第14卷 第1期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 14 №. 1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年1月 (NATURAL SCIENCE) Jan. 1993

关于 SSOR 迭代法和 Jacobi 迭代法的敛散性

陈 恒 新

(管理信息科学系)

摘要 本文证明了当 Jacobi 矩阵 B 非负时，解线性方程组（系数矩阵为不可约）的 SSOR 法（$0<\omega<1$）和 Jacobi 法同时敛散，给出了 SSOR 法迭代矩阵之谱半径 $\rho(\varphi_\omega)$ 和 $\rho(B)$ 之间的关系.

关键词 SSOR 迭代法，Jacobi 迭代法，收敛性，发散性

0 引言

在 Jacobi 矩阵 $B\geqslant 0$ 或系数矩阵 A 为 L 矩阵的情况下（当 A 为 L 矩阵，则 $B\geqslant 0$，即 $B\geqslant 0$ 的矩阵类 A 包括了 A 为 L 矩阵的矩阵类）. 文[1—3]分别证明了解线性代数方程组 $Ax=b$ 的 SOR 迭代法（$0<\omega\leqslant 1$），AOR 迭代法（$0\leqslant\gamma<\omega\leqslant 1$），TOR 迭代法（$0\leqslant\alpha,0\leqslant\beta,0<\alpha+\beta<2$）和 Jacobi 迭代法同时敛散，给出了其谱半径 $\rho(L_\omega)$、$\rho(L_{\gamma,\omega})$、$\rho(L_{\alpha,\beta,F})$ 和 $\rho(B)$ 之间的关系.

于是自然要问，当 $B\geqslant 0$ 时，解线性方程组 $Ax=b$ 的对称逐次超 松弛迭代法（简称 SSOR 法）是否也有类似的性质？为此，本文证明了当 $B\geqslant 0$ 时，解 $Ax=b$（系数矩阵为不可约）的 SSOR 法（松弛因子 $0<\omega<1$）和 Jacobi 迭代法同时敛散，给出了类似文[1—3]的 SSOR 法迭代矩阵之谱半径 $\rho(\varphi_\omega)$ 和 $\rho(B)$ 之间的关系.

1 SSOR 迭代法

对于线性代数方程组

$$Ax=b. \tag{1}$$

设 $A=D-E-F$ 是 $n\times n$ 实矩阵，其中 D 是非奇异对角阵，E 是严格下三角阵，F 是严格上三角阵. 记 $L=D^{-1}E$，$U=D^{-1}F$，则矩阵 A 之 Jacobi 矩阵为 $B=D^{-1}E+D^{-1}F=L+U$.

于是求解方程组(1)之 SSOR 法为

$$x^{(m+1)}=\varphi_\omega x^{(m)}+\omega(2-\omega)(I-\omega U)^{-1}(I-\omega L)^{-1}D^{-1}b,\quad m=0,1,2,\cdots \tag{2}$$

其中 SSOR 法迭代矩阵为

* 本文 1991-05-18 收到.

$$\varphi_\omega=(I-\omega U)^{-1}[(1-\omega)I+\omega L](I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I+\omega U].\tag{3}$$

2　非负矩阵的性质

定义　对于 $n\times n$ 实矩阵 G、M 及 N，如果 M 非奇异，并且有 $M^{-1}\geqslant 0$ 和 $N\geqslant 0$，则称 $G=M-N$ 为矩阵 G 的正规分裂．

由文[4]定理 3.8、定理 3.13 和定理 2.1 可得下述引理 1—3．

引理 1　设 $n\times n$ 矩阵 $G\geqslant 0$ 则 $I-G$ 非奇异且 $(I-G)^{-1}\geqslant 0$ 的充要条件是 $\rho(G)<1$．

引理 2　设 $G=M-N$ 为矩阵 G 的正规分裂，并且 $G^{-1}\geqslant 0$，则 $\rho(M^{-1}N)<1$．

引理 3　若 $G\geqslant 0$ 为不可约 $n\times n$ 矩阵，则对于 $\rho(G)$，存在 $\rho(G)=\lambda>0$ 及相应特征向量 $x>0$，使 $Gx=\lambda x$．

