第14卷 第1期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 14 №. 1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1993年1月 (NATURAL SCIENCE) Jan. 1993

关于SAOR方法的某些新结果*

曾 文 平

(管理信息科学系)

摘要 本文研究解大线性系统的对称的AOR(SAOR)方法．讨论了SAOR迭代的收敛性，进一步扩充了文[1]的结果，并在系数矩阵是对称正定矩阵的情况下，给出SAOR迭代谱半径的估计式．

关键词 收敛性，谱半径，SAOR方法，大线性系统

0 引言

解大线性方程组

$$Ax = b,\quad A \in C^{n,n},\quad \det A \neq 0,且\ x,b \in C^n \tag{1}$$

的迭代法很多．在文[2]中为了加速收敛也建立了SSOR方法．1978年，A. Hadjidimos在文[3]中提出AOR方法，他引入两个参数(ω,γ)以加速迭代．类似于SSOR方法，随后他又建立了对称的AOR(SAOR)方法[1]．事实上，对自适应红/黑排序而言，AOR方法收敛较快[4]，类似于上述考虑，目前已有若干文章继续研究SAOR方法的收敛性及其加速方法[5,6]．

本文目的在于进一步讨论SAOR方法的收敛性，扩充了文[1]的结果，并给出当系数矩阵A正定时，谱半径的估计式．

1 SAOR方法

设线性方程组(1)的系数矩阵

$$A = D - A_L - A_U, \tag{2}$$

本文1991-09-10收到．

福建省自然科学基金资助课题．

其中 D、$-A_L$、$-A_{\bar{v}}$ 分别为 A 的对角、严格下三角及上三角矩阵．

SAOR 方法(Symmetric Accelerated Overrelaxation Method)可以看作由两个半迭代所组成．其第一个半迭代即是 AOR 方法本身；而第二个半迭代则是 A_L 和 $A_{\bar{v}}$ 互换的 AOR 方法．于是，可利用通常的(Forward)AOR 方法由 x_K 决定 $x_{k+1/2}$，即

$$x_{k+1/2} = L_{\omega,\gamma}x_k + \omega(D_1 - \gamma A_L)^{-1}b, \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned} L_{\omega,\gamma} &= (D - \gamma A_L)^{-1}[(1-\omega)D + (\omega-\gamma)A_L + \omega A_{\bar{v}}] \quad I - \omega(D - \gamma A_L)^{-1}A \\ &= (I - \gamma L)^{-1}[(1-\omega)I + (\omega-\gamma)L + \omega\bar{v}], \end{aligned} \tag{4}$$

这里

$$L = D^{-1}A_L, \quad \bar{v} = D^{-1}A_{\bar{v}} \tag{5}$$

再由(Backward)AOR 方法从 $x_{k+1/2}$决定 x_{k+1}得

$$x_{k+1} = U_{\omega,\gamma}x_{k+1/2} + \omega(D - \gamma A_{\bar{v}})^{-1}b, \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} U_{\omega,\gamma} &= (D - \gamma A_{\bar{v}})^{-1}[(1-\omega)D + (\omega-\gamma)A_{\bar{v}} + \omega A_L] = I - \omega(D - \gamma A_{\bar{v}})^{-1}A \\ &= (I - \gamma\bar{v})^{-1}[1-\omega)I + (\omega-\gamma)\bar{v} + \omega L]. \end{aligned} \tag{7}$$

从式(3)和式(6)消去 $x_{k+1/2}$得 SAOR 迭代

$$x_{k+1} = \Psi_{\omega,\gamma}\chi_k + c, \tag{8}$$

其中 $\Psi_{\omega,\gamma}$为 SAOR 迭代矩阵，其表达式为

$$\begin{aligned} \Psi_{\omega,\gamma} &= u_{\omega,\gamma}L_{\omega,\gamma} \\ &= I - \omega(D - \gamma A_{\bar{v}})^{-1}[(2-\omega)D - (\gamma-\omega)(A_L + A_{\bar{v}})](D - \gamma A_L)^{-1}A \\ &= I - (I - \gamma\bar{v})^{-1}M(\omega,\gamma)(I - \gamma L)^{-1}A \end{aligned} \tag{9}$$

这里

$$M(\omega,\gamma) = \omega[(2-\omega)I - (\gamma-\omega)B], \tag{10}$$

$$B = I - D^{-1}A = D^{-1}(A_L + A_{\bar{v}}) = L + \bar{v}\text{、为 Jacobi 阵}, \tag{11}$$

