第14卷 第1期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol. 14 No. 1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年1月　　(NATURAL SCIENCE)　　Jan. 1993

离散方程组的解不出负的条件*

王子丁

(管理信息科学系)

摘要　本文从讨论矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 非负的条件出发，研究用离散方程组求解微分方程的数值近似解不出负的条件，并列举出一些类型的离散方程组是能满足这些条件．

关键词　矩阵，离散方程，特征值，对角优势，不可约，微分方程

0　引言

无论是用差分法或用有限元法解各类型的微分方程，绝大多数最终归结为多视线性代数方程组的求解．这类线性代数方程组是微分方程的离散近似模拟，称之为离散方程组．离散方程组一般都具有某些重要特征，例如稀疏性、对角优势、不可约性以及病态性质．通过求解离散方程组可得到微分方程的数值近似解，然而，大量微分方程都来源于物理和工程中的实际问题，它们的解所代表的物理量往往都是正的，因此，解是否会出负是一个重要问题这就涉及到离散方程组的解是否会出负，也就是说，对于离散方程组的右端项非负，就要求系数矩阵 A 的逆矩 A^{-1} 为正(记为 $A^{-1}>0$)或非负(记为 $A^{-1}\geqslant 0$)．先讨论 A^{-1} 非负的条件，这些条件可能对实际问题未免有些苛刻，然而确有许多类型的离散方程组能满足这些条件，其它问题可能还得根据具体情况加以讨论．

1　A^{-1} 非负的条件

首先定义如下一些特殊矩阵．

定义1　若 A 为实阵，满足 $a_{ii}>0, a_{ij}\leqslant 0, i,j=1,2,\cdots n, i\neq j$ 时，则称 A 为 L 阵．

定义2　若实阵 A 为对称正定，且以对任意 $i,j,i\neq j$ 有 $a_{ij}\leqslant 0$，则称 A 为 Stieltjes 阵．

定义3　若实阵 A 非奇异，$A^{-1}\geqslant 0$，且对任意的 $i,j,i\neq j$ 有 $a_{ij}\leqslant 0$，称 A 为 M 阵．

定理1　若实阵 A 的特征值实部为正，又 $i\neq j$ 时 $a_{ij}\leqslant 0$，则 $A^{-1}\geqslant 0$.

本文1991-11-08收到．

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.c

证　由于 A 的特征值不为零，故 A^{-1} 存在，设 $\alpha>0$ 为一待定常数，由

$$A^{-1}=(\alpha I-\alpha I+A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}[I-(I-\frac{1}{\alpha}A)]^{-1}=\frac{1}{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}(I-\frac{1}{\alpha}A)^{m}$$

的后一等式，当 $I-(1/\alpha)A$ 特征值的模小于1时成立．设 $a_k+ib_k(k=1,2,\cdots,n,)$ 为 A 的特征值，则上式成立条件为

$$(1-(1/\alpha)a_K)^2+((1/\alpha)b_k)^2<1,(k=1,2,\cdots,n,),$$

由于 $a_k>0(k=1,2,\cdots,n,)$，故得条件 $\alpha>(a_k^2+b_k^2)/2a_k,(k=1,2,\cdots,n,)$. 现取

$$\alpha>\max\{\frac{a_1^2+b_1^2}{2a_1},\cdots,\frac{a_n^2+b_n^2}{2a_n},|a_{11}|,\cdots,|a_{nn}|\},$$

则上式 A^{-1} 的展式成立，且由于 α 大于 A 的对角线元素的模，故 $I-(1/2)A\geqslant0$，从而

$$A^{-1}=\frac{1}{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}(I-\frac{1}{\alpha}A)^{m}\geqslant0.$$

证毕．

由正定矩阵的特征值大于零，故得

推论1　若 A 为 Stielties 阵，则 A 为 M 阵．

定理2　若 A 为 L 阵，则 A 为 M 阵的充分必要条件为 B 的特征值的模小于1. 这里 B 为 Jacobi 迭代阵，即 $B=D^{-1}C$，D 为 A 对角线元素组成的对角阵，$C=D-A$.

证　充分性. 若 B 的特征值的模小于1，则

$$(I-D^{-1}C)^{-1}=I+(D^{-1}C)+(D^{-1}C)^2+\cdots\geqslant0,$$

由于 $A=D-C=D(I-D^{-1}C)$，由二个非奇异矩阵的求积之阵也是非奇异矩阵，故 A^{-1} 存在，且

$$A^{-1}=[D(I-D^{-1}C)]^{-1}=(I-D^{-1}C)^{-1}D^{-1}\geqslant0.$$

必要性. 设 A 为 M 阵，由 A 非奇异，故 $D^{-1}A$ 非奇异，但 $D^{-1}A=I-D^{-1}C$ 故 $I-D^{-1}C$ 非奇异，从而 $(I-D^{-1}C)^{-1}$ 存在，则矩阵简单乘法可知

$$(I-D^{-1}C)[I+(D^{-1}C)+\cdots+(D^{-1}C)^m]=I-(D^{-1}C)^{m+1},$$

两边左乘 $(I-D^{-1}C)^{-1}$ 并移项得

$$(I-D^{-1}C)^{-1}=[I+(D^{-1}C)+\cdots+(D^{-1}C)^m]+(1-D^{-1}C)^{-1}(D^{-1}C)^{m+1},$$

由于 $a_{ij}\leqslant0$，故 $(D^{-1}C)\geqslant0$，从而 $(D^{-1}C)^2,\cdots,(D^{-1}C)^{m+1}\geqslant0$.