引理 4　设 $G=[g_{ij}]\geqslant 0$ 为 $n\times n$ 矩阵，则对任一向量 $x=(x_1,x_2\cdots,x_n)^T>0$，成立

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x_j}{x_i}\right]\leqslant\rho(G)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x_j}{x_i}\right]$$

证明　因为由非负矩阵性质知，对任一 n 阶方阵 $T=[t_{ij}]\geqslant 0$ 有

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}t_{ij}\leqslant\rho(T)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}t_{ij},\tag{4}$$

现对任一向量 $x=(x_1,x_2\cdots,x_n)^T>0$，令 $D=\mathrm{diag}(x_1,x_2\cdots,x_n)$ 作 $\tilde{G}=D^{-1}GD$，则 $\tilde{G}=[\tilde{g}_{ij}]\geqslant 0$ 且有 $\rho(\tilde{G})=\rho(G)$ 和 $\tilde{g}_{ij}=x_i^{-1}g_{ij}x_j$，$i,j=1,2,\cdots,n$. 于是由式(4)便有

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}x_i^{-1}g_{ij}x_j\leqslant\rho(\tilde{G})\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}x_i^{-1}g_{ij}x_j,$$

既得

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x_j}{x_i}\right]\leqslant\rho(G)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x_j}{x_i}\right].$$　　证完．

3　$\rho(\varphi_\omega)$和 $\rho(B)$的敛散关系

定理　设线性方程组(1)的系数矩阵 A 不可约，其 Jacobi 矩阵 $B=L+U\geqslant 0$，φ_ω 为形如式(3)的 SSOR 法迭代矩阵．则对于 $0<\omega<1$，有

i)　$\rho(B)>0$，$\rho(\varphi_\omega)>(1-\omega)^2$；

ii)　$0<\rho(B)<1\Leftrightarrow(1-\omega)^2<\rho(\varphi_\omega)<1$；

iii)　$\rho(B)=1\Leftrightarrow\rho(\varphi_\omega)=1$；

iv)　$\rho(B)>1\Leftrightarrow\rho(\varphi_\omega)>1$.

即 SSOR 迭代法(2)和 Jacobi 法同时敛散．

证明　因为 SSOR 法之迭代矩阵

$$\varphi_\omega = (I - \omega U)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega L](I - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega U],$$

由于 $\rho(\omega L)=\rho(\omega U)=0$，由引理 1 知 $(I-\omega U)^{-1}\geqslant 0$，$(I-\omega L)^{-1}\geqslant 0$. 因

$$[(1 - \omega)I] + \omega L] - \omega L[(1 - \omega)I + \omega L] = [(1 - \omega)I + \omega L] - [(1 - \omega)I + \omega L]\omega L,$$

因此有

$$(I - \omega L)[(1 - \omega)I + \omega L] = [(1 - \omega)I + \omega L](I - \omega L),$$

$$[(1 - \omega)I + \omega L](I - \omega L)^{-1} = (I - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega L],$$

所以

$$\begin{aligned}\varphi_\omega &= (I - \omega U)^{-1}(I - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega L][(1 - \omega)I + \omega U] \\ &= (I + \omega U + \omega^2U^2 + \cdots)(I + \omega L + \omega^2L^2 + \cdots)[(1 - \omega)^2I \\ &\quad + \omega(1 - \omega)(L + U) + \omega^2LU] \geqslant (1 - \omega)^2I + \omega(1 - \omega)(L + U).\end{aligned}$$

因为 $A=D-E-F=D(I-L-U)$ 为不可约矩阵，从而 $(I-L-U)=D^{-1}A$ 亦为不可约矩阵，由于 $0<w<1$，于是 $(1-\omega)^2I+\omega(1-\omega)(L+U)\geqslant 0$ 且不可约．因此可知 SSOR 法迭代矩阵 $\varphi_\omega\geqslant 0$ 且不可约．

