第14卷 第2期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 14 №. 2
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年4月 (NATURAL SCIENCE) Apr. 1993

两类含参数高精度恒稳的半显式差分格式*

曾 文 平

(管理信息科学系)

摘要 本文建立了解色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的两类含参数的三层的半显式差分格式. 它们的局部截断误差的阶均为 $0(\tau^2+h^4+(\tau/h)^2+\tau h)$ 或 $0(\tau^2+h^4+(\tau/h)^2)$. 用判别稳定性的 Von Neumann 准则可以证明:当适当选取参数($\alpha\leqslant 1$)时,这些格式都是无条件稳定的,并且当必须的边界条件给定时它们可以显式地进行计算. 在特殊情况下,离散误差的阶为 $0(\tau^2+h^6)$,但稳定性限制非常苛刻.

关键词 色散方程,高精度,绝对稳定,半显式差分格式

0 引言

迄今已有很多文章[1-6]讨论色散方程 $u_t=au_{xxx}$(a 为常数,可正可负)的差分解法. 但是,显式格式的稳定性条件较苛刻;而隐式格式虽然绝对稳定且可能具有高精度,但每前进一步必须解一个线性方程组,计算量较大.

针对显式格式与隐式格式存在的问题,文[7]首先提出一类三层绝对稳定的半显式格式,随后又有很多文章[8-11]提出各种类型的半显式格式,但大部分离散误差阶数只有 $0(\tau+h^2+(\tau^2/h^3))$. 本文建立两类含参数的三层的半显式差分格式,它们的截断误差阶数高达 $0(\tau^2+h^2+(\tau/h)^2+\tau h)$ 或 $0(\tau^2+h^2+(\tau/h)^2)$. 当适当地选取参数 $\alpha\leqslant 1$ 时它们都是绝对稳定的,且当所须的边界条件给定时,这两类差分格式都可以显式地进行计算.

文[7—9]中的半显格式都可以看作本文格式的特例. 当 $\alpha=0$ 时,本文格式(I)为文[7]中半显格式(2.7)及(2.11);当 $\alpha=1$ 时,格式(I)为文[8]中的半显格式(8)及(10);而当 $\alpha=0$ 时,格式(Ⅰ)成为文[9]中的半显格式(1.6)及(1.7).

为了研究差分格式的稳定性,需要如下的 Miller 准则[12]. 当 $|A|=|C|$ 时,复系数二次方程

本文 1991-11-02 收到.

* 国家教委留学生基金资助课题.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0 \qquad (A\neq 0), \tag{1}$$

具有模为1的不等复根，其充要条件为 $\bar{A}B\equiv\bar{B}C$，且 $|B|<2|A|$.

1 差分格式的构造

设 h 和 τ 分别表示空间方向和时间方向的步长，$h=1/N$. 网域由求解区域上的点集 (x_m, t_n) 所构成，其中 $x_m=mh, t_n=n\tau(m=0,1,\cdots,N;n=0,1,\cdots)$. 在结点 (x_m,t_n) 处，分别用 u_m^n 和 V_m^n 表示微分方程和差分格式的解.

在 $(x_{m+1/2},t_n)$ 处进行 Taylor 展开得

$$\begin{aligned}(u_{xxx})_{m+1/2}^n=&\frac{1}{h^3}(u_{m+2}^n-3u_{m+1}^n+3u_m^n-u_{m-1}^n)\\&-\frac{h^2}{8}(u_{xxxxx})_{m+1/2}^n-\frac{13}{1920}h^4(u_{xxxxxxx})_{m+1/2}^n+0(h^6),\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}u_{m+1}^n=&\frac{u_{m+1}^{n+1}+u_{m+1}^{n-1}}{2}-\frac{\tau^2}{2}(u_{tt})_{m+1/2}^n-\frac{\tau^2h}{4}(u_{ttx})_{m+1/2}^n\\&-\frac{1}{4}(\frac{h}{2})^2\tau^2(u_{ttxx})_{m+1/2}^n+0(\tau^2h^3),\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}u_m^n=&\frac{u_m^{n+1}+u_m^{n-1}}{2}-\frac{\tau^2}{2}(u_{tt})_{m+1/2}^n+\frac{\tau^2h}{4}(u_{ttx})_{m+1/2}^n\\&-\frac{1}{4}(\frac{h}{2})^2\tau^2(u_{ttxx})_{m+1/2}^n+0(\tau^2h^3),\end{aligned} \tag{4}$$

