu t}=0$，表示支路t不与节点μ关联. 如以$a_{\mu t}$为元素组成一个阶数为$(N-1)\times B$的矩阵$\boldsymbol{A}$，它的行对应于独立节点，它的列对应于支路. 把式(8)表成矩阵形式

$$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{J}}=0, \tag{16}$$

式中$\boldsymbol{A}$就是关联矩阵，式(16)简称KCL方程.

2.2　独立回路矩阵和复阻抗矩阵

设独立回路$l_{k'}$由n个支路组成，其中每条t支路都包含一个电动势$\hat{\varepsilon}_{k't}$和与之串联的复阻抗$\hat{Z}_{k't}^{(R+r)}$、$\hat{Z}_{k't}^{(C)}$、$\hat{Z}_{k't}^{(L)}$. 令$n=m+k'$并利用式(3)，则由式(15)得

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n}\cos(\vec{K}_{k't},d\vec{l}_{tk'})\hat{\varepsilon}_{k't}&=\sum_{t=1}^{n}\cos(\vec{j}_{k't},dl_{k't})\hat{Z}_{k't}^{(R+r)}+\sum_{t=1}^{n}\cos(\vec{j}_{k't},d\vec{l}_{tk'})\hat{I}_{k't}\hat{Z}_{k't}^{(C)}\\&+\sum_{t=1}^{n}\cos(\vec{j}_{k't},d\vec{l}_{tk'})\hat{I}_{k't}\hat{Z}_{k't}^{(L)}+\sum_{t=1}^{n}\sum_{\substack{e=1\\(e\neq t)}}^{B}\cos(\vec{j}_e,d\vec{l}_e)\hat{I}_e\hat{Z}_{k'te}^{(M)},\end{aligned} \tag{17}$$

式中复阻抗与复阻抗率间的关系为

$$\hat{Z}_{k't}^{(R+r)}=\int\rho_{k't}^{(R+r)}\frac{dl_{k't}}{\sigma'}, \tag{18}$$

$$\hat{Z}_{k't}^{(C)} = \int \hat{\rho}_{k't}^{(C)} \frac{dl_{k't}}{\sigma'}, \tag{19}$$

$$\hat{Z}_{k't}^{(L)} = \int \hat{\rho}_{k't}^{(L)} \frac{dl_{k't}}{\sigma'}, \tag{20}$$

$$\hat{Z}_{k't}^{(M)} = \int \hat{\rho}_{k't}^{(M)} \frac{dl_{k't}}{\sigma'}, \tag{21}$$

用式(4)、(5)、(6)代入并利用各元件复阻抗与参量间的关系后，得到各元件参量的特性公式为

$$R_{k't} + r_{k't} = \int \rho_{k't}^{(R+r)} \frac{dl_{k't}}{\sigma'}, \tag{22}$$

$$C_{k't} = \frac{1}{\int \frac{dl_{k't}}{\varepsilon S_{k't}}}, \tag{23}$$

$$L_{k't} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\cos(\vec{j}_t, \vec{j}_{t'})}{h_{tt}} dl'_{k't} dl_{k't}, \tag{24}$$

$$M_{k'u} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\cos(\vec{j}_t, \vec{j}_e)}{h_{te}} dl_e dl_{k't}. \tag{25}$$

在式(17)各项中一共有 5 个方向余弦，其中前 4 个方向余弦因有如下关系

$$\cos(\vec{j}_{k't}, d\vec{l}_{k't}) = \pm \cos(\vec{K}_{k't}, d\vec{l}_{k't}), \tag{26}$$

可用左方的这个方向余弦来表示. 式中 $\vec{K}_{k't}$ 的方向表示独立回路 $l_{k'}$ 中第 t 支路上的电源极性方向；$d\vec{l}_{k't}$ 的方向是沿独立回路 $l_{k'}$ 绕行至其中第 t 段支路上的方向，称为独立回路 $l_{k'}$ 的方向.

