

# 筒中筒结构高频振动的简捷计算

王 全 凤

(土木工程系)

**摘要** 本文把筒中筒高层结构自由振动的固有频率问题归结为求解特征值函数的特征值问题, 计算表明, 本文的方法不仅手算简便, 而且能获得满意的实用结果.

**关键词** 筒中筒结构, 自由振动, 高频, 特征值问题

## 0 前言

文献[1]严格证明了按等代筒体法推导出来的筒中筒高层建筑自由振动方程是四阶 Sturm-Liouville 微分方程. 用变分法推导出基频的计算公式, 把一个复杂的工程实际问题转化为一个简单实用的手算问题, 可以在工程投标的核心阶段及初步设计时使用. 但到实际设计阶段, 高振型对高层建筑结构变形和内力的影响是不容忽视的. 本文是文[1]工作的继续, 旨在提出一个简便、实用的该结构高频计算公式.

## 1 筒中筒高层建筑固有频率

如图1所示, 假定楼层质量  $\bar{m}$  沿着结构高度均匀分布, 将筒中筒高层结构的外缘框筒当作具有弯曲及剪切变形的等代筒体, 只考虑弯曲变形的内筒形变协调条件, 便可得到该结构自由振动的控制方程<sup>[1]</sup>

$$\frac{d^4 Y(z)}{dz^4} - \alpha^2 \cdot \frac{d^2 Y(z)}{dz^2} - \bar{m} \cdot \omega^2 \cdot \left( \frac{1}{EI_w} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2}{EI} \cdot z^2 \right) \cdot Y(z) = 0, \quad (1)$$

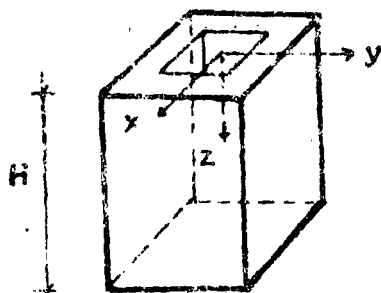


图1 等代筒体

式中,  $Y(z)$ —筒中筒高层结构的振型函数;  $\omega$ —该结构的固有频率,  $\alpha^2 = K_f \cdot h \cdot (\frac{1}{EI_f} + \frac{1}{EI_w})$ ,  $K_f$ —外筒等代层间剪切刚度;  $h$ —楼层的层高;  $EI_f$ —外筒的弯曲刚度;  $EI_w$ —内筒的弯曲刚度;  $EI$ —内、外筒弯曲刚度之和. 文[1]证明了上述振动方程是 Sturm-Liouville 四阶微分方程

$$\frac{d^2}{dz^2} [s(z) \cdot \frac{d^2 Y(z)}{dz^2}] + \frac{d}{dz} [p(z) \cdot \frac{dY(z)}{dz}] + [q(z) - \Phi \cdot r(z)] \cdot Y(z) = 0 \quad (2)$$

的一种形式. 其中  $s(z)$ ,  $p(z)$ ,  $q(z)$ ,  $r(z)$  都是坐标  $z$  的已知函数.  $\Phi$  为 Langrange 乘子. 式(1) 虚制方程的边界条件

$$\begin{cases} Y(H) = 0, \\ Y'(H) = 0, \\ Y''(0) = 0, \\ Y'''(0) - \alpha^2 \cdot Y'(0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

满足式(2)方程的端点条件

$$\begin{cases} s(z) \cdot Y''(z) = 0 \quad \text{或} \quad Y'(z) = \text{Const.} \\ [s(z) \cdot Y''(z)]' + p(z) \cdot Y'(z) = 0 \quad \text{或} \quad Y(z) = \text{Const.} \end{cases} \quad (4)$$

1. 解筒中筒高层结构的固有频率, 亦即求解

$$\Phi = \omega^2, \quad (5)$$

可以利用变分极值条件

$$\delta I^* = \delta I - \Phi \cdot \delta J = 0, \quad (6)$$

式中,  $I$  为泛函

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \{s(z) \cdot [Y''(z)]^2 - p(z) \cdot [Y'(z)]^2 + q(z) \cdot Y^2(z)\} dz, \quad (7)$$

$J$  为已知约束条件

$$J = \int_{z_1}^{z_2} r(z) \cdot Y^2(z) \cdot dz. \quad (8)$$

## 2 结构固有频率的变分解

从一切函数  $Y(z)$  中通过变分选取使

$$\Phi = \frac{\delta I}{\delta J}, \quad (9)$$

为极值的函数时, 将有无穷个特征值函数  $Y_n(z)$ , 而有关的特征值  $\Phi_n$  也有无穷个, 这些特征值  $\Phi_n$  都是局部的极值. 只有从一切至少满足移位边界条件的函数中选择  $\Phi$  的极值时, 最小的极值才是基本特征值  $\Phi_1$ , 而  $\Phi_2, \Phi_3, \dots$  等为高阶特征值<sup>[2]</sup>. 首先造就一个函数

$$Y(z) = A_1 \cdot Y^{(1)}(z) + A_2 \cdot Y^{(2)}(z) + \dots + A_n \cdot Y^{(n)}(z), \quad (10)$$

式中,  $Y^{(1)}(z), Y^{(2)}(z), \dots, Y^{(n)}(z)$  满足移位边界条件, 但无需是微分方程的解;  $A_1, A_2, \dots, A_n$