而

$$\begin{aligned} C &= \omega U_{\omega,\gamma}(D - \gamma A_L)^{-1}b + \omega(D - \gamma A_{\bar{v}})^{-1}b \\ &= (D - \gamma A_{\bar{v}})^{-1}M(\omega,\gamma)(D - \gamma A_L)^{-1}b \\ &= [I - \Psi_{\omega,\gamma}]A^{-1}b, \end{aligned} \tag{12}$$

由式(9)可得 $I-\Psi_{\omega,\gamma}=(D-\gamma A_{\bar{v}})^{-1}M(\omega,\gamma)(D-\gamma A_L)^{-1}A$. 因此，当 A 及 $M(\omega,\gamma)$ 非奇异，且 $\det D\neq 0$ 时，$I-\Psi_{\omega,\gamma}$非奇异，进而由式(12)，根据文[2]定理 3—2.2 及定理 3—2.4 推出 SAOR 方法与方程组(1)是完全相容的．

2 收敛性分析

在这一节我们考虑系数矩阵 A 为正定矩阵的情况．因 A 为正定矩阵，故存在对称正定矩阵 $A^{\frac{1}{2}}$使 $A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}=A$. 令

$$\begin{cases}\Psi'_{\omega,\gamma}=A^{\frac{1}{2}}\Psi_{\omega,\gamma}A^{-\frac{1}{2}},\\ L'_{\omega,\gamma}=A^{\frac{1}{2}}L_{\omega,\gamma}A^{-\frac{1}{2}},\\ U'_{\omega,\gamma}=A^{\frac{1}{2}}U_{\omega,\gamma}A^{-\frac{1}{2}},\end{cases}\tag{13}$$

于是

$$\begin{cases}L'_{\omega,\gamma}=I-\omega A^{\frac{1}{2}}(D-\gamma A_L)^{-1}A^{\frac{1}{2}},\\ U'_{\omega,\gamma}=I-\omega A^{\frac{1}{2}}(D-\gamma A_{\bar{v}})^{-1}A^{\frac{1}{2}},\end{cases}\tag{14}$$

且 $(L'_{\omega,\gamma})^T=U'_{\omega,\gamma}$. 因此，

$$\begin{aligned}\Psi_{\omega,\gamma}&=A^{\frac{1}{2}}\Psi_{\omega,\gamma}A^{-\frac{1}{2}}=A^{\frac{1}{2}}U_{\omega,\gamma}L_{\omega,\gamma}A^{-\frac{1}{2}}\\&=A^{\frac{1}{2}}U_{\omega,\gamma}A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}L_{\omega,\gamma}A^{-\frac{1}{2}}\\&=U'_{\omega,\gamma}L'_{\omega,\gamma}=(L'_{\omega,\gamma})^TL'_{\omega,\gamma},\end{aligned}\tag{15}$$

由此推出 $\Psi'_{\omega,\gamma}$ 非负定且有非负特征值. 因 $\Psi_{\omega,\gamma}$ 相似于 $\Psi'_{\omega,\gamma}$，于是有

引理 1　如果 $A=D-A_L-A_{\bar{v}}$ 为正定矩阵，则相应的 SAOR 迭代矩阵 $\Psi_{\omega,\gamma}$ 非负定且有非负特征值.

下面证明

引理 2　若 A 正定，则

$$\rho(\Psi_{\omega,\gamma})=\|\Psi_{\omega,\gamma}\|_A{}^{1/2}=\|L_{\omega,\gamma}\|_A^{2\,1/2}<1,$$

当仅当矩阵(10)即 $M=\omega[(2-\omega)I+(\omega-\gamma)B]$ 正定(特征值为正实数). 其中 $\rho(\Psi_{\omega,\gamma})$ 是 SAOR 迭代矩阵 $\Psi_{\omega,\gamma}$ 的谱半径，$\|\Psi_{\omega,\gamma}\|_A{}^{1/2}$ 是 $A^{\frac{1}{2}}\Psi_{\omega,\gamma}A^{-\frac{1}{2}}$ 的 2-范数，$B=D^{-1}(A_L+A_{\bar{v}})$ 为 Jacobi 迭代矩阵.

