第14卷 第2期 华侨大学学报自然科学版 Vol.14 №.2
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年4月 (NATURAL SCIENCE) Apr.1993

超图的 Turan 数*

王 志 雄

(管理信息科学系)

摘要 本文确定了一些超图(子集系)的 Turan 数及其上、下界,并给出一些数值计算结果.

关键词 超图,计数,界,集,系统

0 引言

设 p,m 和 n 是整数,且 $p \geqslant m > n \geqslant 3$,$T^{(n)}(p,K^{(n)}(m))$是满足

性质1 "对 p 元集 P 的任意 $T^{(n)}(p,K^{(n)}(m))$个 n 元子集组成的系统 S,恒存在 P 的至少一个 m 元子集 M,使 M 的所有 n 元子集均在系统 S 中"的最小正整数. P. Erdős 在文[1]中提出确定 $T^{(3)}(p,K^{(3)}(4))$的问题. 他认为这一问题似乎是很难的.

本文将确定 $T^{(n)}(p,K^{(n)}(m))$的界,给 $T^{(3)}(p,K^{(3)}(4))$的值以猜测,数值计算结果在相当大程度上支持这一猜测. 为方便起见,记 $T^{(n)}(p,K^{(n)}(m))$为 $T(p,m,n)$.

设 $G(p,m,n)$是满足

性质2 "在 p 元集 P 中,存在由 $G(p,m,n)$个 n 元子集组成的系统 X,使得集 P 的任一个 m 元子集 M,至少有一个 n 元子集在系统 X 中"的最小正整数.

依上述定义,对集合 P 的任意由 $G(p,m,n)-1$ 个 n 元子集组成的系统 X_0,集合 P 中存在 m 元子集 M,使 M 的所有 n 元子集不在系统 X_0 中.

记不在系统 X_0 中的一切 n 元子集组成的系统为 S_0,则集合 P 的任何由$\binom{p}{n}-G(p,m,n)+1$ 个 n 元子集组成的系统 S_0. 集合 P 中恒存在 m 元子集 M,使 M 的所有 n 元子集均不在 X_0 中,故均在 S_0 中,故得

$$T(p,m,n) \leqslant \binom{p}{n} - G(p,m,n) + 1. \tag{1}$$

本文 1992-03-02 收到.

* 福建省自然科学基金资助课题. 部分结果提交 1990 年合肥国际组合数学学术会议,摘要收入会议论文集.

另一方面，存在由$\binom{p}{n}-G(p,m,n)$个 n 元子集组成的系统 S_0，使集合 P 的任何 m 元子集 M，至少有一个 n 元子集在系统 X_0 中，故不在 S_0 中，从而

$$T(p,m,n)>\binom{p}{n}-G(p,m,n). \tag{2}$$

结合式(1)和(2)得

定理1 $T(p,m,n)+G(p,m,n)=\binom{p}{n}+1$.

我们分别用 $\overline{G}(p,m,n)$和 $\underline{G}(p,m,n)$表示 $G(p,m,n)$的上、下界.

1 关于上界 $\overline{G}(p,m,n)$

设 $P=\{1,2,\cdots p\}$，$t=[(m-1)/(n-2)]\geqslant 1$，系统 S 如下构造

$$\{a_1,\cdots,a_{n-1},a_n\}\in S\Leftrightarrow a_1\equiv\cdots\equiv a_{n-1}\equiv a_n(\mathrm{mod}\,t),$$
$$\text{或}\quad a_1\equiv\cdots\equiv a_{n-1}\equiv a_n-1(\mathrm{mod}\,t). \tag{3}$$

引理2 集合 P 的任一个 m 元子集 $M=\{b_1,\cdots,b_m\}$必至少有一个 n 元子集在系统 S 中.

