第13卷 第4期
华侨大学学报自然科学版
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)
Vol. 13 №. 4
1992年10月
Oct. 1992

关于Bezier曲线性质及曲线拟合问题*

郑 厚 生

(精密机械工程系)

摘要 本文首先介绍了Bezier曲线的定义和特性,着重探讨Bezier曲线基函数的性质,这对利用Bezier曲线进行曲线轮廓设计,将有着宏观上和直观感觉上的参考意义。

关键词 Bezier曲线,基函数,曲线拟合

0 引言

在工程设计和科学实验中,我们经常要设计或描绘一些不规则的曲线.当利用计算机对这些不规则曲线进行表达、分析和研究时,首要的任务就是对特定的不规则曲线要建立一个数学模型去描述它.因为在计算机内部图是以数的形式存贮着.一般,碰到的实际问题有以下三种情况:

(1)由已知的一系列准确的数据点来定义曲线,也就是说,要求曲线必须经过所有的数据点.一般,经常采用多项式插值法,例如样条方程来解决这个问题.

(2)给定一些离散的数据点,这些数据点仅是某些未知真实值的近似数据,要求用一条曲线来指出这些数据点的正确趋势.这条曲线可能只通过一部分数据点,或根本不通过任何数据点.根据实验或观察所测定的近似的有时是随机的数据来画出曲线,就属这种情况.一般要用曲线拟合的方法去逼近这些数据点.

(3)在工程中设计曲线轮廓时,有时先给出控制曲线的特征多边形,然后再用参数曲线去逼近它.这种方法有易于控制曲线趋向的许多优点,在工程实际中用得很多.Bezier曲线方程,就是其中常见的一种方法.

1 Bezier曲线的定义和特性

Bezier曲线是利用特征多边形来定义曲线的一种方法.只有特征多边形的第一个顶点和最后一个顶点位于曲线上,而其它顶点则定义着曲线的导数、阶次和形状,如图1所示.

* 本文1992-03-19收到.

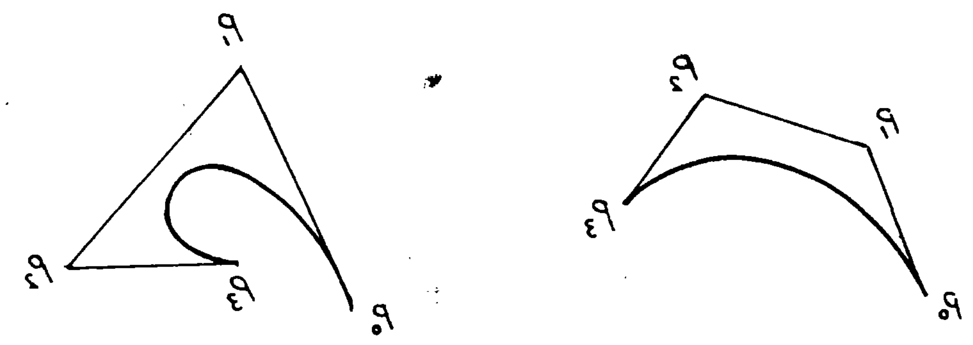

图1　三次 Bezier 曲线

Bezier 曲线,实际上是能在第一个和最后一个顶点之间进行插值的一个多项式调配函数.这个多项式方程为

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iJ_{n,i}(t)\ ,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\tag{1}$$

式中,n 为多项式的次数;i 为有序集(从0到 n)中的特殊顶点,通常 n 次多项式由 $n+1$ 个顶点确定;P_i 为某一个广义特征多边形顶点的位置向量.

Bezier 曲线的基函数为

$$J_{n,i}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i},\tag{2}$$

因此,方程式(1)也可写成

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_i\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i},\tag{3}$$

实际上,曲线上的任一点 $P(t)$,是等于各顶点的位置向量与相应顶点的基函数的乘积之和.

Bezier 曲线有二个特性:

(1)$P(0)=J_{n,0}(0)\ P_0=P_0$; $P(1)=J_{n,n}(1)P_n=P_n$. 即顶点 P_0 和 P_n 分别位于实际曲线段的始点和终点上.