引入待定参数 α，利用式(3)及式(4)改写

$$\begin{aligned}3u_{m+1}^n=&\alpha u_{m+1}^n+(3-\alpha)u_{m+1}^n\\=&\alpha u_{m+1}^n+\frac{3-\alpha}{2}(u_{m+1}^{n+1}+u_{m+1}^{n-1})-\frac{3-\alpha}{2}\tau^2(u_{tt})_{m+1/2}^n\\&-\frac{3-\alpha}{4}\tau^2h(u_{ttx})_{m+1/2}^n-\frac{3-\alpha}{4}\tau^2(\frac{h}{2})^2(u_{ttxx})_{m+1/2}^n+0(\tau^2h^3),\end{aligned} \tag{5}$$

及

$$\begin{aligned}3u_m^n=&\alpha u_m^n+(3-\alpha)u_m^n\\=&\alpha u_m^n+\frac{3-\alpha}{2}(u_m^{n+1}+u_m^{n-1})-\frac{3-\alpha}{2}\tau^2(u_{tt})_{m+1/2}^n\\&+\frac{3-\alpha}{4}\tau^2h(u_{ttx})_{m+1/2}^n-\frac{3-\alpha}{4}(\frac{h}{2})^2\tau^2(u_{ttxx})_{m+1/2}^n+0(\tau^2h^3),\end{aligned} \tag{6}$$

将式(5)、(6)代入式(2)得

$$\begin{aligned}(u_{xxx})_{m+1/2}^n=&\frac{1}{h^3}[u_{m+2}^n-\alpha u_{m+1}^n-\frac{3-\alpha}{2}(u_{m+1}^{n+1}+u_{m+1}^{n-1})\\&+\alpha u_m^n+\frac{3-\alpha}{2}(u_m^{n+1}+u_m^{n-1})-u_{m-1}^n)+\frac{3-\alpha}{2}(\frac{\tau}{h})^2(u_{ttx})_{m+1/2}^n\\&-\frac{h^2}{8}(u_{x^5})_{m+1/2}^n-\frac{13}{1920}h^4(u_{x^7})_{m+1/2}^n+0(\tau^2+h^6).\end{aligned} \tag{7}$$

对于 $(u_t)_{m+1/2}^n$ 可以有两种不合的代替办法. 其中 1° 为

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

$$(u_t)^n_{m+1/2}=\frac{1}{2}[(u_t)^n_{m+1}+(u_t)^n_m]-\frac{h^2}{8}(u_{txx})^n_{m+1/2}$$

$$-\frac{h^4}{384}(u_{tx^4})^n_{m+1/2}+0(h^6),\tag{8}$$

然后如果用

$$(u_t)^n_{m+1}=\frac{u^{n+1}_{m+1}+u^n_{m+1}}{\tau}-\frac{\tau}{2}(u_{tt})^n_{m+1}+0(\tau^2)\tag{9}$$

及

$$(u_t)^n_m=\frac{u^n_m-u^{n-1}_m}{\tau}+\frac{\tau}{2}(u_{tt})^n_m+0(\tau^2)\tag{10}$$

代入式(8)得

$$(u_t)^n_{m+1/2}=\frac{1}{2\tau}(u^{n+1}_{m+1}-u^n_{m+1}+u^n_m-u^{n-1}_m)-\frac{h^2}{8}(u_{txx})^n_{m+1/2}$$

$$-\frac{h^4}{384}(u_{tx^4})^n_{m+1/2}-\frac{\tau h}{4}(u_{ttx})^n_{m+1/2}+0(\tau^2+\tau h^2),\tag{11}$$