证明

$$\begin{aligned}\Psi'_{\omega,\gamma}&=U'_{\omega,\gamma}L'_{\omega,\gamma}=(L'_{\omega,\gamma})^T(L'_{\omega,\gamma})\\&=[I-\omega A^{\frac{1}{2}}(D-\gamma A_{\bar{v}})^{-1}A^{\frac{1}{2}}][I-\omega A^{\frac{1}{2}}(D-\gamma A_L)^{-1}A^{\frac{1}{2}}]\\&=I-A^{\frac{1}{2}}(D-\gamma A_{\bar{v}})^{-1}\cdot\omega[(2-\omega)D+(\omega-\gamma)(A_L+A_{\bar{v}})](D-\gamma A_L)^{-1}A^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{16}$$

由引理 1 知，$\Psi'_{\omega,\gamma}$ 的全部特征值小于 1 当且仅当

$$\begin{aligned}&\omega[(2-\omega)D+(\omega-\gamma)(A_L+A_{\bar{v}})]\\&=D^{\frac{1}{2}}\omega[(2-\omega)I+(\omega-\gamma)D^{-\frac{1}{2}}D\,B\,D^{-\frac{1}{2}}]D^{\frac{1}{2}}\\&=D^{\frac{1}{2}}\omega[(2-\omega)I+(\omega-\gamma)D^{\frac{1}{2}}B\,D^{-\frac{1}{2}}]D^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

正定. 显然，$D^{\frac{1}{2}}\omega[(2-\omega)I+(\omega-\gamma)D^{\frac{1}{2}}B\,D^{-\frac{1}{2}}]D^{\frac{1}{2}}$ 正定，当且仅当 $M=\omega[(2-\omega)I+(\omega-\gamma)B]$ 有实的正的特征值. 由式(13)知 $\Psi'_{\omega,\gamma}$ 相似于 $\Psi_{\omega,\gamma}$，故两者有相同特征值，引理 2 证毕.

当式(11)定义的 B 的特征值 $\{\mu_i,i=1,2,\cdots,n\}$ 均为实数时，记

$$\underline{\mu}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\mu_i,\quad \bar{\mu}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\mu_i,$$

定义集合 $J(\gamma,\omega)=J_{-1}(\gamma,\omega)\cup J_{-2}(\gamma,\omega)\cup J_1(\gamma,\omega)\cup J_2(\gamma,\omega)\cup J_3(\gamma,\omega)$，其中 $J_i(\gamma,\omega)\,(i=-1,-2,1,2,3)$ 为满足下列条件的集合

(i)　$J_{-1}(\omega,\gamma)=\{(\omega,\gamma)\,|\,\omega<0,\gamma>\omega+\dfrac{2-\omega}{\underline{\mu}},\underline{\mu}>o\}$,

(ii) $J_{-2}(\omega,\gamma)=\{(\omega,\gamma)\mid\omega<0,\gamma<\omega+\frac{2-\omega}{\mu},\bar{\mu}<0\}$,

(iii) $J_1(\omega,\gamma)=E_1\cup E'_1$,其中

$$E_1=\{(\omega,\gamma)\mid 0<\omega\leqslant 2,\gamma<\omega+\frac{2-\omega}{\mu},\underline{\mu}>0\},$$

$$E'_1=\{(\omega,\gamma)\mid\omega>2,\gamma<\omega+\frac{2-\omega}{\underline{\mu}},\underline{\mu}>0\},$$

(iv) $J_2(\omega,\gamma)=E_2\cup E'_2$ 其中

$$E_2=\{(\omega,\gamma)\mid 0<\omega\leqslant 2,\gamma>\omega+\frac{2-\omega}{\underline{\mu}},\bar{\mu}<0\},$$

$$E'_2=\{(\omega,\gamma)\mid\omega>2,\gamma>\omega+\frac{2-\omega}{\mu},\bar{\mu}<0\},$$

(v) $J_3=\{(\omega,\gamma)\mid 0<\omega<2,\gamma_L<\gamma<\gamma_{\bar{v}}\}$,其中

$$\gamma_L=\begin{cases}\omega+\dfrac{2-\omega}{\underline{\mu}}, & 当\ \underline{\mu}<0,\\ -\infty, & 当\ \underline{\mu}=0,\end{cases}$$

$$\gamma_{\bar{v}}=\begin{cases}\omega+\dfrac{2-\omega}{\bar{\mu}}, & 当\ \bar{\mu}>0,\\ +\infty, & 当\ \bar{\mu}=0.\end{cases}$$

则由引理 2 立即得到

定理 1 若 A 实对称正定,当且仅当 $(\gamma,\omega)\in J(\gamma,\omega)$,则 SAOR 方法收敛,即 $\rho(\Psi_{\omega,\gamma})<1$. 这一结果包含了文[1]中定理 1 的结论.

