第14卷 第1期　华侨大学学报自然科学版　Vol 14 No.1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年1月　(NATURAL SCIENCE)　Jan. 1993

# 一类周期微分系统的周期解

王 全 义

(管理信息科学系)

**摘要**　本文研究了一类周期微分系统的周期解的存在性问题，利用不动点方法，得到了此类系统存在周期解的充分性条件．所得结果推广了文[1]的主要结果．

**关键词**　微分系统，周期解，存在性，不动点方法

## 0　引言

文[1]、[2]研究了周期微分系统

$$\frac{dx}{dt} = A(t,x)x + g(t,x) \tag{1}$$

的周期解存在性问题，其中 $A(t,x)$ 是 $R\times R^n$ 上的 $n\times n$ 阶的连续函数方阵，且 $A(t,x)=A(t+\omega,x)$，$\omega>0$，$t\in R$，$x\in R^n$；$g(t,x)$ 是 $R\times R^n$ 上的 $n$ 维连续函数向量，且 $g(t+\omega,x)=g(t,x)$. 文[2]在"$A(t,x)$属于某个 Banach 空间中的有界弱闭子集"的假设下，获得该系统周期解存在性定理，但此假设不易验证，从而给定理的应用带来了很大的不便；而文[1]给出了一个可以直接从系统(1)的右端函数性质来判别其周期解存在的定理；本文也研究此系统的周期解的存在性问题，并获得系统(1)存在周期解的若干个定理．这些定理在应用上较之文[2]的结果方便，且推广了文[1]的主要结果．

## 1　周期解存在性定理

我们知道，若 $A(t,x)$ 是 $n\times n$ 阶连续函数方阵且关于 $t$ 以 $\omega$ 为周期，则对称方阵$[A(t,x)+A^*(t,x)]/2$ 的 $n$ 个特征根 $\lambda_j(t,x)(j=1,2,\cdots,n)$也是 $t$ 的 $\omega$-周期函数．记

$$\lambda_M(t,x) \triangleq \lambda_{\max}[A(t,x)] \triangleq \max\{\lambda_j(t,x) \mid j=1,2,\cdots,n\},$$

本文 1991-03-06 收到．
校科研基金资助项目．

$$\lambda_m(t,x) \triangleq \lambda_{\min}[A(t,x)] \triangleq \min\{\lambda_j(t,x) \mid j=1,2,\cdots,n\}.$$

于是 $\lambda_M(t,x)$、$\lambda_m(t,x)$ 都是 $t$ 的 $\omega$-周期函数，且对于固定的 $(t_0,x_0)$，$\lambda_M(t_0,x_0)$($\lambda_m(t_0,x_0)$)取某个 $\lambda_{j_0}(t_0,x_0)$($\lambda_{j_1}(t_0,x_0)$)的值，因此 $\lambda_M(t,x)$、$\lambda_m(t,x)$ 都是 $[A(t,x)+A^*(t,x)]/2$ 的特征根．我们分别称 $\lambda_M(t,x)$，$\lambda_m(t,x)$ 为 $[A(t,x)+A^*(t,x)]/2$ 的最大、最小特征根．

于是有下列结果：

**定理 1** 如果存在着一个连续的 $\omega$-周期函数 $\alpha_1(t)$，使得对任意的 $(t,x)\in[0,\omega]\times R^n$ 有

1) $\lambda_{\max}[A(t,x)]\leqslant\alpha_1(t)$ 且 $k_1=\exp(\int_0^\omega\alpha_1(\tau)d\tau)<1$，

2) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\int_0^\omega\sup\limits_{\|x\|\leqslant n}\|g(t,x)\|dt<\frac{1-k_1}{M_1}$.