设色散方程 $u_t=au_{xxx}$的解充分光滑，使得下列关系式成立

$$u_{t^q x^p}=a^q u_{x^{3q+p}},(p,q=0,1,2,\cdots),\tag{12}$$

则利用式(12)，并将式(7)及式(11)代入方程$(u_t)^n_{m+1/2}=a(u_{xxx})^n_{m+1/2}$可得

$$\frac{1}{2\tau}[u^{n+1}_{m+1}-u^n_{m+1}+u^n_m-u^{n-1}_m]$$

$$=\frac{a}{h^3}[u^n_{m+2}-\alpha u^n_{m+1}-\frac{3-\alpha}{2}(u^{n+1}_{m+1}+u^{n-1}_{m+1})+\alpha u^n_m$$

$$+\frac{3-\alpha}{2}(u^{n+1}_m+u^{n-1}_m)-u^n_{m-1}]+R^n_{m+1/2},\tag{13}$$

其中截断误差(令 $R=a\tau/h^3$)

$$R^n_{m+1/2}=(\frac{1}{384}-\frac{13}{1920}h^4(u_{tx^4})^n_{m+1/2}+\frac{3-\alpha}{2}(\frac{\tau}{h})^2a^2(u_{tx^4})^n_{m+1/2}$$

$$+\frac{\tau h}{4}a(u_{tx^4})^n_{m+1/2}+0(\tau^2+h^6+\tau h^3)\tag{14}$$

$$=h^4(\frac{-1}{240}+\frac{3-\alpha}{2}R^2+\frac{1}{4}R)(u_{tx^4})+0(\tau^2+h^6+\tau h^3)$$

$$=\begin{cases}0(\tau^2+h^4+(\tau/h)^2+\tau h),R\neq(-15+\sqrt{315-30\alpha})/60(3-\alpha),\\0(\tau^2+h^6+\tau h^3),R=(-15+\sqrt{315-30\alpha}/60(3-\alpha)\end{cases},\tag{14'}$$

如特取 $\alpha=0$，则 $R=(-15+\sqrt{315})/180=0.01527$；取 $\alpha=1$，则 $R=(-15+\sqrt{285})/120=0.01568$.

由式(13)舍去截断误差，使得本文的第Ⅰ类差分格式的第一个格式($a>0$)

$$\frac{1}{2\tau}[V^{n+1}_{m+1}-V^n_{m+1}+V^n_m-V^{n-1}_m]$$

$$=\frac{a}{h^3}[V^n_{m+2}-\alpha V^n_{m+1}-\frac{3-\alpha}{2}(V^{n+1}_{m+1}+V^{n-1}_{m+1})+\alpha V^n_m+$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

$$+\frac{3-\alpha}{2}(V_m^{n+1}+V_m^{n-1})-V_{m-1}^n],(\alpha>0), \tag{15}$$

如果将式(9)、(10)换成

$$(u_t)_{m+1}^n=\frac{1}{\tau}(u_{m+1}^n-u_{m+1}^{n-1})+\frac{\tau}{2}(u_{tt})_{m+1}^n+0(\tau^2) \tag{16}$$

及

$$(u_t)_m^n=\frac{1}{\tau}(u_m^{n+1}-u_m^n)-\frac{\tau}{2}(u_{tt})_m^n+0(\tau^2), \tag{17}$$

代入式(8)得

$$(u_t)_{m+1/2}^n=\frac{1}{2\tau}(u_{m+1}^n-u_{m+1}^{n-1}+u_m^{n+1}-u_m^n)-\frac{h^2}{8}(u_{txx})_{m+1/2}^n$$

$$-\frac{h^4}{384}(u_{tx^4})_{m+1/2}^n+\frac{\tau h}{4}(u_{ttx})_{m+1/2}^n+0(\tau^2+\tau h^3), \tag{18}$$