3 谱半径的估计

在式(16)中,令

$$R^{-1}(\omega,\gamma)=A^{\frac{1}{2}}(D-\gamma A_{\bar{v}})^{-1}\omega[(2-\omega)D+(\omega-\gamma)(A_L+A_{\bar{v}})](D-\gamma A_L)^{-1}A^{\frac{1}{2}},\quad(17)$$

由引理 2 证明知矩阵

$$R(\omega,\gamma)=A^{\frac{1}{2}}(D-\gamma A_L)\omega[(2-\omega)D+(\omega-\gamma)(A_L+A_{\bar{v}})](D-\gamma A_{\bar{v}})A^{-\frac{1}{2}},\quad(18)$$

特征值位于$[1,+\infty)$. 因此,

$$H(\omega,\gamma)=A^{-\frac{1}{2}}(D-\gamma A_L)\omega[(2-\omega)D+(\omega-\gamma)(A_L+A_{\bar{v}})](D-\gamma A_{\bar{v}}),\quad(19)$$

其特征值也位于$[1,+\infty)$. 令

$$\lambda(\omega,\gamma)=\rho(H(\omega,\gamma))=\rho(R(\omega,\gamma)),$$

则存在一向量 y 使得

$$H(\omega,\gamma)y=\lambda(\omega,\gamma)y,\quad(20)$$

或

$$(D-\gamma A_L)\omega[(2-\omega)D+(\omega-\gamma)(A_L+A_{\bar{v}})]^{-1}(D-\gamma A_{\bar{v}})y=\lambda Ay,\quad(21)$$

于是

$$\lambda(\omega,\gamma) = \frac{y^T(D-\gamma A_L)D^{-\frac{1}{2}}\omega[(2-\omega)I+(\omega-\gamma)D^{-\frac{1}{2}}(A_L+A_{\bar{v}})D^{-\frac{1}{2}}]^{-1}D^{-\frac{1}{2}}(D-\gamma A_{\bar{v}})y}{y^TAy}, \tag{22}$$

再令

$$\begin{cases} y' = D^{\frac{1}{2}}y, \\ \overline{B} = D^{-\frac{1}{2}}(A_L+A_{\bar{v}})D^{-\frac{1}{2}} = D^{\frac{1}{2}}B\,D^{-\frac{1}{2}}, \end{cases} \tag{23}$$

假设 $\lambda_{\min}$ 是 $\omega[(2-\omega)I+(\omega-\gamma)\overline{B}]$ 的最小特征值，则 $\lambda_{\min}$ 也是 $\omega[(2-\omega)I+(\omega-\gamma)B]=M$ 的最小特征值．由式(22)得

$$\lambda(\omega,\gamma) \leqslant \frac{1}{\lambda_{\min}}\left(\frac{y'^Ty'-\gamma y'^T\overline{B}y'+\gamma^2y'^T(D^{-\frac{1}{2}}A_LD^{-1}A_{\bar{v}}D^{-\frac{1}{2}})y'}{y'^Ty-y'^T\overline{B}y'}\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda_{\min}}\cdot\frac{1-\gamma\eta+\gamma^2\overline{\beta}}{1-\eta}, \tag{24}$$

其中

$$\eta = \frac{y'^T\overline{B}y'}{y'^Ty'} \leqslant \rho(\overline{B}) = \rho(B), \tag{25}$$

$$\overline{\beta} = \frac{y'^T(D^{-\frac{1}{2}}A_LD^{-1}A_{\bar{v}}D^{-\frac{1}{2}})y'}{y'^Ty'}$$

$$\leqslant\rho(D^{-\frac{1}{2}}A_LD^{-1}A_{\bar{v}}D^{-\frac{1}{2}}) = \rho(D^{\frac{1}{2}}D^{-1}A_LD^{-1}A_{\bar{v}}D^{-\frac{1}{2}})$$

$$=\rho(D^{\frac{1}{2}}L\bar{v}D^{\frac{1}{2}}) = \rho(L\bar{v}). \tag{26}$$

于是证明了如下定理

定理 2 如果 $A=D-A_L-A_{\bar{v}}$ 实对称正定，则

$$\rho(\Psi_{\omega,\gamma}) = \|\Psi_{\omega,\gamma}\|_A^{1/2} \leqslant 1-\frac{\lambda_{\min}(1-\eta)}{1-\gamma\eta+\gamma^2\overline{\beta}}, \tag{27}$$

