第13卷 第4期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 13 №. 4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年10月 (NATURAL SCIENCE) Oct. 1992

切比雪夫逼近多项式在非线性电路中的应用*

李 炳 坤

(电子工程系)

摘要 本文介绍用切比雪夫逼近多项式分析非线性电路的方法以及用计算机实现的例子.

关键词 切比雪夫逼近多项式,非线性电路,计算机

0 引言

用计算机分析和计算非线性电路一般常采用泰勒级数展开法和折线法.这两种方法都有一定的局限性.前者仅适用于动态工作范围小的非线性电路;后者的计算精度较低.切比雪夫逼近多项式近似法克服了以上的缺点,而且便于计算机实现.

1 切比雪夫逼近多项式的确定

切比雪夫逼近多项式定义为

$$T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x),\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \tag{1}$$

是区间[-1,1]上权为 $\omega(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的正交多项式.若记 $\cos\theta=x$,则有

$$T_n(x) = \cos n\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

1.1 切比雪夫逼近多项式的基本性质

性质1为

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \\ T_{k+1}(x+1) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), k = 1,2\cdots \end{cases} \tag{2}$$

性质2. $T_n(x)$是最高次项系数为2^{n-1}的 n 次代数多项式.且 $T_{2k}(x)$只含偶数次幂,$T_{2k+1}(x)$只含奇数次幂.

性质3. $T_n(x)$在[-1,1]中有 n 个不同实根,有

---

* 本文1991-03-22收到.

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, k = 1,2,\cdots,n.$$

故有

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi, k = 1,2,\cdots,n.$$

性质4. $|T_n(x)| \leqslant 1$，且在$(n+1)$个点有

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n}, k = 0,1,\cdots,n.$$

交替取最大值1和最小值-1.

1.2 切比雪夫逼近多项式的确定

切比雪夫逼近多项式定义为：若区间$[-1,1]$上函数$f(x)$的n次多项式$P_n(x)$满足下列条件

$$f(x_k) = P_n(x_k), k = 1,2,\cdots,n+1,$$

其中x_k为$n+1$次切比雪夫逼近多项式$T_{n+1}(x)$根，则称$P_n(x)$为n次切比雪夫逼近多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2}C_0T_0(x) + \sum_{j=1}^{n}C_jT_j(x), \tag{3}$$

其中

$$C_j = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}f(x_k)T_j(x_k), j = 0,1,2,\cdots,n. \tag{4}$$

由此可见，只要求出系数C_j，即可确定函数$f(x)$的切比雪夫逼近多项式.

确定函数$f(x)$的切比雪夫逼近多项式可按下列步骤进行：(1)根据精度要求，确定切比雪夫逼近多项式的阶数n. 在应用计算机分析和计算时，可输入不同的n求出相对应的逼近多项式，通过比较确定合适的n值.(2)计算出θ_k和x_k. x_k为$T_{n+1}(x)$的根. 用来作为$f(x)$的插值点. 由性质3得

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2(n+1)}\pi, \tag{5}$$

$$x_k = \cos\theta_k, k = 1,2,\cdots,n+1 \tag{6}$$

(3)求出$f(x)$在插值点x_k上的函数值. 由于$T_{n+1}(x)$的定义域为$[-1,1]$，$f(x)$也定义在标准区间$[-1,1]$上. 因此，对于定义域为任意区间$[a,b]$的函数$f(x')$，必须把其插值点x'_k进行归一化. 若把x_k看作为函数$f(x')$的插值点x'_k的归一化值，则有

$$x'_k = [(b+a) + (b-a)x_k]/2, \tag{7}$$

或者

$$x_k = [2x'_k - (b+a)]/(b-a). \tag{8}$$

(5)把x_k代入(4)式求出C_j值.(6)确定切比雪夫逼近多项式.

2 切比雪夫逼近多项式在非线性电路分析中的应用

切比雪夫逼近多项式近似法可用于大多数非线性电路的分析和计算，并获得较高的精度. 下面举一简单的例子介绍如何应用计算机来计算切比雪夫逼近多项式的系数C_j. 图1为由三

极管组成的放大电路的非线性输入特性曲线.