再利用式(12),并将式(7)及式(18)代入方程$(u_t)_{m+1/2}^n=a(u_{xxx})_{m+1/2}^n$可得

$$\frac{1}{2\tau}[u_{m+1}^n-u_{m+1}^{n-1}+u_m^{n+1}-u_m^n]$$

$$=\frac{a}{h^3}[u_{m+2}^n-\alpha u_{m+1}^n-\frac{3-\alpha}{2}(u_{m+1}^{n+1}+u_{m+1}^{n-1})+\alpha u_m^n$$

$$+\frac{3-\alpha}{2}(u_m^{n+1}+u_m^{n-1})-u_{m-1}^n]+Q_{m+1/2}^n, \tag{19}$$

其中截断误差

$$Q_{m+1/2}^n=(\frac{1}{384}-\frac{13}{1920}h^4(u_{tx^4})_{m+1/2}^n+\frac{3-\alpha}{2}(\frac{\tau}{h})^2a^2(u_{tx^4})_{m+1/2}^n$$

$$-\frac{\tau h}{4}a(u_{tx^4})_{m+1/2}^n+0(\tau^2+h^6+\tau h^3) \tag{20}$$

$$=h^4(\frac{-1}{240}+\frac{3-\alpha}{2}R^2-\frac{1}{4}R)(u_{tx^4})_{m+1/2}^n+0(\tau^2+h^6+\tau h^3)$$

$$=\begin{cases}0(\tau^2+h^4+(\tau/h)^2+\tau h),R\neq(15-\sqrt{315-30\alpha})/60(3-\alpha),\\0(\tau^2+h^6+\tau h^3),R=(15-\sqrt{315-30\alpha})/60(3-\alpha),\end{cases} \tag{20'}$$

如特取 $\alpha=0$,则 $R=(15-\sqrt{315})/180=-0.01527$;取 $\alpha=1$,则 $R=(15-\sqrt{285})/120=-0.01568$.

由式(19)舍去截断误差,使得本文的第Ⅰ类差分格式的第二个格式

$$\frac{1}{2\tau}[V_{m+1}^n-V_{m+1}^{n-1}+V_m^{n+1}-V_m^n]$$

$$=\frac{a}{h^3}[V_{m+2}^n-\alpha V_{m+1}^n-\frac{3-\alpha}{2}(V_{m+1}^{n+1}+V_{m+1}^{n-1})+\alpha V_m^n$$

$$+\frac{3-\alpha}{2}(V_m^{n+1}+V_m^{n-1})-V_{m-1}^n],(a<0), \tag{21}$$

第Ⅰ类差分格式(即格式(15)及(21))可改写为

$$(\frac{1}{2}+\frac{3-\alpha}{2}R)V_{m+1}^{n+1}-\frac{3-\alpha}{2}RV_m^{n+1}$$

$$=RV_{m+2}^n+(\frac{1}{2}-\alpha R)V_{m+1}^n-(\frac{1}{2}-\alpha R)V_m^n-RV_{m-1}^n+$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

$$+(\frac{1}{2}+\frac{3-\alpha}{2}R)V_m^{n-1}-\frac{3-\alpha}{2}RV_{m+1}^{n-1},(\alpha>0), \tag{22}$$

(计算时从左往右进行)及

$$\begin{aligned}&(\frac{1}{2}-\frac{3-\alpha}{2}R)V_m^{n+1}+\frac{3-\alpha}{2}RV_{m+1}^{n+1}\\&=RV_{m+2}^n-(\frac{1}{2}+\alpha R)V_{m+1}^n+(\frac{1}{2}+\alpha R)V_m^n-RV_{m-1}^n\\&\quad+(\frac{1}{2}-\frac{3-\alpha}{2}R)V_{m+1}^{n-1}+\frac{3-\alpha}{2}RV_m^{n-1},(\alpha<0),\end{aligned} \tag{23}$$

(计算时从右往左进行).