可取式(17)中第 5 个方向余弦 $\cos(\vec{j}_e, d\vec{l}_e) = 1$，但在互感复阻抗 $\hat{Z}_{k'u}^{(M)}$ 中还包含有方向余. 根据式 $\hat{Z}_{k'u}^{(M)} = i\omega M_{k'u}$ 和式(25)有

$$\hat{Z}_{k'u}^{(M)} = \cos(\vec{j}_t, \vec{j}_e) |\hat{Z}_{k'u}^{(M)}|,$$

式中互感复阻抗 $\hat{Z}_{k'u}^{(M)}$ 的绝对值为

$$|\hat{Z}_{k'u}^{(M)}| = i\omega |M_{k'u}| = i\omega \frac{\mu}{4\pi} \iint \frac{dl_e dl_{k't}}{h_{te}},$$

而且

$$\cos(\vec{j}_t, \vec{j}_e) = \begin{cases} 1(\text{当 } \vec{j}_t \text{ 和 } \vec{j}_e \text{ 方向为同名端时}), \\ -1(\text{当 } \vec{j}_t \text{ 和 } \vec{j}_e \text{ 方向为异名端时}), \end{cases}$$

可见，它与前 4 个方向余弦也有如下关系

$$\cos(\vec{j}_{k't}, d\vec{l}_{k't}) = \pm \cos(\vec{j}_t, \vec{j}_e), \tag{27}$$

于是，式(17)所包含的 5 项可统一成一项

$$\sum_{t=1}^{B} \{\cos(\vec{j}_{k't}, d\vec{l}_{k't})(\hat{I}_{k't}\hat{Z}_{k't}^{(R+r)} \pm \hat{\varepsilon}_{k't} + \hat{I}_{k't}\hat{Z}_{k't}^{(C)} + \hat{I}_{k't}\hat{Z}_{k't}^{(L)}$$
$$\pm \sum_{\substack{e=1 \\ (e\neq t)}}^{B} \hat{I}_e |\hat{Z}_{k'u}^{(M)}|)\} = 0, (k' = N, N+1, \cdots, B), \tag{28}$$

上式中 $\hat{\varepsilon}_{k't}$ 前面的正负号，当 $\vec{K}_{k't}$ 平行于 $\vec{j}_{k't}$ 时取负号，当 $\vec{K}_{k't}$ 平行于 $\vec{j}_{k't}$ 时取正号. 最后一项的正负号，当 $\vec{j}_{k't}$ 反平行于 $d\vec{l}_{k't}$ 且与 $\vec{j}_e$ 方向为同名端时取正号. 当 $\vec{j}_{k't}$ 平行于 $d\vec{l}_{k't}$ 且与 $\vec{j}_e$ 方向为异名端时取负号.

在式(28)中，凡有 t 支路必在独立回路 $l_{k'}$ 之中，故式(27)左边的方向余弦用系数

$$b_{k't}=\cos(\vec{j}_{k't},d\vec{l}_{k't}),(k'=N,N+1,\cdots,B;t=1,2,\cdots,B)$$

表示后，仍表明：(1)$b_{k't}=1$，表示支路 t 属于独立回路 $l_{k'}$，且支路方向与独立回路方向相同；(2)$b_{k't}=-1$，表示支路 t 属于独立回路 $l_{k'}$，且支路方向与独立回路方向相反；(3)$b_{k't}=0$，表示支路 t 不属于独立回路 $l_{k'}$. 因此，将式(29)代入式(28)得

$$\sum_{t=1}^{B}b_{k't}\hat{V}_t=0,(k'=N,N+1,\cdots,B), \tag{30}$$

式中 $\hat{V}_t$ 表示 t 支路的复电压.

$$\hat{V}_t=\hat{Z}_t^{(RLC)}\hat{I}_t\pm\sum_{\substack{s=1\\(s\neq t)}}^{B}|\hat{Z}_{ts}^{(M)}|\hat{I}_s\pm\hat{\varepsilon}_t,(t=1,2,\cdots,B), \tag{31}$$

以上二式表示成矩阵形式简称 KVL 方程和 VCR 方程

$$B\hat{V}=0, \tag{32}$$

$$\hat{V}=\hat{B}\hat{I}\pm\hat{E}, \tag{33}$$

式中 $\hat{B}$ 就是独立回路矩阵，它的阶数为$(B-N+1)\times B$，它的行和列分别对应于独立回路和支路. 矩阵 $\hat{Z}$ 就是复阻抗矩阵，它是一个 B 阶对称方阵，对角线各元素是各支路的电阻、电容和自感的复合阻抗 $\hat{Z}^{(RLC)}$，而非对角线各元素是不同支路间的互感复阻抗 $\hat{Z}_{ts}^{(M)}$.