由引理 3 知，对于 $\rho(\varphi_\omega)$，存在 $\lambda=\rho(\varphi_\omega)>0$ 和相应特征向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T>0$，使 $\varphi_\omega x=\lambda x$，即

$$[(I - \omega L)(I - \omega U)]^{-1}[(1 - \omega)I + \omega L][(1 - \omega)I + \omega U]x = \lambda x,$$

$$[(1 - \omega)I + \omega L][(1 - \omega)I + \omega U]x = \lambda[(I - \omega L)(I - \omega U)]x,$$

$$[(1 - \omega)^2I + \omega(1 - \omega)(L + U) + \omega^2LU]x = \lambda[I - \omega(L + U) + \omega^2LU]x,$$

因此有式(5)，(6)

$$\omega(1 + \lambda - \omega)(L + U)x + \omega^2(1 - \lambda)LUx = [\lambda - (1 - \omega)^2]x, \tag{5}$$

$$\omega(1 + \lambda - \omega)(L + U)x = \omega^2(\lambda - 1)LUx + [\lambda - (1 - \omega)^2]x. \tag{6}$$

现证 i)反证，若 $\rho(B)=0$，因为 $B=L+U=[b_{ij}]\geqslant 0$（其中 $b_{ii}=0,i=1,2,\cdots,n$）. 由引理 4 知对任一向量 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T>0$，成立

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\sum\limits_{j\neq i}b_{ij}y_j}{y_i}\leqslant\rho(B)=0,$$

于是必存在某个 $1\leqslant k\leqslant n$，使

$$\frac{\sum\limits_{j\neq k}b_{kj}y_j}{y_k}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\sum\limits_{j\neq i}b_{ij}y_j}{y_i}=0,$$

即有 $\sum\limits_{j\neq k}b_{kj}y_j=0$，但因 $y_j>0(j=1,2,\cdots,n)$，因此 $b_{kj}=0,j=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n$. 从而矩阵 $I-L-U=D^{-1}A$ 为可约矩阵，和已知 A 不可约矛盾，所以 $\rho(B)>0$.

若 $\rho(\varphi_\omega)\geqslant 1$，因 $0<\omega<1$，所以 $\rho(\varphi_\omega)>(1-\omega)^2$；若 $\lambda=\rho(\varphi_\omega)<1$，由式(5)[illegible]，因此 $\lambda\geqslant(1-\omega)^2$. 且由式(5)有

$$\omega(1 + \lambda - \omega)(L + U)x \leqslant (\lambda - (1 - \omega)^2)x,$$

若 $\lambda=(1-\omega)^2$，则由上式有

$$\omega(1 + \lambda - \omega)(L + U)x \leqslant 0,$$

因 $\omega(1+\lambda-\omega)>0$，于是 $(L+U)x\leqslant 0$，即 $\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}x_j\leqslant 0,i=1,2,\cdots,n$. 因 $x_j>0(j=1,2,\cdots,n)$. 可

知 $B=[b_{ij}]=0$,从而 $\rho(B)=0$ 与 $\rho(B)>0$ 矛盾．所以

$$\rho(\varphi_\omega) > (1-\omega)^2,$$

至此,已证结论 i).

现证 ii),若 $0<\rho(B)<1$,记 $M_\omega=(I-\omega L)(I-\omega U)$,$N_\omega=[(1-\omega)I+\omega L][(1-\omega)I+\omega U]$,则 $\varphi_\omega=M_\omega^{-1}N_\omega$,因

$$M_\omega^{-1}=(I-\omega U)^{-1}(I-\omega L)^{-1}\geqslant 0,$$

$$N_\omega=[(1-\omega)^2 I+\omega(1-\omega)(L+U)+\omega^2 LU]\geqslant 0.$$

由定义知 $T_\omega=M_\omega-N_\omega$ 为正规分裂,

$$\begin{aligned}T_\omega &= M_\omega-N_\omega=[I-\omega(L+U)+\omega^2 LU]-[(1-\omega)^2 I+\omega(1-\omega)(L+U)+\omega^2 LU]\\ &=(1-(1-\omega)^2)I-(\omega+\omega-\omega^2)(L+U)\\ &=\omega(2-\omega)I-\omega(2-\omega)(L+U)\\ &=\omega(2-\omega)(I-(L+U)=\omega(2-\omega)(I-B),\end{aligned}$$