其中 η、$\overline{\beta}$ 分别为式(25)、(26)所确定，$\lambda_{\min}$ 是 $M=\omega[(2-\omega)I+(\omega-\gamma)B]$ 的最小特征值．

假定系数矩阵 A 具有性质 A，于是 $\overline{\mu}=\rho(B)$ 及 $-\overline{\mu}$ 都是 B 的特征值，因此

$$\lambda_{\min} = \begin{cases} \omega[(2-\omega)-(\omega-\gamma)\overline{\mu}], \text{如果 } \gamma<\omega, \\ \omega[(2-\omega)+(\omega-\gamma)\overline{\mu}], \text{如果 } \gamma\geqslant\omega, \end{cases} \tag{28}$$

由收敛性引理 2 知，要使 $\rho(\Psi_{\omega,\gamma})=\|\Psi_{\omega,\gamma}\|_A^{1/2}<1$，当且仅当 $\lambda_{\min}>0$．因为 $\underline{\mu}=-\overline{\mu}<0<\overline{\mu}=\rho(B)$，由定理 1 知，此时当且仅当

$$\begin{cases} 0<\omega<2 \\ \omega-\frac{2-\omega}{\overline{\mu}}<\gamma<\omega<+\frac{2-\omega}{\overline{\mu}}, \end{cases} \tag{29}$$

所以

$$\lambda_{\min} = \begin{cases} \omega[(2-\omega)-(\omega-\gamma)\overline{\mu}], \omega-\frac{2-\omega}{\overline{\mu}}<\gamma<\omega, \\ \omega[(2-\omega)+(\omega-\gamma)\overline{\mu}], \omega\leqslant\gamma<\omega+\frac{2-\omega}{\overline{\mu}}, \end{cases} \tag{30}$$

令

$$f(\eta)=\frac{1-\gamma\eta+\gamma^2\bar{\beta}}{1-\eta},\tag{31}$$

则

$$f'(\eta)=\frac{1-\gamma+\gamma^2\bar{\beta}}{(1-\eta)^2}>0,(\text{当 }\bar{\beta}\geqslant\frac{1}{4}).$$

于是，由式(25)我们有

$$f(\eta)\leqslant\frac{1-\gamma\bar{\mu}+\gamma^2\bar{\beta}}{1-\mu},\tag{32}$$

其中

$$\bar{\beta}=\max\{\rho(L\bar{\nu}),1/4\},\tag{33}$$

于是有

推论 1 如果 A 实对称正定，且具有性质 A，当且仅当(ω,γ)满足式(29)时，

$$\rho(\Psi_{\omega,\gamma})=\|\Psi_{\omega,\gamma}\|_A{}^{1/2}\leqslant1-\frac{\lambda_{\min}(1-\bar{\mu})}{1-\gamma\bar{\mu}+\gamma^2\bar{\beta}},\tag{34}$$

其中，$\bar{\mu}=\rho(B)$为 Jacobi 迭代矩阵的谱半径，$\bar{\beta}$、$\lambda_{\min}$分别为式(26)、(30)所确定．

4 不同分裂

下面考虑 A 的不同分裂．考虑 $A,D,S\in(C^{n,n})$使得

$$\begin{cases}\text{(i)}\quad A\text{ 与 }D\text{ 是 Hermitian 正定,}\\ \text{(ii)}\quad S\text{ 是斜 Hermitian 矩阵,即 }S^H=-S.\end{cases}\tag{35}$$