证 设 $b_1,\cdots,b_m$ 中与 $i(0\leqslant i\leqslant t-1)$关于模 t 同余的元素个数是 δ_i，则

$$\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_{t-1}=m. \tag{4}$$

情况1 存在某个 i，使 $\delta_i\geqslant n$，则 $b_1,\cdots,b_m$ 中有 $\delta_i\geqslant n$ 个元素与 i 同余，取其中 n 个元素形成 n 元子集，依式(3)，这子集在系统 S 中.

情况2 所有的 $\delta_i\leqslant n-1(0\leqslant i\leqslant t-1)$. 诸 δ_i 的最大值记为 δ，由式(4)得

$$m=\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_{t-1}\leqslant t\delta=\left[\frac{m-1}{n-2}\right]\delta<\frac{m}{n-2}\delta,$$

故 $\delta>n-2$，即至少有一个 $\delta_i=n-1$. 设

$$\delta_{K_1}=\cdots=\delta_{K_j}=n-1,0\leqslant K_1<\cdots<K_j\leqslant t-1.$$

若 $\delta_{K_1+1},\cdots,\delta_{K_j+1}$(当 $k_j=t-1$ 时，约定 $k_j+1=0$)均为 0，则

$$\begin{aligned}m&=\delta_0+\cdots+\delta_{t-1}\leqslant j(n-1)+(t-2j)(n-2)\\&=(n-2)t-j(n-3)\leqslant(n-2)t\leqslant m-1,\end{aligned}$$

矛盾，故 $\delta_{K_1+1},\cdots,\delta_{K_j+1}$中至少有一个非 0，即 $b_1,\cdots,b_m$ 中有 $n-1$ 个元素同余于某 i，且至少有一个同余于 $i+1$，这 n 个数形成的 n 元子集，由式(3)，在系统 S 中. 证毕.

引理3 设 $p=tq+r(0\leqslant r\leqslant t-1)$，则系统 S 中含有

$$\overline{G}(p,m,n)=\begin{cases}t\left[\binom{q}{n}+q\binom{q}{n-1}\right]+r\left[(q+1)\binom{q+1}{n-1}-(q-1)\binom{q}{n-1}\right]-\binom{q}{n-2},r\neq 0\\t\left[\binom{q}{n}+q\binom{q}{n-1}\right],r=0\end{cases}$$

个 n 元子集.

证 直接计数立得.

由引理 3 和 4 得

定理 4 引理 4 中给出的 $\overline{G}(p,m,n)$ 为 $G(p,m,n)$ 之一上界.

定理 5 $\sup\lim\limits_{p\to+\infty} G(p,m,n)/\binom{p}{n}\leqslant(n+1)/[(m-1)/(n-2)]^{n-1}$.

证 因 $p=tq+r(0\leqslant r\leqslant t-1)$,故当 $p\to+\infty$ 时,$q\to+\infty$,且

$$\binom{p}{n}\sim p^n/n!,\binom{q}{n}\sim q^n/n!\sim p^n/t^n\cdot n!,$$

$$q\binom{q}{n-1}\sim(q+1)\binom{q+1}{n-1}\sim(q-1)\binom{q}{n-1}\sim p^n/t^n(n-1)!,$$

$$\binom{q}{n-2}\sim p^{n-2}/t^{n-2}(n-2)!,$$

从而

$$\begin{aligned}&\sup\lim_{p\to+\infty} G(p,m,n)/\binom{p}{n}\\ \leqslant&\lim_{p\to+\infty}\overline{G}(p,m,n)/\binom{p}{n}\\ \leqslant&(n+1)/t^{n-1}\\ \leqslant&(n+1)/[(m-1)/(n-2)]^{n-1}.\end{aligned}$$

推论 6

$$T(p,4,3)\geqslant\begin{cases}(5p^3-9p^2+54)/54, & \text{当 } p\equiv 0(\mathrm{mod}3)\text{ 时},\\ (5p^3-9p^2-6p+64)/54, & \text{当 } p\equiv 1(\mathrm{mod}3)\text{ 时},\\ (5p^3-9p^2-6p+62)/54, & \text{当 } p\equiv 2(\mathrm{mod}3)\text{ 时},\end{cases}$$

证 由定理 1 和 4 立得.