当 $\alpha=0$ 时,格式(I)(即格式(22)、(23)便成为文〔7〕中的格式(2.7)及(2.11);而当 $\alpha=1$ 时,则成为文〔8〕中的格式(9)及(11).

2°如果用

$$(u_t)_{m+1}^n=\frac{1}{2\tau}(u_{m+1}^{n+1}-u_{m+1}^{n-1})-\frac{\tau^2}{6}(u_{ttt})_{m+1}^n+0(\tau^4) \tag{24}$$

及

$$(u_t)_m^n=\frac{1}{2\tau}(u_m^{n+1}-u_m^{n-1})-\frac{\tau^2}{6}(u_{ttt})_m^n+0(\tau^4), \tag{25}$$

代入式(8)得

$$\begin{aligned}(u_t)_{m+1/2}^n&=\frac{1}{4\tau}(u_{m+1}^{n+1}-u_{m+1}^{n-1}+u_m^{n+1}-u_m^{n-1})-\frac{h^2}{8}(u_{txx})_{m+1/2}^n\\&\quad-\frac{h^4}{384}(u_{tx^4})_{m+1/2}^n+0(\tau^2+h^6),\end{aligned} \tag{26}$$

利用式(12)并将式(7)及式(26)代入方程 $(u_t)_{m+1/2}^n=a(u_{xxx})_{m+1/2}^n$ 可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\tau}[u_{m+1}^{n+1}-u_{m+1}^{n-1}+u_m^{n+1}-u_m^{n-1}]\\&=\frac{a}{h^3}[u_{m+2}^n-\alpha u_{m+1}^n-\frac{3-\alpha}{2}(u_{m+1}^{n+1}+u_{m+1}^{n-1})\\&\quad+\alpha u_m^n+\frac{3-\alpha}{2}(u_m^{n+1}+u_m^{n-1})-u_{m-1}^n]+S_{m+1/2}^n,\end{aligned} \tag{27}$$

其中截断误差

$$\begin{aligned}S_{m+1/2}^n&=(\frac{1}{384}-\frac{13}{1920}h^4(u_{tx^4})_{m+1/2}^n\\&\quad+\frac{3-\alpha}{2}(\frac{\tau}{h})^2a^2(u_{tx^4})_{m+1/2}^n+0(\tau^2+h^6)\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}&=(\frac{-1}{240}+\frac{3-\alpha}{2}R^2)h^4(u_{tx^4})_{m+1/2}^n+0(\tau^2+h^6)\\&=\begin{cases}0(\tau^2+h^4+(\tau/h)^2),R^2\neq 1/120(3-\alpha),\\0(\tau^2+h^6),R^2=1/120(3-\alpha),\end{cases}\end{aligned} \tag{28'}$$

如特取 $\alpha=0$,则 $R=\pm(1/60)\sqrt{10}=\pm0.05270$;取 $\alpha=1$,则 $R=\pm(1/120)\sqrt{60}=\pm0.06455$.

由式(27)舍去截断误差便得本文的第 I 类差分格式

$$\frac{1}{4\tau}[V_{m+1}^{n+1}-V_{m+1}^{n-1}+V_m^{n+1}-V_m^{n-1}]=$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

$$=\frac{a}{h^3}[V^n_{m+2}-\alpha V^n_{m+1}-\frac{3-\alpha}{2}(V^{n+1}_{m+1}+V^{n-1}_{m+1})+\alpha V^n_m$$

$$+\frac{3-\alpha}{2}(V^{n+1}_m+V^{n-1}_m)-V^n_{m-1}], \tag{29}$$

差分格式(29)可改写为

$$(\frac{1}{4}+\frac{3-\alpha}{2}R)V^{n+1}_{m+1}+(\frac{1}{4}-\frac{3-\alpha}{2}R)V^{n+1}_m$$

$$=R(-\alpha V^n_{m+1}+\alpha V^n_m+V^n_{m+2}-V^n_{m-1})$$

$$+(\frac{1}{4}-\frac{3-\alpha}{2}R)V^{n-1}_{m+1}+(\frac{1}{4}+\frac{3-\alpha}{2}R)V^{n-1}_m, \tag{30}$$