其中 $M_1=\sup\{\exp(\int_s^t\alpha_1(\tau)d\tau);0\leqslant s\leqslant t\leqslant\omega\}$；则系统(1)至少存在一个 $\omega$-周期解．

**推论 1** 如果下列条件被满足：

3) 对任意的 $n$ 维连续的 $\omega$-周期函数向量 $u(t)$，线性系统

$$\frac{dx}{dt}=A(t,u(t))x \tag{2}$$

的基本解方阵 $X_u(t)$ 满足

$$\|X_u(t)X_u^{-1}(s)\|\leqslant\beta\exp(-\alpha(t-s)),\quad(t\geqslant s), \tag{3}$$

其中 $\beta$、$\alpha$ 是与 $u$ 无关的正常数；

4) $\overline{\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}}\frac{1}{\|x\|}\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|g(t,x)\|=r$，其中

$$0<r<\alpha/\beta;$$

则系统(1)至少存在着一个 $\omega$-周期解．

**定理 2** 如果存在一个连续的 $\omega$-周期函数 $\alpha_2(t)$，使得对任意的 $(t,x)\in[0,\omega]\times R^n$ 有

5) $\lambda_{\min}[A(t,x)]\geqslant\alpha_2(t)$ 且 $k_2=\exp(\int_0^\omega-\alpha_2(\tau)d\tau)<1$；

6) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{1}{n}\int_0^\omega\sup\limits_{\|x\|\leqslant n}\|g(t,x)\|dt<\frac{1-k_2}{M_2}$，其中

$$M_2=\sup\{\exp(\int_s^t-\alpha_2(\tau)d\tau);0\leqslant s\leqslant t\leqslant\omega\};$$

则系统(1)至少存在着一个 $\omega$-周期解．

**推论 2** 如果系统(1)满足推论 1 中的条件 4)以及下列条件：

7) 对任意的 $n$ 维连续的 $\omega$-周期函数向量 $u(t)$，线性系统(2)的基本解方阵 $X_u(t)$ 满足

$$\|X_u(t)X_u^{-1}(s)\|\leqslant\beta\exp(-\alpha(s-t)),\quad(s\geqslant t), \tag{4}$$

其中 $\beta$、$\alpha$ 是与 $u$ 无关的正常数．则系统(1)至少存在一个 $\omega$-周期解．

**注** 若定理 1 中的 $\alpha_1(t)\leqslant0$ 且它不恒为零，则自然有 $k_1<1$ 且 $M_1=1$．因此文[1]中的主要结果定理 1 及推论 1 显然都包含在本文的定理 1 之中．

## 2 一些引理

为了证明本文的主要定理，我们必须先证下列一些引理．

引理 1 设 $X(t)$是线性系统

$$\frac{dx}{dt}=A_1(t)x \tag{5}$$

的基本解方阵，其中 $A_1(t)$是 $n\times n$ 阶连续函数方阵，则有

$$\| X(t)X^{-1}(s)\| \leqslant \exp(\int_s^t \lambda_M(\tau)d\tau), \quad (t\geqslant s), \tag{6}$$

$$\| X(t)X^{-1}(s)\| \leqslant \exp(\int_t^s -\lambda_m(\tau)d\tau), \quad (s\geqslant t), \tag{7}$$

这里 $\lambda_M(t)$、$\lambda_m(t)$分别是方阵$[A_1(t)+A_1^*(t)]/2$ 的最大、最小特征根．

证 设$[A_1(t)+A_1^*(t)]/2$ 的 $n$ 个特征根分别为 $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t)$，于是 $\lambda_M(t)\geqslant\lambda_i(t)$，$\lambda_i(t)\geqslant\lambda_m(t)$，$i=1,2,\cdots,n$. 又由矩阵理论知有正交的连续函数方阵 $p(t)$使

$$p^*(t)\frac{[A_1(t)+A_1^*(t)]}{2}p(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(t)\end{pmatrix}.$$