若 $\hat{Y}=\hat{Z}^{-1}$为复导纳矩阵，则式(33)有一另形式

$$\hat{I}=\hat{Y}\hat{V}\pm\hat{Y}\hat{E}. \tag{34}$$

2.3 独立割集矩阵

把式(10)移项

$$\hat{j}_i=\sum_{k'=N}^{B}g_{ik'}\hat{j}_{k'}=0,(i=1,2,\cdots,N-1),$$

为了把第一项表示成与第二项相同的形式，引入

$$g_{ik'}=\begin{cases}1,\text{当 } k'=i,\\0,\text{当 } k'\neq i,\end{cases}(i,k'=1,2,\cdots,N-1), \tag{35}$$

再合并两项成

$$\sum_{k'=1}^{B}q_{ik'}\hat{j}_{k'}=0,(i=1,2,\cdots,N-1), \tag{36}$$

表成矩阵形式

$$Q\hat{J}=0 \tag{37}$$

矩阵 Q 的元素是

$$q_{ik'}=-g_{ik'}=-\frac{D_{ik'}}{D},(i=1,2,\cdots,N-1;k'=N,N+1,\cdots,B), \tag{38}$$

$$q_{ik'}=\begin{cases}1,\text{当 } k'=i,\\0,\text{当 } k'\neq i,\end{cases}(i,k'=1,2,\cdots,N-1),$$

它就是$(N-1)\times B$ 阶独立割集矩阵. 证实如下：当 i 一定，而 $k'=1,2,\cdots,n$ 时，设有 n 个不为零的系数 $D_{i1},D_{i2},\cdots,D_{in}$，按 $D_{ik'}$ 定理每一个系数都代表有一条 k' 支路与 i 支路组成了一个闭合回路. 因而，$D_{i1},D_{i2},\cdots,D_{in}$ 全体则代表有不同的 n 个 k' 支路分别都与共同的一条 i 支路组成了不同的 n 个闭合回路.

按不为零 D 的线图，$N-1$ 条 i 支路是一个包含所有 N 个节点但并无闭合回路的连通子

图. 在此子图中若移去其中一条 i 支路，则此子图分割成独立的二段 T_1 和 T_2. 但在 T_1 和 T_2 之间还有由若干 k' 支路所连通的通径. 这些若干 k' 支路与被移去的 i 支路组成不同的回路，因而它们就是在不为零系数 $D_{ik'}$ 中，与一定 i 支路所对应的那些 $k'=1,2,\cdots,n$ 支路. 若再移去这全部的 n 条 k' 支路，则 T_1 和 T_2 之间不复存在任何连通的通径了，T_1 和 T_2 成了完全独立的两个部分. 当然，若在支路 i 和 $k'=1,2,\cdots,n$ 之中保留下来任一条支路，则网络仍然是连通的. 可见，上述由不为零系数 $D_{ik'}$ 所对应一定 i 和若干 k' 支路的集合就是网络分析中所定义的割集.

既然，一条非独立电流支路 i 对应一个割集，则割集数必等于 $N-1$，且在每一个割集中必包含一条在其它割集所没有出现的非独立电流支路，因此所有 $N-1$ 个割集都是独立割集.

因 $D=\pm 1$，故由式(38)表明：方程组(36)代表了网络中 $N-1$ 个独立割集，而每一个方程就代表一个独立割集. 这个独立割集的支路就是由该方程中不等零的 $q_{ik'}$ 所包含的某一条 i 支路和若干条 k' 支路的集合. 其中 i 是一条确定该独立割集的非独立电流支路，k' 是属于该独立割集的若干独立电流支路. 由于 $q_{ik'}$ 与 $D_{ik'}$ 间仅相差一个与方向有关的负号，如规定 i 支路上的电流方向为该独立割集 c_i 的方向，则系数 $q_{ik'}$ 仍表明：(1)$q_{ik'}=1$，表示支路 k' 属于独立割集 c_i 且它们方向一致；(2)$q_{ik'}=-1$，表示支路 k' 属于独立割集 c_i 且它们方向不一致；(3)$q_{ik'}=0$，表示支路 k' 不属于独立割集 c_i. 由此可见，式(37)中以 $q_{ik'}$ 为元素的矩阵 Q 就是独立割集矩阵，如用二个分块矩阵表示，则有

$$Q=[Q_{N-1,B-N+1}\ \vdots\ I_{N-1}] \tag{39}$$

式中下标表示阶数，I 代表单位矩阵.