定义

$$A_L=(1/2)(D-A+S),\tag{36}$$

则

$$A=D-A_L-A_L^H.\tag{37}$$

一般说来，由式(36)所定义的 A_L 未必是严格下三角矩阵，不过，在式(35)的假设下，对于 $0\leqslant\gamma\leqslant2$，矩阵 $D-\gamma L=(1/2)[(2-\gamma)D+\gamma A-\gamma S]$是非奇异的(因对$\forall\ \nu\in C^n$，$\mathrm{Re}(S\nu,\nu)=0$. 所以，当 $\gamma\in[0,2]$时，$\mathrm{Re}((D-\gamma L)\nu,\nu)>0,\forall\ \nu\in C^n,\nu\neq0$)在此情况下，相应的 SAOR 迭代矩阵为

$$\begin{aligned}\Psi_{\omega,\gamma}&=U_{\omega,\gamma}L_{\omega,\gamma}\\&=\{[(2-\gamma)D+\gamma A+\gamma S]^{-1}[(2-\gamma)D-(2\omega-\gamma)A+\gamma S]\}\\&\quad\cdot\{[(2-\gamma)D+\gamma A-\gamma S]^{-1}[(2-\gamma)D-(2\omega-\gamma)A-\gamma S]\}\\&=I-[(2-\gamma)D+\gamma A+\gamma S]^{-1}M(\omega,\gamma)[(2-\gamma)D+\gamma A-\gamma S]^{-1}A,\end{aligned}\tag{38}$$

其中

$$M(\omega,\gamma)=4\omega[(2-\omega)D+(\omega-\gamma)B].\tag{39}$$

引理 3[8] 在式(35)、(36)的假设下，当 $0<\omega\leqslant\gamma<2$ 或 $0<\omega<\gamma\leqslant2$ 时，则 AOR 方法收敛，即

$$\rho(L_{\omega,\gamma})<1,\tag{40}$$

由此有

定理 3　在式(36)及式(37)的假设下，且当 $0<\omega\leqslant\gamma<2$ 或 $0<\omega<\gamma\leqslant 2$ 时，则有 $\rho(\Psi_{\omega,\gamma})<1$，即 SAOR 迭代是收敛的．

证明　显然，当 A 是 Hermitian 正定时，式(13)—(15)仍成立，因此

$$\rho(\Psi_{\omega,\gamma})=\rho(\Psi'_{\omega,\gamma})=\|\Psi'_{\omega,\gamma}\|_A{}^{1/2}=\|(L'_{\omega,\gamma})^H(L'_{\omega,\gamma})\|_A{}^{1/2}$$
$$\leqslant\|(L'_{\omega,\gamma})^H\|_A{}^{1/2}\|L'_{\omega,\gamma}\|_A{}^{1/2}=\rho(L'^H_{\omega,\gamma})\rho(L'_{\omega,\gamma})$$
$$=\rho(L^H_{\omega,\gamma})\rho(L_{\omega,\gamma})=\rho^2(L_{\omega,\gamma}).$$

由引理 3，便得 $\rho(\Psi_{\omega,\gamma})<\rho^2(L_{\omega,\gamma})<1$，定理 3 证毕．

顺便指出，本文第 2—3 节的结论及文[1]定理 2 均可推广至 Hermitian 正定矩阵的情况，因篇幅所限，不再赘述．

参 考 文 献

[1] Hadjidimos, A. and Yeyios, A., *Math. comp. in simulation*, 24(1982), 72—76.

[2] Young, D. M., *Iterative solution of Large Linear systems*, Academic press, New York, (1971).

[3] Hadjidimos, A., *Math. comp.*, 32(1978), 149—157.

[4] Ohsaki, I., Ikeuchi, M. and Niki, H., Accelerated Overrelaxation-red/black ordering algorithm, in: *Proceedings of the 27 the National congress* (IPSJ, Tokyo), (1983)1277—1278.

[5] Yamada, S., *J. comput. and Appl. Math.*, 12(1985), 635—650.

[6] Evans, D. J. and Li, C., *J. Comput. and Appl. Math.*, 231(1988), 267—279.

[7] Varga, R. S., *Matrix Iterative Analysis*, New Jersey, prentice-Hall, (1962).

[8] 胡关初、汤健康，关于 AOR 方法的某些新结果，杭州大学学报，12，3(1985)，294—299.

[9] Evans, D. J. and Li, C., *L. A. A.*, 103(1988), 149—173.

Some New Results of the Symmetric Accelerated Overrelaxation (SAOR) Method

Zeng Wenping

(*Department of Management Information Science*)

Abstract　For solving large linear systems, the method of symmetric accelerated overrelaxation (SAOR) is studied. The convergence of SAORiteration is discussed and the results of reference [2] is further extended. With a matrix of coefficients acts as symmetric positive definite matrix, an formula for estimating spectral radius of SAOR iteration is given.

Key words　convergence, spectral radius, symmetric accelerated overrelaxation (SAOR) method, large linear systems