先证式(6)成立．设 $x(t)$是方程(5)的任一非零解，令 $x=p(t)y$，则

$$\begin{aligned}\frac{d\|x\|^2}{dt}&=\frac{d}{dt}(x^*\cdot x)=x^*(A_1^*(t)+A_1(t))x\\ &=y^*p^*(t)(A_1^*(t)+A_1(t))P(t)y\\ &=2y^*\begin{pmatrix}\lambda_1(t) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(t)\end{pmatrix}y\\ &\leqslant 2\lambda_M(t)y^*y=2\lambda_M(t)\|y\|^2,\end{aligned}$$

因为 $\|x\|^2=\|y\|^2$，所以

$$\frac{d\|x\|^2}{dt}\leqslant 2\lambda_M(t)\|x\|^2,$$

设 $s\leqslant t$，在区间$[s,t]$上积分上式，则可得

$$\frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|}\leqslant\exp(\int_s^t\lambda_M(\tau)d\tau).$$

又

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| = \sup_{\|x_0\|\neq 0}\frac{\|X(t)X^{-1}(s)x_0\|}{\|x_0\|},$$

记 $x_1=X^{-1}(s)x_0$，则

$$\begin{aligned}\|X(t)X^{-1}(s)\| &= \sup_{\|x_1\|\neq 0}\frac{\|X(t)x_1\|}{\|X(s)x_1\|},\\ &=\sup_{\|x_1\|\neq 0}\frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|}\leqslant exp(\int_s^t\lambda_M(\tau)d\tau),\end{aligned}$$

即式(6)成立．

下证式(7)也成立．考虑方程

$$\frac{dy}{dt}=-A_1^*(t)y \tag{8}$$

的基本解方阵 $Y(t)$，由于 $-\lambda_M(t)$ 是 $-(A_1^*(t)+A_1(t))/2$ 的最大特征根，所以由式(6)知有

$$\|Y(s)Y^{-1}(t)\| \leqslant \exp\left(\int_t^s -\lambda_m(\tau)d\tau\right),\quad (s\geqslant t), \tag{9}$$

又易证 $Y(t)=[X^{-1}(t)]^*$ 是方程(8)的基本解方阵，所以

$$\|Y(s)Y^{-1}(t)\| = \|(X^{-1}(s))^*X^*(t)\| = \|(X(t)X^{-1}(s))^*\| = \|X(t)X^{-1}(s)\|,$$

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leqslant \exp\left(-\int_t^s \lambda_m(\tau)d\tau\right),\quad (s\geqslant t),$$

即式(7)成立．证毕．

引理2　设 $\lambda(t)$ 是以 $\omega$ 为周期的连续函数，则

$$\int_t^{t+\omega}\lambda(\tau)d\tau = \int_0^\omega \lambda(\tau)d\tau.$$

证　令 $F(t)=\int_t^{t+\omega}\lambda(\tau)d\tau$，则 $F'(t)=\lambda(t+\omega)-\lambda(t)=0$，所以 $F(t)=$ 常数，即 $F(t)=F(0)=\int_0^\omega\lambda(\tau)d\tau$．引理2证毕．

考虑下列周期系统

$$\frac{dx}{dt} = A_1(t)x + g(t), \tag{10}$$

其中 $A_1(t)$ 是 $n\times n$ 阶连续函数方阵且 $A_1(t+\omega)=A_1(t)$，$\omega>0$；$g(t)$ 是 $n$ 维连续函数向量且 $g(t+\omega)=g(t)$.