计算其切比雪夫逼近多项式的系数 C_j，可按以下思路编制程序在计算机上实现：(1)确定阶数 n. n 可由键盘输入，本例取 $n=5$. (2)确定非线性函数 $f(x')$ 自变量的定义域〔a,b〕. 若放大电路的输入电压为 $v_{be}=V_S\omega_S t$，其动态范围(即定义域)记为〔E_1,E_2〕. 则 $E_1=V_Q-V_S$，$E_2=V_Q+V_S$，式中 V_Q 为非线性器件的静态工作电压. (3)由式(5)、(6)求出 θ_k 和 X_k. (4)由式(7)求出自变量 v_{be} 的归一化值 $v_{bek}=〔E_2+E_1+(E_2-E_1)x_k〕/2$. (5)在已知的非线性曲线上找出 v_{bek} 所对应的基极电 i_{bk}. (6)由式(4)求出 C_j. 即

$$C_j=\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}i_b(v_{bek})T_j(x_k),\ j=0,1,\cdots,n.$$

(7)确定切比雪夫逼近多项式，多项式中自变量 x 应是归一化的值，即

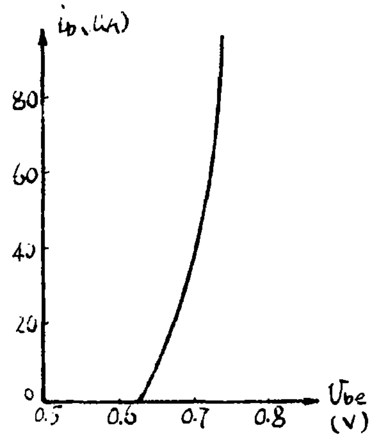

图1　输入特性曲线

$$x=v_{be}/V_S=\cos\omega_S t.$$

图2是计算切比雪夫逼近多项式系数 C_j 的流程框图以及计算结果. 其中 N,V_Q,V_S,i_{bk} 由键盘输入.

计算结果如下

$N=5$　　$E_1=0.6900v$　　$E_2=0.7100v$

$F(1)=0.2618$	$v_{be}(1)=0.7097$
$F(2)=0.7854$	$v_{be}(2)=0.7071$
$F(3)=1.3090$	$v_{be}(3)=0.7026$
$F(4)=1.8326$	$v_{be}(4)=0.6974$
$F(5)=2.3526$	$v_{be}(5)=0.6929$
$F(6)=2.8798$	$v_{be}(6)=0.6903$

$Ib(1)=48.7830$	$C(0)=77.95301$
$Ib(2)=46.0820$	$C(1)=10.40287$
$Ib(3)=41.9470$	$C(2)=-0.56321$
$Ib(4)=36.9170$	$C(3)=0.36322$
$Ib(5)=32.0000$	$C(4)=-0.06450$
$Ib(6)=28.1300$	$C(5)=0.08218$