(2)从基函数 $J_{n,i}(t)=\frac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}$ 可以看出,如果给定一个特征多边形($n+1$ 顶点),对于第 i 个顶点来说,$J_{n,i}(t)$ 是 t 的函数,可以证明,当 $t=i/n$ 时,$J_{n,i}(t)$ 达到最大值,这个最大值为

$$J_{n,i}\left(\frac{i}{n}\right)=\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{i^i(n-i)^{n-i}}{n^n}.\tag{4}$$

Bezier 曲线的特点是:曲线的形状完全决定于特征多边形的形状.因此,改变多边形的顶点,就会使设计者对输入和输出的关系有非常直观的感觉.如果增加一个中间点,就可以增加曲线的一个阶次,这就大大提高了改变曲线的灵活性,因此,比较适用于交互式的曲线设计.显

然，如果希望设计曲线而不是拟合曲线，这个优点是非常重要的. 这样，可以利用改变多边形顶点的位置或增加某一个中间点，直到输入与所期望的曲线形状相符为止.

现以三次 Bezier 曲线为例. 要形成一条三次 Bezier 曲线，只需要指定多边形四个顶点，这时，$n=3$，顶点数为 $n+1$. 将 $n=3, i=0,1,2,3$，分别代入方程(3)，即得三次 Bezier 曲线方程为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(t) &= (1-3t+3t^2-t^3)\boldsymbol{P}_0 + (3t-6t^2+3t^3)\boldsymbol{P}_1 \\ &\quad + (3t^2-3t^3)\boldsymbol{P}_2 + t^3\boldsymbol{P}_3 \end{aligned}$$

用矩阵形式可表示为 $\boldsymbol{P}(t)=\mathrm{TM}\boldsymbol{P}$，其展开式为

$$\boldsymbol{P}(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_0 \\ \boldsymbol{P}_1 \\ \boldsymbol{P}_2 \\ \boldsymbol{P}_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

如果把向量 $\boldsymbol{P}(t)$分介为二维平面上的坐标 X 和 Y 的分量，则其坐标形式可表示为：

$$\begin{cases} X(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \\ Y(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{6}$$

这样，按$0\leqslant t\leqslant 1$，依次取一系列不同的 t 值，即可获得三次 Bezier 曲线上的一系列点. 如果根据上述公式(6)，编写出计算机程序，输入各顶点的坐标值 X_i, Y_i，而把 t 从0到1取适当的增量变化，即可在屏幕上或绘图仪上输出一条三次 Bezier 曲线，通过对各顶点位置的调整，就可获得非常满意的曲线造型.

2　Bezier 曲线基函数的一些性质

以三次和四次 Bezier 曲线为例，来研究基函数的性质，并加以推广.

把 $n=3$，$i=0,1,2,3$和 $n=4$，$i=0,1,2,3,4$，分别代入基函数公式(2)，即得三次和四次 Bezier 曲线各顶点基函数的公式，如表1和表2所示.

表1　三次 Bezier 曲线基函数及其最大值

i	$J_{n,i}(t)$	$t=0$	$t=1/3$	$t=2/3$	$t=1$
0	$J_{3,0}(t)=(1-t)^3$	1	8/27	1/27	0
1	$J_{3,1}(t)=3t(1-t)^2$	0	4/9	2/9	0
2	$J_{3,2}(t)=3t^2(1-t)$	0	2/9	4/9	0
3	$J_{3,3}(t)=t^3$	0	1/27	8/27	0
	各顶点基函数值之和	1	1	1	1

表2 四次 Bezier 曲线基函数及其最大值

i	$J_{n,i}(t)$	$t=0$	$t=1/4$	$t=1/2$	$t=3/4$	$t=1$
0	$J_{4,0}(t)=(1-t)^4$	1	81/256	1/16	1/256	0
1	$J_{4,1}(t)=4t(1-t)^3$	0	27/64	1/4	3/64	0
2	$J_{4,2}(t)=6t^2(1-t)^2$	0	54/256	6/16	54/256	0
3	$J_{4,3}(t)=4t^3(1-t)$	0	3/64	1/4	27/64	0
4	$J_{4,4}(t)=t^4$	0	1/256	1/16	81/256	1
	各顶点基函数值之和	1	1	1	1	1

当 t 从0到1变化时，即可获得各顶点的基函数变化曲线，如图2和图3所示.