2.4　网孔矩阵

把式(30)展开

$$(b_{k'1}\hat{V}'_1+b_{k'2}\hat{V}'_2+b_{k'N-1}\hat{V}'_{N-1})+(b_{k'N}\hat{V}'_N+b_{k'N+1}\hat{V}'_{N+1}+\cdots+b_{k'B}\hat{V}'_B)=0,$$
$$(k'=N,N+1,\cdots,B), \tag{40}$$

在第二个括弧中由 2.2 节，可知，当下标 k' 与 i 相等时，$b_{k'i}=1(i,k'=N,N+1,\cdots,B)$ 不相等时为零，故上式写成

$$\hat{V}'_{k'}=-\sum_{i=1}^{N-1}b_{ik'}\hat{V}'_i,(k'=N,N+1,\cdots,B), \tag{41}$$

式中加撇的 $\hat{V}'_i$ 表示作为独立变量的非独立电流支路电压. 如作下列代换：$\hat{j}\to\hat{V}$；$g\to(-b)$；$i=1,2,\cdots,N-1\to k'=N,N+1,\cdots,B$；$k'=N,N+1,\cdots,B\to i=1,2,\cdots,N-1$. 就可以由式(10)过渡成为式(41)，反之亦然. 称经类同于这种一般代换而得到的两者关系为对偶关系，上述就是独立割集与独立回路的对偶.

根据式(41)是式(10)的对偶方程，而式(10)是式(9)或式(8)独立节点方程组的解，由此推知，式(41)也应是一个与式(9)或式(8)对偶方程组的解. 这二个对偶方程组分别可由式(9)或式(8)经作上述对偶代换后得到如下

$$\sum_{k'=N}^{B}m_{\theta k'}\hat{V}_{k'}=\sum_{i=1}^{N-1}(-m_{\theta i})\hat{V}_i,(\theta=N,N+1,\cdots,B), \tag{42}$$

$$\sum_{k'=1}^{B}m_{\theta k'}\hat{V}_{k'}=0,(\theta=N,N+1,\cdots,B), \tag{43}$$

因为 $m_{tk'}$ 与 $a_{\mu t}$ 对偶，$m_{tk'}$ 必取值 ± 1 或零. 于是，就方程组(43)的一个方程而言，它是代表一个闭合回路中各支路电压代数和为零. 由方程组(43)的方程数目表明，这些闭合回路数目等于独立回路数目. 于是，可以断言，这些闭合回路是独立回路的一种可能特殊情况.

根据式(41)是式(43)的解，式(10)也是式(9)的解，推知闭合回路与独立回路间的特殊关系应与连接于独立节点的支路与独立割集间的特殊关系相类似. 已知与一个独立节点连接的支路集合是独立割集中支路数目最少的独立割集，因此，闭合回路也应是独立回路中支路数目最少的独立回路. 一个支路数目最少的独立回路即在此独立回路的内部区域不包含任一支路了. 由此可知，由式(43)示出的各闭合回路就是网络分析中所称的网孔.

因此，网孔与独立节点对偶，式(43)代表所有网孔中各支路电压代数和为零的方程组. 以 $m_{tk'}$ 为元素的矩阵 M 称为 $(B-N+1)\times B$ 阶的网孔矩阵，式(43)表为矩阵形式是

$$M\hat{V} = 0. \tag{44}$$

此外，由于式(41)是式(42)的解，因而还有个与式(38)对偶的关系

$$b_{ik'} = -\frac{F_{ik'}}{F}, \begin{pmatrix} i = 1,2,\cdots,N-1 \\ k' = N,N+1,\cdots,B \end{pmatrix}, \tag{45}$$

$$b_{ik'} = \begin{cases} 1, 当\ k' = i, \\ 0, 当\ k' \neq i, \end{cases} (i,k' = N,N+1,\cdots,B).$$

式中 F 是方程组(42)左边系数组成的 $(B-N+1)$ 阶行列式，而 $F_{ik'}$ 是把方程组(42)右边含 $\hat{V}_i$ 的系数项 $(-m_{ik})$ 作为一列代替 F 中第 k' 得到的 $(B-N+1)$ 阶行列式.