求出 C_j 后，即可得到切比雪夫逼近多项式的表达式

$$i_b=C_0/2+C_1T_1(x)+\cdots+C_nT_n(x),\tag{9}$$

这种表现不够直观，因此，可应用性质1把式(9)转化为幂级数形式. 即

$$i_b=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,\tag{10}$$

式中 a_j 可由性质1求得. 本例 $n=5$，把 $C_0,\cdots,C_5$，代入式(10)得

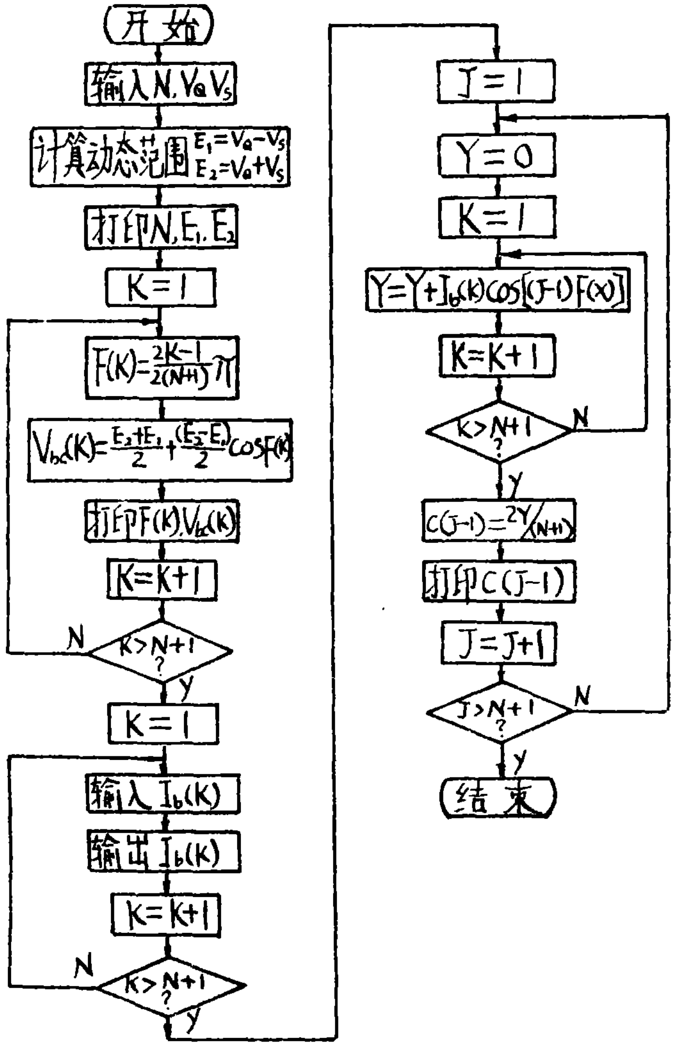

图2　计算 C_j 的流程框图

$$i_b = 39.47521 + 9.72411x - 0.61042x^2 - 0.10972x^3 - 0.516x^4 + 1.31488x^5, \tag{11}$$

其中 x 是函数 $f(x')$ 即 $i_b=f(v_{be})$ 中自变量 v_{be} 的归一化值. 由式(8)得

$$x = 100v_{be} - 70, \tag{12}$$

由式(12)可求出 v_{bek} 对应的 x_k 值，把 x_k 代入式(11)可得到切比雪夫近似式的线性化结果. 表1列出了 i_b 的实际值和线性化后的值以及比较结果. 表中 I_{bl} 为 i_b 的线性化值，I_{br} 为 i_b 的实际值. 由表中的误差项可看到采用这种方法可得到较高的精度.

表1 线性误差表

$v_{be}(v)$	$x=100v_{be}-70$	I_{br}	I_{bl}	$I_{br}-I_{bl}$
0.7097	0.97	48.783	48.830	−0.047
0.7071	0.71	46.082	46.109	−0.027
0.7026	0.26	41.947	41.960	−0.013
0.6974	−0.26	36.917	36.904	0.013
0.6929	−0.71	32.000	31.963	0.037
0.6903	−0.97	28.130	28.056	0.074

3 结束语

本文介绍的切比雪夫逼近多项式近似法是非线性曲线数值逼近的一种一般方法. 它不仅适用于非线性电路的分析和计算,也可用于解决其它工程上的非线性问题.

参 考 文 献

〔1〕 李岳生,数值逼近,人民教育出版社,(1979).
〔2〕 蒲生良治(王洪晏译),微型计算检测电路及其接口,科学出版社,(1978).
〔3〕 谭浩强,*FORTRAN* 语言,清华大学出版社,(1983).
〔4〕 童诗白,模拟电子技术基础,人民教育出版社,(1981).

Application of Chebyshev Approximate Polynomial to the Analysis of Nonlinear Circuit

Li Bingkun
(Department of Electronic Engineering)

Abstract In this paper, the author presents a method of Chebyshev approximate polynomial for analysing nonlinear circuit as well as an example of its computer realization.

Key words Chebyshev approximate polynomials, non-linear circuits, computer