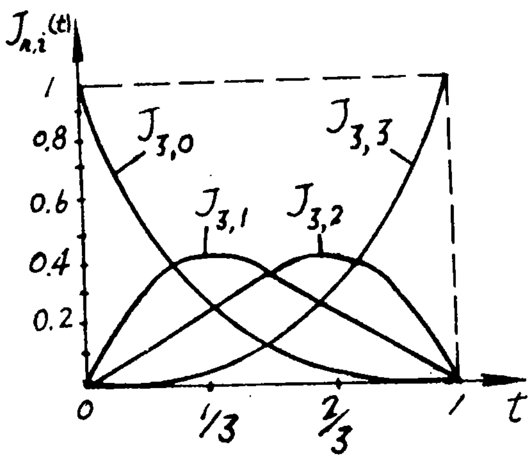

图2 三次 Bezier 曲线基函数变化曲线

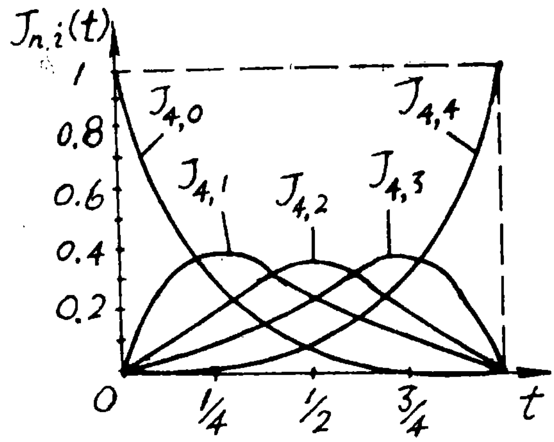

图3 四次 Bezier 曲线基函数变化曲线

根据对表1、表2和图2、图3的分析，可以得出如下几个结论.

(1)第一个顶点和最后一个顶点对曲线前后部分的形状影响最大.因为当 $t=0$ 和 $t=1$ 时，其它顶点的基函数数值均等于零.曲线必然经过第一个和最后一个顶点.可以证明，P_0P_1 和 $P_{n-1}P_n$ 分别是 P_0 和 P_n 点的切线方向.这就是说，首尾两个顶点的位置(指相对于其它顶点的位置)，对曲线的丰满程度起着重要的作用，如图4(1)和4(2)所示.在图4(2)中，第一个顶点 P_0 向

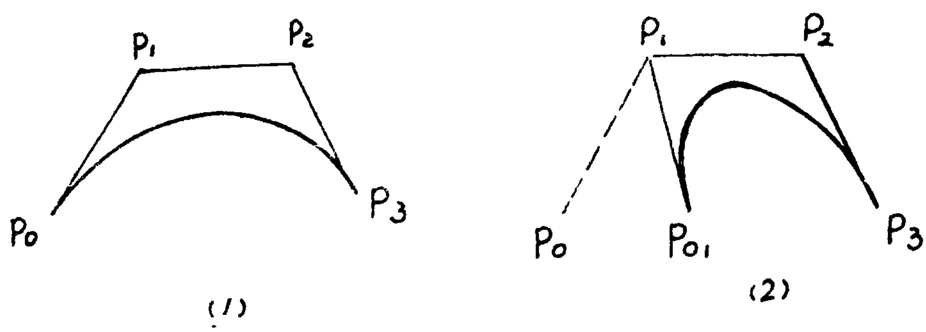

图4 首尾顶点移动对曲线丰满程度的影响

右移动，其曲线丰满得多了.

(2)第一个顶点和最后一个顶点，第二个顶点和倒数第二个顶点，它们的基函数都是对称的.当顶点为奇数时，处于中间的一个顶点的基函数自身也是对称的.这就是说，当各顶点位置对称时，所形成的也完全是对称的.当各顶点的位置不对称时，尽管施加的基函数影响是对称的，但由于各顶点的向量与其相应的基函数乘积不可能是对称的，所以所形成的 Bezier 曲线也是不对称的.如图5(1)、(2)所示.