或下列两个差分格式

$$V^{n+1}_{m+1}=\frac{\frac{3-\alpha}{2}R-\frac{1}{4}}{\frac{3-\alpha}{2}R+\frac{1}{4}}V^{n+1}_m+\frac{R}{\frac{3-\alpha}{2}R+\frac{1}{4}}(-\alpha V^n_{m+1}+\alpha V^n_m+V^n_{m+2}-V^n_{m-1}$$

$$-\frac{\frac{3-\alpha}{2}R-\frac{1}{4}}{\frac{3-\alpha}{2}R+\frac{1}{4}}V^{n-1}_{m+1}+V^{n-1}_m \qquad (a>0), \tag{31}$$

(从左往右进行计算)及

$$V^{n+1}_m=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3-\alpha}{2}R}{\frac{3-\alpha}{2}R-\frac{1}{4}}V^{n+1}_{m+1}+\frac{R}{\frac{1}{4}-\frac{3-\alpha}{2}R}(-\alpha V^n_{m+1}+\alpha V^n_m+V^n_{m+2}-V^n_{m-1})$$

$$+V^{n-1}_{m+1}+\frac{\frac{1}{4}+\frac{3-\alpha}{2}R}{\frac{1}{4}-\frac{3-\alpha}{2}R+}V^{n-1}_m \qquad (a<0), \tag{32}$$

(从右往左进行计算).

当 $\alpha=0$ 时,格式(Ⅰ)(即格式(30),或格式(31)及(32))成为文[9]中的半显式格式(1.5)或格式(1.6)及(1.7)).

2 稳定性分析

用分离度量法研究差分格式稳定性,令

$$V^n_m=\lambda^n e^{im\theta}, \qquad |\theta|<\pi \tag{33}$$

代入差分格式,得形如(1)的特征方程,对两类差分格式分别讨论如下

1°差分格式(I)(即格式(22)及(23)).对差分格式(22)有

$$A=\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}+i[\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}+(3-\alpha)R\sin\frac{\theta}{2}],$$

$$C=-\{\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}-i[\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}+(3-\alpha)R\sin\frac{\theta}{2}]\}=-\overline{A},$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

$$B=-2i\{\frac{1}{2}+(3-\alpha)R-4R\sin^2\frac{\theta}{2}\}\sin\frac{\theta}{2},$$

显然，$|A|=|C|$，$|\overline{A}B-\overline{B}C|\equiv|\overline{A}(B+\overline{B})|\equiv 0$，故由 Mlller 准则知其稳定的充分条件为 $|B|<2|A|$，即 $|\frac{1}{2}+(3-\alpha)R-4R\sin^2\frac{\theta}{2}||\sin\frac{\theta}{2}|<|\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}+i(\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}+(3-\alpha)R\sin\frac{\theta}{2})|$ 或 $[\frac{1}{2}+(3-\alpha)R-4R\sin^2\frac{\theta}{2}]^2\sin\frac{\theta}{2}<\frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2}+[\frac{1}{2}+(3-\alpha)R]^2\sin^2\frac{\theta}{2}$，即

$$(-4R\sin^2\frac{\theta}{2})[1+2(3-\alpha)R-4R\sin^2\frac{\theta}{2}]^2\sin^2\frac{\theta}{2}<\frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2},\tag{34}$$

不难看出，当 $R>0$ 时，若取 $\alpha\leqslant 1$ 则上式恒成立.

对差分格式(23)同理可证，从略. 于是据判别稳定性的 Von Neumann 准则可得如下的

定理 1　当 $\alpha\leqslant 1$ 时，差分格式(22)(或(23))对任意 $R>0$(或 $R<0$)都绝对稳定.