对 Erdös 提出的问题,我们有

猜测 7 推论 6 中给出 $T(p,4,3)$ 的下界实际上是 $T(p,4,3)$ 的精确值.

猜测 7 当 $p\leqslant 9$ 正确的(见后面的定理 9).

2 关于下界 $\underline{G}(p,m,n)$

若 p 元集 P 的任一个由 $\underline{G}(p,m,n)-1$ 个 n 元子集组成的系统 X,使集合 P 恒存在 m 元子集 M,M 之任何 n 元子集不在系统 X 中.

对 $(p+1)$ 元集 P' 的由 x 个 n 元子集组成的系统 X',$(p+1)$ 个元素出现在系统子集中的次数之和为 nx,故至少有一个元素(不妨设是元素 $p+1$)出现的次数 $\geqslant\{nx/(p+1)\}$($\{u\}$ 为不小于 u 的最小整数).当

$$x-\{nx/(p+1)\}\leqslant\underline{G}(p,m,n)-1 \tag{5}$$

时,系统 X' 中有子系统 X,由 $\leqslant\underline{G}(p,m,n)-1$ 个子集组成,子集元素仅取 P' 的某 p 个值 $1,\cdots,p$,故有 m 元子集 M,其任何 n 元子集不在系统 X 中.但是,依构造,X' 之其它子集均含元素 $p+1$,故也异于 M 之任何 n 元子集.从而,在式(5)成立的前提下

$$\underline{G}(p+1,m,n) \geqslant x+1.$$

注意到正整数集上的函数 $f(x)=x-\{nx/(p+1)\}$ 只取整数值，且满足性质

$$f(x+1)-f(x)=0 \text{ 或 } 1.$$

故存在使

$$x-\{nx/(p+1)\}=\underline{G}(p,m,n)-1 \tag{6}$$

的最大整数 x. 由式(6)，有实数 $r(0\leqslant r\leqslant p/(p+1))$ 使

$$x-\left(\frac{nx}{p+1}+r\right)=\underline{G}(p,m,n)-1,$$

即

$$x=\frac{(p+1)\underline{G}(p,m,n)}{p-n+1}-\frac{(1-r)(p+1)}{p-n+1}.$$

由 x 之整数性及其最大性，$(1-r)(p+1)/(p-n+1)>0$，故 x 是小于 $(p+1)\underline{G}(p,m,n)/(p-n+1)$ 的最大整数，即

$$x=\left[\frac{(p+1)\underline{G}(p,m,n)}{p-n+1}-\frac{1}{p-n+1}\right],$$

故

$$x+1=\left[\frac{(p+1)\underline{G}(p,m,n)+p-n}{p-n+1}\right].$$

综上所述，得

定理 8 若 $G(p,m,n)\geqslant\underline{G}(p,m,n)$，

$$\underline{G}(p+1,m,n)\geqslant\left[\frac{(p+1)\underline{G}(p,m,n)+p-n}{p-n+1}\right],$$

则 $G(p+1,m,n)\geqslant\underline{G}(p+1,m,n)$.

3 数值计算结果

定理 9 关于 $G(p,4,3)$ 及其上、下界如表 1.

表 1 $G(p,4,3)$ 及其界

p	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\overline{G}(p,4,3)$	1	3	6	12	20	30	45	63	84
$G(p,4,3)$	1	3	6	12	20	30	?	?	?
$\underline{G}(p,4,3)$	1	3	6	12	20	30	44	61	82

证 利用定理 4，得 $\overline{G}(p,4,3)$ 的值.