3 矩阵 Q 与 B 的关系

由式(12)和式(13)有

$$\oint_{lk'} \vec{K}\cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N-1} g_{ik'} \int \vec{K}_i \cdot d\vec{l}_i + \int \vec{K}_{k'} \cdot d\vec{l}_{k'}, \tag{46}$$

式中

$$g_{ik'} = \begin{cases} \pm 1, (i = 1,2,\cdots,m), \\ 0, (i = m+1, m+2,\cdots,N-1), \end{cases}$$

若引入系数

$$g_{tk'} = \begin{cases} g_{ik'}, (t = i, 但\ t \neq k'), \\ 1, (t = k', k' = N,N+1,\cdots,B), \end{cases}$$

则上式表示为

$$\oint_{lk'} \vec{K}\cdot d\vec{l} = \sum_{t=1}^{B} g_{tk'} \int \vec{K}_t \cdot d\vec{l}_t,$$

同理，式(15)表示为

$$\sum_{t=1}^{B} g_{tk'} \Big(\int \hat{\rho}_t \vec{j}_t \cdot d\vec{l}_t - \int \vec{K}_t \cdot d\vec{l}_t + \sum_{\substack{e=1 \\ (e\neq t)}}^{B} \int \hat{\rho}_{te}^{(M)} \vec{j}_e \cdot d\vec{l}_t \Big) = 0, (k' = N,N+1,\cdots,B),$$

根据式(31)，上式表示成

$$\sum_{t=1}^{B} g_{tk'} \hat{V}_t = 0, (k' = N,N+1,\cdots,B),$$

把上式与式(30)比较，

$$g_{tk'} = b_{k't}, \begin{pmatrix} k' = N, N+1, \cdots, B \\ t = 1, 2, \cdots, B \end{pmatrix}, \tag{47}$$

再以式(38)代入得

$$q_{tk'} = -b_{k't}, \begin{pmatrix} k' = N, N+1, \cdots, B \\ t = 1, 2, \cdots, B \end{pmatrix}, \tag{48}$$

此两元素组成的两矩阵的关系为

$$Q^T_{N-1,B-N+1} = -B_{B-N+1,N-1}. \tag{49}$$

上标 T 表示转置.

4　二个变换关系

4.1　电流变换关系

网孔或独立回路都必包含一条 k' 独立电流支路，可设想此支路电流 $\dot{j}_{k'}$ 各在网孔和独立回路内作不断地循环流动，如分别定义它们为网孔电流和独立回路电流，则式(10)右边的电流 $\dot{j}_{k'}$ 就代表网孔电流或独立回路电流.

如在式(10)中再令有一个系数

$$g_{ik'} = \begin{cases} 1, 当\ k' = i, \\ 0, 当\ k' \neq i, \end{cases} (i, k' = N, N+1, \cdots, B). \tag{50}$$

就可把式(10)左边电流改成支路电流，即

$$\dot{j}_t = \sum_{k'=N}^{B} g_{tk'} \dot{j}_{k'}, (t = 1, 2, \cdots B), \tag{51}$$

当右边展开只包含二项

$$\dot{j}_t = \dot{j}_{m_1} - \dot{j}_{m_2} \tag{52}$$

时，表明 t 支路为相邻两个网孔 m_1 和 m_2 的共有支路. 由此推知，$\dot{j}_{m_1}$ 和 $\dot{j}_{m_2}$ 代表网孔电流.

为此，引入网孔系数：(1) $P_{tk'}=1$，表示支路 t 属于网孔 $m_{k'}$ 且它们方向一致；(2) $P_{tk'}=-1$，表示支路 t 属于网孔 $m_{k'}$ 且它们方向相反；(3) $P_{tk'}=0$，表示支路 t 不属于网孔 $m_{k'}$. 代表网孔的拉丁字母对系数 $P_{tk'}$ 是位于第二下角标，对网孔矩阵元素 $m_{tk'}$ 是位于第一下角标上，因而它们有

$$P_{k't} = m_{k't} \begin{pmatrix} k' = N, N+1, \cdots, B \\ t = 1, 2, \cdots, B \end{pmatrix}, \tag{53}$$

于是，把式(52)表示成以 $P_{tk'}$ 为系数的线性方程组，并以上式代入表示成矩阵形式为

$$\hat{I} = M^T \hat{I}_m, \tag{54}$$

这就是能把支路电流变换成网孔电流的关系式.

当式(51)右边展开不止包含二项时，$\dot{j}_{k'}$ 代表是回路电流，把式(47)代入式(51)得

$$\dot{j}_i = \sum_{k'=N}^{B} b_{k'i} \dot{j}_{k'}, (i = 1, 2, \cdots N-1), \tag{55}$$

表示成矩阵形式

$$\hat{I} = B^T \hat{I}_l, \tag{56}$$

这就是能把支路电流变换成回路电流的关系式.