2°差分格式(Ⅱ)(即格式(30)).

$$A=\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}+i(3-\alpha)R\sin\frac{\theta}{2},$$

$$C=-\{\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}-i(3-\alpha)R\sin\frac{\theta}{2}\}=-\overline{A},$$

$$B=-2iR\{(3-\alpha)-4R\sin^2\frac{\theta}{2}\}\sin\frac{\theta}{2},$$

显然，$|A|=|C|$，$|\overline{A}B-\overline{B}C|\equiv|\overline{A}(B+\overline{B})|\equiv 0$，故由 Mlller 准则知其稳定的充分条件为 $|B|<2|A|$，即

$$|(3-\alpha)-4\sin^2\frac{\theta}{2}||R\sin\frac{\theta}{2}|<|\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}+i(3-\alpha)R\sin\frac{\theta}{2})|$$

或

$$R^2[(3-\alpha)-4\sin^2\frac{\theta}{2}]^2\sin^2\frac{\theta}{2}<\frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2}+(3-\alpha)^2R^2\sin^2\frac{\theta}{2},$$

即

$$R^2[2(3-\alpha)-4\sin^2\frac{\theta}{2}](-4\sin^2\frac{\theta}{2})<\frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2},\tag{35}$$

显然，对任意 R，当 $\alpha\leqslant 1$ 时上式恒成立. 于是，根据 Von Neumann 准则可得如下的

定理 2　当 $\alpha\leqslant 1$ 时，差分格式(30)对任意 R 都稳定.

3. 对高阶方程 $U_t=aU_{x^{2K+1}}$($K\geqslant 2$ 的整数)的推广

值得指出，差分格式(Ⅱ)可以推广到高阶方程 $U_t=aU_{x^{2K+1}}$. 下面以高阶方程 $U_t=aU_{x^5}$ 为例说时之. 因

$$h^5(U_{x^5})^n_m=(U^n_{m+5/2}-U^n_{m-5/2})-5(U^n_{m+3/2}-U^n_{m-3/2})$$
$$+10(U^n_{m+1/2}-U^n_{m-1/2})-\frac{5}{24}h^2U_{x^7},$$

从而依照格式(Ⅱ)的构造思想，有如下差分格式

$$\frac{1}{2}[\frac{U^{n+1}_{m+1/2}-U^{n-1}_{m+1/2}}{2\tau}+\frac{U^{n+1}_{m-1/2}-U^{n-1}_{m-1/2}}{2\tau}]=$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.

$$=\frac{a}{h^5}[(U^n_{m+5/2}-U^n_{m-5/2})-5(U^n_{m+3/2}-U^n_{m-3/2})$$

$$+\alpha U^n_{m+1/2}+\frac{10-\alpha}{2}(U^{n+1}_{m+1/2}+U^{n-1}_{m+1/2})$$

$$-\alpha U^n_{m-1/2}-\frac{10-\alpha}{2}(U^{n+1}_{m-1/2}+U^{n-1}_{m-1/2})], \tag{36}$$

其截断误差为 $0(\tau^2+h^2+(\tau/h^2)^2)$，而特征方程系数为

$$A=\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}-i(10-\alpha)R\sin\frac{\theta}{2},$$

$$C=-\{\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}+i(10-\alpha)R\sin\frac{\theta}{2}\}=-\overline{A},$$

$$B=-2iR[\sin\frac{5\theta}{2}-5\sin\frac{3\theta}{2}+\alpha\sin\frac{\theta}{2}]=-2ir[(\alpha-10)\sin\frac{\theta}{2}+16\sin^5\frac{\theta}{2}]$$

（其中 $R=a\tau/h^5$）显然，$|A|=|C|$，$|\overline{A}B-\overline{B}C|\equiv|\overline{A}(B+\overline{B})|\equiv 0$，故由 Mliller 准则知其稳定的充分条件为 $|B|<2|A|$，即

$$|R||(\alpha-10)+16\sin^4\frac{\theta}{2}||\sin\frac{\theta}{2}|<|\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}-i(10-\alpha)R\sin\frac{\theta}{2}|$$

或

$$16R^2\sin^6\frac{\theta}{2}[2(\alpha-10)+16\sin^4\frac{\theta}{2}]<\frac{1}{4}\cos^2\frac{\theta}{2}, \tag{37}$$

显然，上式当 $\alpha\leqslant 2$ 时恒成立．故由 Von Neumann 准则可得如下的

定理 3　当 $\alpha\leqslant 2$ 时差分格式(33)对任意 R 都是绝对稳定的.