因 $B\geqslant 0$,$0<\rho(B)<1$,$0<\omega<1$,由引理1知

$$T_\omega^{-1}=\frac{1}{\omega(2-\omega)}(I-B)^{-1}\geqslant 0.$$

这样由引理2可得 $\rho(\varphi_\omega)=\rho(M_\omega^{-1}N_\omega)<1$. 又由本定理结论 i) $\rho(\varphi_\omega)>(1-\omega)^2$,所以有

$$(1-\omega)^2<\rho(\varphi_\omega)<1.$$

若 $(1-\omega)^2<\lambda=\rho(\varphi_\omega)<1$,由式(5)有

$$\omega(1+\lambda-\omega)(L+U)x\leqslant[\lambda-(1-\omega)^2]x,$$

因 $\omega(1+\lambda-\omega)>0$,则有

$$(L+U)x\leqslant\frac{\lambda-(1-\omega)^2}{\omega(1+\lambda-\omega)}x, \tag{7}$$

因为 $0<\omega<1$,有 $\lambda(1-\omega)<1-\omega$,于是有

$$\begin{aligned}\lambda<\lambda\omega+1-\omega&=\omega^2-2\omega+1+\omega+\omega\lambda-\omega^2\\ &=(\omega-1)^2+\omega(1+\lambda-\omega),\end{aligned}$$

因此有　$0<\lambda-(1-\omega)^2<\omega(1+\lambda-\omega)$,所以

$$\frac{\lambda-(1-\omega)^2}{\omega(1+\lambda-\omega)}<1.$$

又因 $x>0$,由式(7)便有 $Bx=(L+U)x<x$ 得

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j}{x_i}<1, i=1,2,\cdots,n,$$

由引理4便得 $\rho(B)<1$,又由本定理结论 i)所以 $0<\rho(B)<1$.

现证 iii)$\Leftarrow$,若 $\lambda=\rho(\varphi_\omega)=1$,由式(5)有

$$\omega(2-\omega)(L+U)x=[1-(1-\omega)^2]x=\omega(2-\omega)x,$$

因此有 $(L+U)x=x$,即 $Bx=x$,因 $x>0$,所以有

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j}{x_i}=1,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

由引理 4 便得 $\rho(B)=1$.

现证 iv)⇐,若 $\lambda=\rho(\varphi_\omega)>1$,由式(6)有

$$\omega(1+\lambda-\omega)(L+U)x \geqslant [\lambda-(1-\omega)^2]x,$$

因 $\omega(1+\lambda-\omega)>0$,由上式得

$$(L+U)x \geqslant \frac{\lambda-(1-\omega)^2}{\omega(1+\lambda-\omega)}x, \tag{8}$$

由于 $0<\omega<1$,有 $\lambda(1-\omega)>(1-\omega)$,

$$\begin{aligned}\lambda > \lambda\omega+1-\omega &= \omega^2-2\omega+1+\omega+\omega\lambda-\omega^2\\ &= (\omega-1)^2+\omega(1+\lambda-\omega),\end{aligned}$$

因此有 $\lambda-(1-\omega)^2>\omega(1+\lambda-\omega)$,所以

$$\frac{\lambda-(1-\omega)^2}{\omega(1+\lambda-\omega)}>1.$$

又 $x>0$,由式(8)有 $Bx=(L+U)x>x$,即有

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j}{x_i}>1,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

由引理 4 便得 $\rho(B)>1$.

对于 iii)⇐,反证,若 $\rho(B)=1$,但 $\rho(\varphi_\omega)\neq 1$,则由 i) 知 $(1-\omega)^2<\rho(\varphi_\omega)<1$ 或 $\rho(\varphi_\omega)>1$. 由 ii)⇐和 iv)⇐即得 $0<\rho(B)<1$ 或 $\rho(B)>1$,与已知 $\rho(B)=1$ 矛盾,所以 $\rho(\varphi_\omega)=1$,

对于 iv)⇒,若 $\rho(B)>1$,但 $\rho(\varphi_\omega)\leqslant 1$,由 ii)、iii)即得 $\rho(B)\leqslant 1$. 矛盾. 所以 $\rho(\varphi_\omega)>1$.