引理3　若 $(A_1(t)+A_1^*(t))/2$ 的最大(小)特征根 $\lambda_M(t)$ $(\lambda_m(t))$ 满足 $k=\exp\left(\int_0^\omega\lambda_M(\tau)d\tau\right)<1$ $\left(k=\exp\left(-\int_0^\omega\lambda_m(\tau)d\tau\right)<1\right)$，则方程(10)存在着唯一的 $\omega$-周期解

$$x(t) = \int_{-\infty}^t X(t)X^{-1}(s)g(s)ds, \tag{11}$$

$$\left(x(t) = -\int_t^{+\infty} X(t)X^{-1}(s)g(s)ds\right), \tag{12}$$

其中 $X(t)$ 是方程

$$\frac{dx}{dt} = A_1(t)x \tag{13}$$

的基本解方阵．

证　引理第一部分的证明：

先证式(11)右端是有界的．因为 $g(t)$ 为连续的周期函数，故可设 $M=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega}\|g(t)\|$．于是由引理1,2得

$$\left\|\int_{-\infty}^t X(t)X^{-1}(s)g(s)ds\right\| \leqslant \int_{-\infty}^t \|X(t)X^{-1}(s)\|\cdot\|g(s)\|ds$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^t \exp\left(\int_s^t\lambda_M(\tau)d\tau\right)Mds$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} M\int_{t-(n+1)\omega}^{t-n\omega}\exp\left(\int_s^t\lambda_M(\tau)d\tau\right)ds$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} M\int_{t-(n+1)\omega}^{t-n\omega}\exp\left[\int_{t-n\omega}^t\lambda_M(\tau)d\tau + \int_s^{t-n\omega}\lambda_m(\tau)d\tau\right]ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} M \cdot k^n \int_{t-(n+1)\omega}^{t-n\omega} \exp\left(\int_s^{t-n\omega} \lambda_M(\tau) d\tau\right) ds$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} M \cdot k^n \cdot \omega \cdot d = \frac{M \cdot \omega \cdot d}{1-k}, \tag{14}$$

其中 $d = \sup\{\exp(\int_s^t \lambda_M(\tau) d\tau), 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \omega\}$．即 $x(t)$是有界的．直接对式(11)两边求导可知 $x(t)$是方程(10)的解．

又因为方程(13)是周期系统，所以 $X(t+\omega)$也是方程(13)的基本解方阵，因此 $X(t+\omega) = X(t)C$，其中 $C$ 为 $n\times n$ 阶非奇异的常数方阵．故 $X(t+\omega)X^{-1}(s+\omega) = X(t)X^{-1}(s)$. 又

$$x(t+\omega) = \int_{-\infty}^{t+\omega} X(t+\omega) X^{-1}(s) g(s) ds$$
$$\underline{\underline{s = \tau + \omega}} \quad \int_{-\infty}^{t} X(t+\omega) X^{-1}(\tau+\omega) g(\tau+\omega) d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{t} X(t) X^{-1}(\tau) g(\tau) d\tau$$
$$= x(t)$$

所以 $x(t)$是方程(10)的 $\omega$-周期解．

由于

$$\| X(t)X^{-1}(s) \| \leqslant \exp\left(\int_s^t \lambda_M(\tau) d\tau\right)$$
$$\leqslant M_3 \exp(-\beta(t-S)), (t \geqslant S),$$

其中 $\beta = -\ln k/\omega > 0$，$M_3 = e^{\beta\omega}$. 即方程(13)在 $R$ 上满足指数型二分法，因而它在 $R$ 上不存在非零的有界解，从而方程(10)的周期解是唯一的．

同理可证引理的第二部分，此处证略．引理 3 证毕．

## 3 定理的证明

1） 定理 1 的证明

设 $B = \{u(t) \in C^n(-\infty, +\infty); u(t+\omega) = u(t)\}$，则 $B$ 在范数 $\| u \| = \sup_{0\leqslant t\leqslant\omega}\{\| u(t) \|\}$下是一个 Banach 空间．