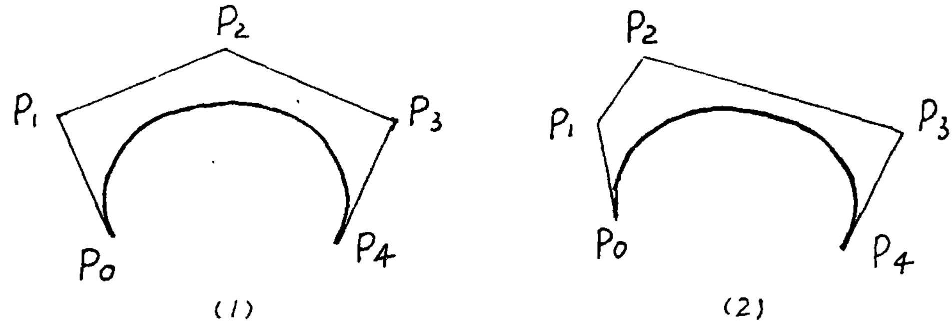

图5　中间顶点移动对曲线形状的影响

(3)当 $t=i/n$ 时，相应的基函数 $J_{n,i}(t)$ 达到最大值.这就是说，当 $t=i/n$ 时，i 顶点的基函数对曲线在 $P(i/n)$ 点处施加的影响最大。如图6(1)、(2)所示.

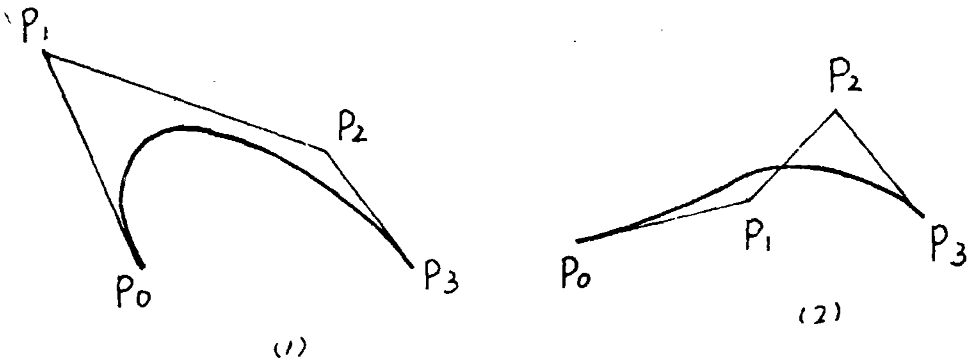

图6　当 $t=i/n$ 时，i 顶点的基函数达到最大值 $J_{n,i}(i/n)$，这时 i 顶点对曲线形状影响最大

(4)当 t 从0到1变化时，在任一 t 值，各顶点基函数数值之和恒等于1.这就是说，当各顶点的位置向量完全确定时，那么，曲线上的点 $P(t)$，是由各顶点的基函数施加于各顶点的位置向量的总结果(即它们的乘积之和).这时 $P(t)$ 点的向量绝对不可能大于具有最大向量的某一顶点的向量大小.这个结果的几何意义是，曲线一般总是控制在特征多边形的内部，且曲线具有凸包性，也就是曲线总是弯向各顶点.如图4,5,6所示.

(5)当给定一个特征多边时，曲线上的任一点 $P(t)$ 都是各顶点施加作用的结果，因此，移动任何一个顶点，都会影响曲线其它部分的形状，这就是基函数的整体性.如果把各顶点的位置向量比做力的大小，那么，经过各顶点基函数施加作用后，在曲线上的任一点 $P(t)$，都好象是一个弹簧把它拉住，拉力的大小就相当于 $P(t)$ 向量的大小.实际上可以想象是有无数弹簧把曲线拉撑住，如图7所示.

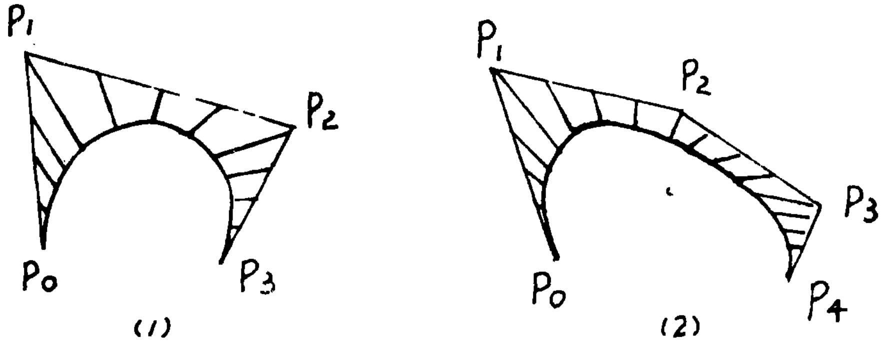

图7 Bezier 曲线基函数的整体性

以上 Bezier 曲线基函数的一些性质，对我们在利用 Bezier 曲线来设计曲线轮廓时，将起着宏观上和直观感觉上的指导作用.