至此已证完本定理结论 i)— iv). 证毕.

由本文定理和文[1]定理 2 即得下述推论.

推论 设线性方程组(1)的系数矩阵 A 不可约,其 Jacobi 阵 $B=L+U\geqslant 0$,则对于 SSOR 迭代矩阵 φ_ω 和 SOR 法迭代矩阵 L_ω,$0<\omega<1$,有:i) $1-\omega<\rho(L_\omega)<1\Leftrightarrow(1-\omega)^2<\rho(\varphi_\omega)<1$; ii) $\rho(L_\omega)=1\Leftrightarrow\rho(\varphi_\omega)=1$; iii) $\rho(L_\omega)>1\Leftrightarrow\rho(\varphi_\omega)>1$. 即 SSOR 法和 SOR 法同时敛散.

4 数值例子

由于 SSOR 法之迭代矩阵

$$\varphi_\omega=(I-\omega U)^{-1}[(1-\omega)I+\omega L](I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I+\omega U],$$

形式较为复杂,计算麻烦,因此要判别其敛散性是比较困难的. 但当方程组(1)之系数矩阵 A 满足本文定理条件时,我们可通过计算其 Jacobi 矩阵 B 之谱半径来判别 SSOR 法之敛散性,这样就简单多了.

例 1 设方程组(1)之系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1/2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -3 & 4\end{bmatrix},$$

因 A 为不可约 矩阵,其 Jacobi 矩阵

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1/2\\ 1 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 3/4 & 0\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

首先由非负矩阵性质有

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\leqslant\rho(B)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij},$$

因此 $\rho(B)\geqslant\min\{\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{4}\}=\frac{5}{4}>1$.

由本文定理知，对于 $0<\omega<1$ 有 $\rho(\varphi_\omega)>1$，即 SSOR 法发散.

例 2　设方程组(1)之系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}4 & -1 & -1\\ 0 & 3 & -1\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix},$$

则 A 为不可约矩阵，其 Jacobi 矩阵

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1/4 & 1/4\\ 0 & 0 & 1/3\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

取 $x=(1,1,5/2)^T$，则 $Bx=(7/8,5/6,2)^T$，$\sum_{j=1}^{3}b_{ij}x_j/x_i=\frac{7}{8},\frac{5}{6},\frac{4}{5}(i=1,2,3)$. 先由引理 4 有

$$0<\frac{4}{5}=\min(\frac{7}{8},\frac{5}{6},\frac{4}{5})\leqslant\rho(B)\leqslant\max(\frac{7}{8},\frac{5}{6},\frac{4}{5})=\frac{7}{8}<1,$$

因此由本文定理知，对于 $0<\omega<1$，有 $(1-\omega)^2<\rho(\varphi_\omega)<1$. 即 SSOR 法收敛.

参 考 文 献

[1] 王新民，关于 L_ω 敛散性的定理，计算数学，1(1980)，63—67.

[2] 陈培贤，AOR 方法的收敛性，计算数学，1(1983)，66—71.

[3] 曾文平，关于 *TOR* 方法的收敛性，高等学校计算数学学报，1(1986)，65—71.

[4] 瓦格，矩阵迭代分析，上海科学技术出版社，(1966).

Convergence and Divergence of SSOR Iteration Method and Jacobi Method

Chen Hengxin

(*Department of Management Information Science*)

Abstract　SSOR iterative method ($0<\omega<1$) and Jacobi iterative method as the methods for solving system of linear equations with irreducible matrix of coefficients are proved to be convergent and divergent simultaneously in case Jacobi maxtrix B is nonnegative. The relation between the spectral radius $\rho(\varphi_\omega)$ of SSOR iterative matrix and $\rho(B)$ is given.

Key word SSOR iterative method , Jacobi iterative method, convergence, divergence