为特定的  $n$  个参数.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的选择过程就是表示从式(10)中那样的函数中选择最好的  $Y(z)$ . 本文造就函数为

$$Y(z) = A_1 \cdot y(z) + A_2 \cdot f\{y(z)\} + \dots, \quad (11)$$

式中

$$y(z) = \frac{1}{2}[(\alpha^2 H^2 + 2)(H - z)^4 - \frac{8}{3}(\alpha^2 H^2 + 3) \cdot H \cdot (H - z)^3 + 2(\alpha^2 H^2 + 6) \cdot H^2 \cdot (H - z)^2], \quad (12)$$

$$f\{y(z)\} = y(z) \cdot (H - z) + 2 \int y(z) \cdot dz. \quad (13)$$

设取二级近似函数

$$\bar{Y}(z) = A_1 \cdot y(z) + A_2 \cdot [y(z) \cdot (H - z) + 2 \int y(z) \cdot dz], \quad (14)$$

则  $\bar{Y}'(z) = A_1 \cdot y'(z) + A_2 \cdot [y'(z) \cdot (H - z) + y(z)]$ ,  $\bar{Y}''(z) = A_1 \cdot y''(z) + A_2 \cdot y''(z) \cdot (H - z)$ ,  $\bar{Y}'''(z) = A_1 \cdot y'''(z) + A_2 \cdot [y'''(z) \cdot (H - z) - y''(z)]$ , 满足式(3)位移边界条件. 把式(14)分别代进式(7), (8)得

$$I = a_1 H^5 A_1^2 + a_2 H^6 A_1 A_2 + a_3 H^7 A_2^2, \quad (15)$$

$$J = b_1 H^9 A_1^2 + b_2 H^{10} A_1 A_2 + b_3 H^{11} A_2^2, \quad (16)$$

式中

$$a_1 = (4\alpha^6 H^6 + 156\alpha^4 H^4 + 1584\alpha^2 H^2 + 3024)/105,$$

$$a_2 = (\alpha^6 H^6 + 180\alpha^4 H^4 + 5508\alpha^2 H^2 + 12096)/1260,$$

$$a_3 = (7\alpha^6 H^6 + 324\alpha^2 H^2 + 1728)/1260,$$

$$b_1 = \frac{\bar{m}}{EI_w} [(17\alpha^4 H^4 + 434\alpha^2 H^2 + 2912)/1260$$

$$- \frac{EI_w}{EI} (92\alpha^6 H^6 + 1809\alpha^4 H^4 + 9234\alpha^2 H^2)/124740],$$

$$b_2 = \frac{\bar{m}}{EI_w} [-4\alpha^4 H^4 + 454\alpha^2 H^2 + 7824]/9450$$

$$- \frac{EI_w}{EI} (43\alpha^6 H^6 + 1404\alpha^4 H^4 + 10908\alpha^2 H^2)/498960],$$

$$b_3 = \frac{\bar{m}}{EI_w} [(130\alpha^4 H^4 - 3396\alpha^2 H^2 + 93888)/124740$$

$$- \frac{EI_w}{EI} (23\alpha^6 H^6 + 612\alpha^4 H^4 + 10908\alpha^2 H^2)/6486480],$$

把式(15), (16)代进变分极值条件, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial I^*}{\partial A_1} = 0, \\ \frac{\partial I^*}{\partial A_2} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

当  $A_1, A_2$  为不等零的解时, 其系数行列式值应该等于零

$$\begin{vmatrix} 2a_1 H^5 - 2b_1 H^9 \Phi & a_2 H^6 - b_2 H^{10} \Phi \\ a_2 H^6 - b_2 H^{10} \Phi & 2a_3 H^7 - 2b_3 H^{11} \Phi \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

一级近似在式(11)中只有头一项,于是式(17)只有一个方程,即

$$\Phi = \frac{1}{H^4} \cdot \frac{a_1}{b_1} = \omega_1^2.$$

展开式(18)为二次方程,得两个 $\Phi$ 值,其中之一对应基频,另一个对应第二频率.

### 3 结论

用本文方法计算与文〔3〕同样的例题. 根据例题所给已知条件可算出 $\alpha H = 1.0168668$ ,并注意到该例题中与求解有关的其它数据,即

$$H = 75.9\text{m}, \overline{m} = 325.828\text{t/m}, EI_w = 7.558 \times 10^9 \text{kn} \cdot \text{m}^2,$$

$$EI_f = 35.2872 \times 10^9 \text{kn} \cdot \text{m}^2,$$

把上述数据代进式(18),得 $\omega_1 = 3.4281, \omega_2 = 20.5764$ . 把与它们对应的结构自振周期与文献〔3〕用顶点位移法算出的结果比较见表1.

表1 不同方法的筒体结构周期计算值

周期	本文方法	文献〔3〕顶点位移法
第一周期(s)	1.8329	1.9165
第二周期(s)	0.3054	0.3506

从表1可以看到,这两种方法计算的结果基本接近. 但本文的计算简便,经过简单手算就能算出筒中筒高层建筑结构固有频率值,有非常广泛的实用前景. 若求该结构的其它高频,可用本文方法类推.

### 参 考 文 献

- 〔1〕 王全风,筒中筒高层结构自由振动的变分解,建筑结构学报,10,6(1989),64—70.
- 〔2〕 钱伟长,变分法及有限元(上),科学出版社,(1980).
- 〔3〕 朱幼麟,筒中筒结构的简化计算,建筑结构学报,5,2(1984),9—21.

## A Forthright Method for Computing the High-Frequency Vibration of a Tube-in-Tube Structure

Wang Quanfeng

(Department of Civil Engineering)

**Abstract** In relation to the free vibration of a tube-in-tube tall structure, the author reduces the problem of measuring its inherent frequency to solving a characteristic value problem comprising a set of eigenvalue functions. As compared with other methods of frequency mea-

surement, the proposed method of solving the characteristic value problem is proved by the results to be satisfactory in practical use and simple in hand operation.

**Key words** tube-in-tube structure, free vibration, high frequencies, characteristic value problem