4.2 电压变换关系

独立节点数和独立割集数都等于式(43)右边的独立变量电压数.如定义 $N-1$ 个独立节点相对参考节点的电压为节点电压以及定义独立割集中所对应的非独立电流支路电压为割集电压,则式(41)右边的电压 $\hat{V}'_i$ 或且代表节点电压,或且代表割集电压.如在式(41)中再令有一个系数

$$b_{k'i} = \begin{cases} 1, 当\ k' = i, \\ 0, 当\ k' \neq i, \end{cases} (i, k' = 1, 2, \cdots, N-1). \tag{57}$$

就可把式(41)左边电流改成支路电流,即

$$\hat{V}_t = -\sum_{i=1}^{N-1} b_{ti} \hat{V}'_i, (t = 1, 2, \cdots, B), \tag{58}$$

当右边展开只包含二项

$$\hat{V}_t = \hat{v}_\mu - \hat{v}_\lambda \tag{59}$$

时,表明 t 支路两端的节点为相邻二个的独立节点 μ 和 λ.由此推知 $\hat{v}_\mu$ 和 $\hat{v}_\lambda$ 代表节点电压(它们用小写 v 来表示).为此,引入节点系数:(1)$C_{t\mu}=1$ 表示支路 t 离开节点 μ;(2)$C_{t\mu}=-1$ 表示支路 t 进入节点 μ;(3)$C_{t\mu}=0$ 表示支路 t 与节点 μ 无关联.代表节点的拉丁字母对系数 $C_{t\mu}$是位于第二下角标,对关联矩阵元素 $a_{\mu t}$是位于第一下角标上,因而它们有

$$C_{t\mu} = a_{\mu t}, \begin{pmatrix} t = 1, 2, \cdots, B \\ \mu = 1, 2, \cdots, N-1 \end{pmatrix}, \tag{60}$$

于是,把式(59)表示成以 $C_{t\mu}$为系数的线性方程组,并以上式代入表示成矩阵形式为

$$\hat{V} = A^T \hat{U}, \tag{61}$$

这就是能把支路电压变换成节点电压的关系式.

当式(58)右边展开不止包含二项时,$\hat{V}'_i$ 代表是割集电压,把式(48)代入式(58)得

$$\hat{V}_{k'} = -\sum_{i=1}^{N-1} g_{ik'} \hat{V}'_i, (k' = N, N+1, \cdots, B), \tag{62}$$

表示成矩阵形式

$$\hat{V} = Q^T \hat{V}', \tag{63}$$

这就是能把支路电压变换成割集电压的关系式.

5　七种分析方法的基本方程

七种方法指[1]:2B 法、支路电压法、支路电流法、节点电压法、网孔电流法、回路电流法及割集电压法.以上每种方法的三个基本矩阵方程 KCL、KVL 和 VCR 已经全部推导出来,它们分别为:式(16)、(32)、(33);式(16)、(32)、(34);式(16)、(32)、(33);式(16)、(61)、(34);式(54)、(44)、(33);式(56)、(32)(33);式(37)、(63)、(34).

可见,用场论方法可以完全推导网络矩阵分析中七种方法所必需的基本方程及其主要关系,使之对它们的来源有更深入本质的认识.此外,利用新的关系式(38)和(45)可分别把网孔

电流法与回路电流法结合起来，以及把节点电压法与割集电压法结合起来，详见文献〔4〕中举例说明.

参 考 文 献

〔1〕 钟佐华等，网络图论和矩阵分析法，人民邮政出版社，(1983).

〔2〕 陈荣年，电网络基本方程的场论，电子学报，2(1987).

〔3〕 陈荣年，用场论方法证明基尔霍夫定律独立方程的数目，华侨大学学报(自然科学版)，1(1985).

〔4〕 陈荣年等，网络现代场论，电子工业出版社，(1991).

〔5〕 陈荣年、陈洁，全回路欧姆定律的微分形式及对网络单回路应用，华侨大学学报(自然科学版)，3(1991).

Matrix Analysis of Electric Network in the Light of Field Theory

Chen Xinnan Wang Jiancheng Chen Qiangshun

(*Hua Qiao University*) (*Tongji University*)

Abstract For studying electric network by the light of field theory instead of graph theory, seven different methods in relation to the matrix analysis of electric network including all the basic matrix equations and their main relations are derived. The field theory for the matrix analysis of electric network is thus proposed.

Key words electric network, matrix analysis of electric network, field theory