3 曲线轮廓设计例子

在进行曲线轮廓设计时，为了能更好地控制曲线的形状，可以有两种办法：一种是增加特征多边形的顶点数，也就是增加曲线的阶次，以保持曲线较高阶导数的连续性；一种是把整条曲线分割成较小的段，而保持段内较低的阶次，常采用三次曲线的做法. 一般前一种办法要比后一种办法容易些. 如果采用前一种办法，只要把各种特征多边形的具体顶点数，分别编写成子程序，按需要随时调用，即可产生所需要的曲线. 但是，如果对曲线并不要求有高阶导数的连续性，而只要求有二阶导数的连续性，也可以把曲线分割成几个三次段来连接，也是一种方便的办法，因这时，对曲线设计的直观感觉更好.

如图8所示，曲线轮廓具有两个拐接点. 要设计这样的图形，可采用六个顶点，如 $P_0, \cdots, P_5$，而相应地把它分成两个有4个顶点的特征多边形，即 $P_0P_1P_2P_3$ 和 $P_3P_4P_5P_0$，而调用三次

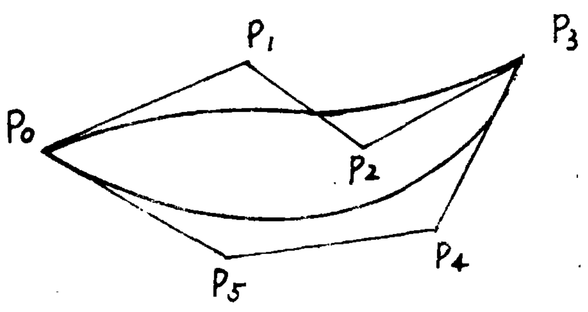

图8 有拐点的曲线轮廓

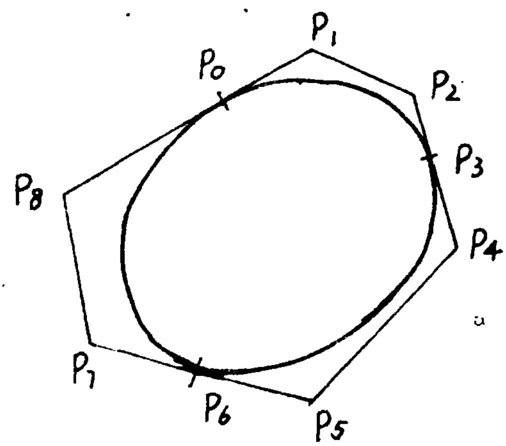

图9 封闭的曲线轮廓

Bezier 曲线的子程序，即可设计出该图形. 这样做的好处是，方法简便；同时，在调整上部曲线

时，不致影响下部曲线的形状，反之亦然.

如果要设计如图8所示的封闭的曲线轮廓，可以采用9个顶点，即 $P_0,\cdots,P_8$，然后，把它分成三个三次段，即分成三个有4个顶点的特征多边形，即 $P_0P_1P_2P_3$，$P_3P_4P_5P_6$，$P_6P_7P_8P_0$，这样，由三条三次 Bezier 曲线段，可拟合成一个有特定要求的封闭的曲线轮廓. 但必须注意，P_0、P_3，P_6，必须分别位于直线 P_8P_1，P_2P_4，P_5P_7上，因为这样才能保证曲线在 P_0，P_3，P_6各点处与相应的直线相切，曲线在各点斜率是连续的.

在调整各顶点的位置时，如果能运用第2节中所分析的 Bezier 曲线基函数的各种性质，将会使调整过程比较迅速，并产生我们需要的满意的曲线轮廓.

参 考 文 献

[1] 卢振荣主编，计算机绘图初步，西安交通大学出版社，(1985).

[2] David F. Rogers, J. Alan Adams 著，北京工程图学会译，计算机图学的数字基础，人民教育出版社，(1982).

The property of Bezier Curve and the Problem of Curve Fitting

Zheng Housheng

(*Department of Precision Mechanical Engineering*)

Abstract The paper begins with the definition and characteristics of Bezier curve, and centres on the property of the basic function of Bezier curve. This will be of help macroscopically and perceivably for designing the profile of a curve by make use of Bezier curve.

Key words Bezier curve, basic function, curve fitting