对任意的 $u \in B$，考虑下列周期系统

$$\frac{dx}{dt} = A(t, u(t))x + g(t, u(t)), \tag{14}$$

由条件 1)及引理 3 可知，系统(14)有唯一的 $\omega$-周期解

$$x_u(t) = \int_{-\infty}^{t} X_u(t) X_u^{-1}(s) g(s, u(s)) ds, \tag{15}$$

其中 $X_u(t)$是系统

$$\frac{dx}{dt} = A(t, u(t))x \tag{16}$$

的基本解方阵．

现在定义算子 $T:B\to B$ 如下

$$Tu(t)=x_u(t),\forall\, u\in B, \tag{17}$$

易见算子 $T$ 的不动点就是方程(1)的 $\omega$-周期解．为了利用 Schauder 不动点定理，需证在 $B$ 中存在着一个紧子集 $G$ 使得 $T:G\to G$ 是一个全连续算子，下面来证明这一点．记 $G_n=\{u\mid u\in B$ 且 $\|u\|\leqslant n\}$，其中 $n$ 为自然数．

(1)先证存在着自然数 $N$，使得 $T:G_N\to G_N$．用反证法．若不然，对任意的自然数 $n$，都存在 $u_n\in G_n$，使 $\|Tu_n\|\geqslant n$．于是由条件 1)及引理 1,2 有

$$\begin{aligned}
\frac{\|Tu_n\|}{n}&\leqslant\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{t}\|X_{u_n}(t)X_{u_n}^{-1}(s)\|\cdot\|g(s,u_n(s))\|ds\\
&\leqslant\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{t}\exp\Big(\int_s^t\alpha_1(\tau)d\tau\Big)\|g(s,u_n(s))\|ds\\
&=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{+\infty}\int_{t-(j+1)\omega}^{t-j\omega}\exp\Big(\int_s^t\alpha_1(\tau)d\tau\Big)\|g(s,u_n(s))\|ds\\
&=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{+\infty}\int_{t-(j+1)\omega}^{t-j\omega}\exp\Big(\int_{t-j\omega}^{t}\alpha_1(\tau)d\tau+\int_s^{t-j\omega}\alpha_1(\tau)d\tau\Big)\|g(s,u_n(s))\|ds\\
&\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{+\infty}k_1^n\cdot M_1\int_{t-(j+1)\omega}^{t-j\omega}\|g(s,u_n(s))\|ds\\
&=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{+\infty}k_1^n\cdot M_1\int_0^{\omega}\|g(s,u_n(s))\|ds\\
&=\frac{M_1}{n(1-k_1)}\int_0^{\omega}\|g(s,u_n(s))\|ds,
\end{aligned}\tag{18}$$

从而由条件 2)可得

$$\begin{aligned}
\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\|Tu_n\|}{n}&\leqslant\frac{M_1}{1-k_1}\cdot\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\omega}\|g(s,u_n(s))\|ds,\\
&<\frac{M_1}{1-k_1}\cdot\frac{1-k_1}{M_1}=1.
\end{aligned}$$

这与 $\dfrac{\|Tu_n\|}{n}\geqslant 1$ 相矛盾．故存在着自然数 $N$ 使 $T:G_N\to G_N$．

(2)$TG_N$ 在 $B$ 中是相对的紧致子集．

事实上，因为 $TG_N\subseteq G_N$ 所以 $\{Tu(t)\mid u\in G_N\}$ 是一致有界的．记

$$a_0=\sup\{\|g(t,x)\|\mid(t,x)\in[0,\omega]\times R_N\},$$
$$a_1=\sup\{\|A(t,x)\|\mid(t,x)\in[0,\omega]\times R_N\},$$

其中 $R_N=\{x\mid x\in R^n$ 且 $\|x\|\leqslant N\}$．因为对任意的 $u\in G_N$，有

$$\frac{dTu(t)}{dt}=\frac{dx_u(t)}{dt}=A(t,u(t))Tu(t)+g(t,u(t)),$$

所以

$$\Big\|\frac{dTu(t)}{dt}\Big\|\leqslant a_1N+a_0,$$

故 $\{Tu(t)\mid u\in G_N\}$ 是等度连续的．由 Ascoli-Arzela 定理知，$TG_N$ 是空间 $B$ 中的一个相对紧子集．

(3)$T$ 是 $G_N$ 上的连续算子.