最后必须指出：我们用文〔12〕中所给出的数值例子，按照本文对色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 所给出的两类含参数半显式差分格式(I)及(Ⅱ)进行计算(其中界面层处理方法同文〔12〕. 我们分别取色散方程系数 $a=\pm 1$；差分格式参数 $\alpha=0,\pm 1/2,\pm 1$；空间步长 $h=0.002$ 及网络比之模 $|R|=|a\tau/h^3|=2,5,10$ 进行计算到空间层数 $N=50,200$ 及 500 数值结果表明其绝对误差精度不超过 10^{-5} 或 10^{-6}. 由此表明：本文所构造的两个差分格式(I)及(Ⅱ)都是有效的. 因篇幅关系恕不列表赘述.

参　考　文　献

〔1〕 秦孟兆，色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的差分格式，计算数学，6(1984)，1－13.

〔2〕 黎　益、李北杰，关于色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的两个显式差分格式，计算数学，8(1986)，275－280.

〔3〕 邬华谟，一类具高稳定性的三层显式格式 H_3，计算数学，8(1986)，329－331.

〔4〕 黎　益，关于色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的三层显式差分格式，四川大学学报(自然科学版)，25，3(1988)，298－306.

〔5〕 黎　益、李北杰，逼近色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的高精度差分格式，四川大学学报，22，4(1985)，12－21.

〔6〕 曾文平，解色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的一族绝对稳定的高精度差分格式，计算数学，9，4(1987)，403－410.

〔7〕 曾文平，关于色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的一类绝对稳定的半显式格式，计算数学，10，3(1988)，248－252.

〔8〕 苏远生，色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的两个半显式绝对稳定差分格式，华侨大学学报(自然科学版)，10，2(1989)，110－116.

〔9〕 黎　益、王　莉，两个恒稳定的差分格式，计算数学，12，1(1990)，98－103.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.

〔10〕 林鹏程，解色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 绝对稳定的两层半显式格式，应用数学，4(1989)．

〔11〕 张大凯，求解色散方程的两个阶梯形半显式格式，数值计算与计算机应用，12，1(1991)，62－65.

〔12〕 曾文平，解色散方程的一类新的无条件稳定的半显式格式，华侨大学学报(自然科学版)，12，3(1991)，274－278.

〔13〕 Miller，J. J. H，*J. Inst. Math. Appls*，8(1971)，397－406.

〔14〕 Richtmyer，R. D. ，Morton，K. W. ，*Difference Methods for Initial-Value Problems*，2nd，edit，wiley，New York，(1967).

Two Classes of Absolutely Stable and High Accuracy Difference Schemes Depending on a Parameter

Zeng Wenping

(*Department of Management Information Science*)

Abstract Two classes of three level semi-explicit difference schemes depending on a parameter are developed for solving dispersion equation $u_t=au_{xxx}$. They have a similar order of local truncation error as $0(\tau^2+h^4+(\tau/h)^2+\tau h)$or $0(\tau^2+h^4+(\tau/h)^2)$. By Von Neumann Criterion for stability, these schemes are shown to be uncondionally stable in case parameter($\alpha\geqslant1$)is chosen suitably, and they can be explicitly calculated in case the necessary boundary condition is given. In special case, the order of discretization error are $0(\tau^2+h^6)$, but the constraints of stability are very strict.

Key words dispersion equation, high accuracy, absolutely stable, semi-explicit difference scheme

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.