显然，$G(4,4,3)=1$，利用定理 8，得 $\underline{G}(5,4,3)=3$，$\underline{G}(6,4,3)=6$ 及 $\underline{G}(7,4,3)=11$. 故 $11\leqslant G(7,4,3)\leqslant 12$. 由后面的引理 10，得 $\underline{G}(7,4,3)=12$. 再利用定理 8，得 $\underline{G}(8,4,3)=20$，$\underline{G}(9,$

$4,3)=30$，$\underline{G}(10,4,3)=43$. 利用类似引理 10 的方法可证 $\underline{G}(10,4,3)\geqslant 44$，由此得 $\underline{G}(11,4,3)=61$，$\underline{G}(12,4,3)=82$.

引理 10　$G(7,4,3)=12$.

证　否则，即 $G(7,4,3)=11$. 考虑 7 元集 P 的由 11 个三元组组成的系统 X，设在系统 X 中，出现 i 次的元素个数为 δ_i，则

$$\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_t=7,(\delta_t\geqslant 1),$$

$$0\delta_0+1\delta_1+\cdots+t\delta_t=33. \tag{7}$$

$t\leqslant 5$. 否则，若 $t\geqslant 6$，删去出现 t 次的某元素所在三元组得子系统 X'，它只含 $\leqslant 5$ 个三元组，由 $G(6,4,3)=6$，存在 P 之 4 元子集 M，其所有三元组不在系统 X 中，矛盾.

由 $t\leqslant 5$ 及式(7)得

$$\delta_4+2\delta_3+\cdots+5\delta_0=5(\delta_5+\delta_4+\cdots+\delta_0)$$

$$-(5\delta_5+4\delta_4+\cdots+0\delta_0)=2，故\ \delta_3=1,\delta_5=6\ 或\ \delta_4=2,\delta_5=5.$$

当 $\delta_3=1,\delta_5=6$ 时，6 个出现 5 次的元素设为 $1,2,\cdots,6$，而 7 出现 3 次.

系统 X 中，i 和 $j(1\leqslant i<j\leqslant 6)$ 同时出现之三元组数目 $\geqslant 2$. 否则，至少出现 i,j 之一的三元组数目 $\geqslant 5+5-1=9$. 删去至少含 i,j 之一的三元组，得子系统至多含 $11-9=2$ 个三元组. 但 $G(5,4,3)=3$，故存在 P 之四元子集，其任何三元组不在系统 X 中.

因 i 和 $j(1\leqslant i<j\leqslant 6)$ 同时出现之三元组数目 $\geqslant 2$，故系统 X 中，这种元素对总数 $\geqslant 2\binom{6}{2}=30$.

因 7 出现 3 次，故 7 与其它 6 个元素恰构成 6 个元素对. 从而，系统 X 中有 $\geqslant 30+6=36$ 个元素对，另一方面，由 11 个三元组组成的系统恰有 $11\binom{3}{2}=33$ 个元素对. 矛盾.

当 $\delta_4=2,\delta_5=5$，同样可得矛盾. 证毕.

利用类似方法，可得

定理 11　关于 $G(p,5,3)$ 及其上、下界如表 2.

表 2　$G(p,5,3)$ 及其界

p	5	6	7	8	9	10
$\overline{G}(p,5,3)$	1	2	5	8	14	22
$G(p,5,3)$	1	2	5	8	?	?
$\underline{G}(p,5,3)$	1	2	5	8	12	18

参　考　文　献

〔1〕 Erdős, P., *Discrete Mathematics*, 72(1988), 81－92.

〔2〕 Simonovits, M., *Selected Topics in Graph Theory*, *Academic Press*, *London*, (1983), 160－200.

Turan's Numbers of Hypergraphs

Wang Zhixiong

(Department of Management Information Science)

Abstract In this paper, the author defines Turan's numbers as well as upper and lower bounds of some hypergraphs (system of subsets); and gives some results of numerical evaluation.

Key words hypergraphs, counting, bound, sets, systems