另一方面，由于 $A^{-1}\geqslant0$，故

$$(I-D^{-1}C)^{-1}=(D^{-1}A)^{-1}=A^{-1}D\geqslant0,$$

从而有 $I+(D^{-1}C)+\cdots+(D^{-1}C)^m$ 是随 m 而单调增加或不减，而且有相应的上界，即级数 $I+(D^{-1}C)^2+\cdots$ 收敛．而矩阵级数收敛的充要条件是 $D^{-1}C$ 特征值的模小于1，故得 $B=D^{-1}C$ 的特征值的模小于1. 定理证毕．

对于离散方程组

$$AU=b,$$

我们注意到 $|\lambda(B)|<1$ 是 Jacpbo 迭代

$$U(s+1)=BU(s)+D^{-1}b$$

收敛的充要条件，而 A 为强对角优势或不可约弱对角优势时，这个迭代收敛．因之可得

推论2　若 A 为 L 阵，强对角优势或不可约弱对角优势，则 A 为 M 阵．

这样，若 A 为 L 阵，当 A 正定或强对角优势或不可约对角优势，离散方程组 $Au=b$，只要 b

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.c

非负，其解一定非负的．这里有一个较苛刻的条件就是 $a_{ij}\leqslant 0, i,j=1,\cdots,n, i\neq j$，但的确有一些类型的离散方程组是能够满足这条件的．

2 例子

例 1 考虑二阶常微分边值问题

$$-\frac{d^u}{dx^2}+qu=f, a<x<b,$$

$$u(a)=\alpha, \quad u(b)=\beta,$$

其中 q、f 在 $[a,b]$ 上连续，$q,f\geqslant 0$，α,β 为常数，取步长 h 将它离散化得到离散方程

$$-\frac{u_{i+1}-2u_i+2u_{i-1}}{h^2}+qu_i=f_i, \qquad i=1,2,\cdots,N-1,$$

$$u_0=\alpha, \qquad u_N=\beta,$$

即有 $Au=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix} \frac{2}{h^2}+q_1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+q_2 & -\frac{1}{h^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+q_{N-2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+q_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$b=(f_1 f_2,\cdots,f_{N-1})^T,$$

显然，A 是 L 阵，并且是不可约弱对角优势，(当 $q>0$ 时，为强对角优势)．

例 2 对于椭圆方程

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-g(x,y)u+f(x,y)=o,(x,y)\in G,$$

$$u=\varphi, \quad x\in\Gamma$$

的第一边值问题，a,b,g,f，在 $G+\Gamma$ 上连续，并且 $a,b,>0,g,f\geqslant 0$．取步长 $h=\Delta x, k=\Delta y$，若用五点差分格式

$$a_{ij}\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+b_{ij}\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{k^2}-g_{ij}u_{ij}+f_{ij}=0,$$

合并同类项得

$$-\frac{b_{ij}}{k^2}u_{ij-1}-\frac{a_{ij}}{h^2}u_{i-1,j}+(\frac{2a_{ij}}{h^2}+\frac{2b_{ij}}{k^2}+g_{ij})u_{ij}$$

$$-\frac{a_{ij}}{h^2}u_{i+1,j}-\frac{b_{ij}}{k^2}u_{i,j+1}=f_{i,j},$$

这离散方程组的系数矩阵也是 L 阵，且不可约弱对角优势．(当 $g>0$ 时，为强对角优势)，但它不是对称的．若将方程

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.c

$$\frac{\partial}{\partial x}a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}-g(x,y)+f(x,y)=0$$

代以

$$\left(a_{i+\frac{1}{2},j}\frac{u_{i+1,j}-u_{ij}}{h}-a_{i-\frac{1}{2},j}\frac{u_{ij}-u_{i-\frac{1}{2},j}}{h}\right)/h$$

$$+\left(b_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}-b_{i,j-\frac{1}{2}}\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k}\right)/k-g_{i,j}u_{i,j}+f_{i,j}=0,$$

则所得方程组系数矩阵为 L 阵，且对称，不可约弱对角优势，($g>0$ 时，为强对角优势)，因而也是正定的．从而只要方程组右端非负，那么解一定非负．并且可用 Jacobi 迭代和 SOR 迭代来求解．

同样对二维抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}-g(x,y)+f(x,y)$$

的五点全隐式或隐式交替方向格式，所得离散方程组的系数矩阵也如此．

参考文献

[1] Meis, T., Marcowitz, U., *Numerical solution of partial differential equation*, Springer-verlag, (1981).

[2] Varga, R. S. (蒋尔雄等译)，矩阵迭代分析，上海科技出版社，(1966).

[3] 李荣华、冯果忱，微分方程数值解法，人民教育出版社，(1980).

The Nonnegativity Condition of the Solution of Discrete Equations

Wang　Ziding

(*Department of Management System*)

Abstract In solving differential equation by means of discrete equations ,the nonnegativity conditions of numerical approximate solution are studied and some types of discrete equations which will satisfy the condition are enumerated. The study starts from a discussion on the nonnegativity condition of the inverse matrix $A^{-1}$of matricesx A.

Key words matricesx, discrete equation, characteristic values, diagonal dominance, irreducible, differential equation

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.c