对任意的 $u_1$、$u_2\in G_N$，令 $V=Tu_1-Tu_2$，则

$$\frac{dV}{dt}=A(t,u_1(t))Tu_1(t)+g(t,u_1(t))-A(t,u_2(t))Tu_2(t)-g(t,u_2(t))$$

$$=A(t,u_1(t))V+g_1(t,u_1(t),u_2(t)),\tag{19}$$

其中

$$g_1(t,u_1(t),u_2(t))=[A(t,u_1(t))-A(t,u_2(t))]Tu_2(t)+[g(t,u_1(t))-g(t,u_2(t))].$$

由 $A(t,x)$、$g(t,x)$ 在有界闭子集 $[0,\omega]\times R_N$ 上的连续性和 $\|Tu_2(t)\|\leqslant N$ 可知：当 $\|u_1-u_2\|\to 0$ 时，有

$$\|g_1(t,u_1(t),u_2(t))\|\to 0,\tag{20}$$

由于 $V=Tu_1-Tu_2$ 是系统(19)的 $\omega$-周期解，且由前面(1)部分的证明中可知

$$\|V\|\leqslant\frac{M_1}{1-k_1}\int_0^\omega\|g_1(s,u_1(s),u_2(s))\|ds,$$

从而由式(20)知：当 $\|u_1-u_2\|\to 0$ 时，$\|V\|=\|Tu_1-Tu_2\|\to 0$. 即 $T$ 在 $G_N$ 上是连续算子.

综上述可知，$T:G_N\to G_N$ 为全连续算子. 故由 Schauder 不动点定理知 $T$ 在 $G_N$ 内至少存在一个不动点. 即方程(1)至少存在一个 $\omega$-周期解. 从而定理 1 证毕.

2) 推论 1 的证明

其证明完全类似于定理 1 的证明，只是在估计 $\|Tu_n\|/n$ 的值时有一点小差别而已. 估计过程如下，其余证明从略.

事实上由条件 4)知，存在着常数 $M_4>0$，使得对任意的 $(t,x)\in[0,\omega]\times R^n$ 都有

$$\|g(t,x)\|\leqslant(\gamma+\varepsilon)\|x\|+M_4,\tag{21}$$

其中 $0<\varepsilon<\alpha/\beta-\gamma$. 从而对任意的 $u_n\in G_n$，有

$$\frac{\|Tu_n\|}{n}\leqslant\frac{1}{n}\int_{-\infty}^t\|X_{u_n}(t)X_{u_n}^{-1}(s)\|\cdot\|g(s,u_n(s))\|ds$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\int_{-\infty}^t\beta\exp(-\alpha(t-s))\cdot[(\gamma+\varepsilon)\|u_n\|+M_4]ds$$

$$=\frac{1}{n}[(\gamma+\varepsilon)\|u_n\|+M_4]\frac{\beta}{\alpha},$$

所以

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\|Tu_n\|}{n}\leqslant(\gamma+\varepsilon)\cdot\frac{\beta}{\alpha}<1.$$

3) 定理 2 的证明

利用引理 1 的式(7)、引理 2、引理 3 的式(12)，此定理的证明完全类似于定理 1，证明从略. 至于推论 2 的证明完全类似于推论 1，故证略.

## 参 考 文 献

[1] 李黎明，一类高维非自治系统的周期解，应用数学学报，12，3(1989)，272—290.

[2] Lasota, A., Opial, Z., Ann. Polon. Math., 16(1964), 69—94.

# Periodic Solutions for a Class of Periodic Differential Systems

Wang Quanyi

(*Department of Applied Mathematics*)

**Abstract** The existence of periodic solutions for a class of periodic differential systems is studied in this paper. The sufficient conditions for the existence of such periodic solutions are obtained by means of fixed point method. The results extend the main results of reference [1].

**Kry words** differential system, periodic solutions, existence, fixed point method