

# 空腹支墩柱在弯矩和剪力 耦合作用下的稳定性

杜耀星

(土木工程系)

**摘要** 本文利用加权余量法推导出空腹支墩柱在弯矩和剪力耦合作用下,发生弹性失稳时,临界荷载  $P_{cr}$  的计算公式。

**关键词** 空腹支墩柱,弹性失稳,稳定性,临界荷载,加权余量法

## 0 前言

在推导等直实心杆件弹性失稳的临界荷载欧拉公式时,通常只考虑弯矩的作用,而未计及剪力的影响,其引起的误差一般都很小,完全可以忽略不计。可是对于组合杆件(包括系条式、系板式和空腹支墩柱),由于剪力对这类杆件挠度的影响远大于实心杆件。因此,剪力对组合杆件临界荷载的影响也远大于实心杆件,换句话说,在计算组合杆件的临界荷载时,必须考虑弯矩和剪力的耦合作用。

在平板支墩坝和连拱坝的设计中,必须对支墩和坝进行纵向弯曲的稳定性计算。考虑到面板和连拱属于高而薄的结构,

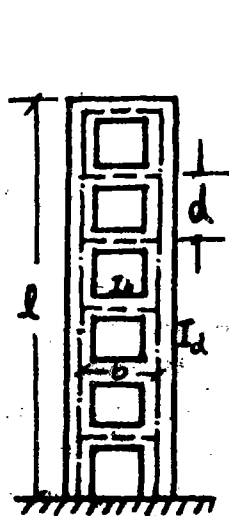


图1 空腹支墩柱

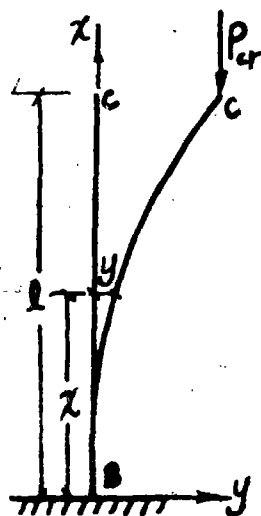


图2 计算简图

\* 本文1991-08-30收到。

因而忽略面板的支承作用,若用平行于支墩的下游面截取一个单位宽度的柱条如图1所示,就成为下端固定,上端自由的空腹支墩柱,本文针对空腹支墩中带有加劲肋板而不是带有加劲梁的情况,加以分析研究.这样的空腹支墩柱就相当于带有系钣式的组合杆件一样,其计算简图如图2所示.

空腹支墩柱有异于实心杆件,在进行稳定计算时,必须考虑弯矩和剪力的耦合作用.于是就应当在组成这类杆件的弹性曲线微分方程时,同时考虑弯矩和剪力的影响,进而推导出临界荷载的计算式.在这个过程中,本文不是采用一般求解微分方程的办法,而是采用新近发展极为迅速并得到广泛应用的加权余量法来推导出空腹支墩柱,在弯矩和剪力耦合作用下临界荷载  $P_c$  的计算式,关于加权余量法的基本原理可参阅文[1],[2].

## 1 弯矩和剪力耦合作用下空腹支墩柱的挠曲线微分方程

由弯曲理论可知,弯曲变形的挠度  $y$  由两部分组成,其一为弯矩  $M$  所引起的挠度  $y_M$ ;其二为剪力  $Q$  所引起的挠度  $y_Q$ ,所以有

$$y = y_M + y_Q. \quad (1)$$

由高等材料力学可知,对应于  $y_Q$  的斜率  $dy_Q/dx$  与剪力  $Q$  之间存在如下关系

$$\frac{dy_Q}{dx} = \frac{\mu Q}{GA}, \quad (2)$$

式中,  $\mu$  为考虑剪应力在截面上分布不均匀而引入的无量纲系数,它与截面形状有关,对于矩形截面  $\mu=1.2$ ,圆形截面  $\mu=10/9$ ,薄壁圆管截面  $\mu=2.0$ 等;  $G$  为材料的剪切弹性模量;  $A$  为横截面面积.  $y_M$  与弯矩  $M$  之间有如下关系

$$\frac{d^2 y_M}{dx^2} = -\frac{M}{EI}, \quad (3)$$

式中,  $EI$  为整个空腹支墩柱的抗弯刚度.由式(2)可得

$$\frac{d^2 y_Q}{dx^2} = \frac{\mu d^2 M}{GA dx^2}. \quad (4)$$

将式(1)对  $x$  微分两次后,并以式(3),(4)代入,则得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y_M}{dx^2} + \frac{d^2 y_Q}{dx^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{\mu d^2 M}{GA dx^2}. \quad (5)$$

由图2可得

$$\left. \begin{aligned} M &= -P(\delta - y) \\ \frac{d^2 M}{dx^2} &= P \frac{d^2 y}{dx^2} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)得

$$\left(1 - \frac{\mu P}{GA}\right) y'' + \frac{P}{EI} (y - \delta) = 0. \quad (7)$$

式(7)为一端固定,另一端自由的空腹支墩柱挠曲线微分方程,它是应用加权余量法的控制方程.

## 2 空腹支墩柱弹性失稳时临界荷载的加权余量解

在式(7)中令

$$K^2 = \frac{P}{EI(1 - \frac{\mu P}{GA})}, \quad (8)$$

则式(7)可改写为

$$y'' + K^2(y - \delta) = 0, \quad (9)$$

选用试函数

$$y = \delta(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}), \quad (10)$$

它可以满足边界条件(即  $x=0$  时,  $y=0$ ;  $x=l$  时,  $y=\delta$ ), 将式(10)对  $x$  微分两次, 得

$$y'' = \delta(\frac{\pi}{2l})^2 \cos \frac{\pi x}{2l}. \quad (11)$$

将式(10), (11)代入式(9)得余量  $R_L$  为

$$R_L = \delta(\frac{\pi}{2l})^2 \cos \frac{\pi x}{2l} - K^2 \delta \cos \frac{\pi x}{2l}. \quad (12)$$

采用伽辽金加权余量法, 即取权函数  $W_i$  等于基函数  $N_i$

$$W_i = N_i = (1 - \cos \frac{\pi x}{2l}), \quad (13)$$

于是得加权余量积分为

$$\int_0^l R_L W_i dx = \int_0^l [\delta(\frac{\pi}{2l})^2 \cos \frac{\pi x}{2l} - K^2 \delta \cos \frac{\pi x}{2l}] (1 - \cos \frac{\pi x}{2l}) dx = [(\frac{\pi}{2l})^2 - K^2] \frac{2l}{\pi} \delta (1 - \frac{\pi}{4}),$$

令加权余量积分为零, 则

$$[(\frac{\pi}{2l})^2 - K^2] \frac{2l}{\pi} \delta (1 - \frac{\pi}{4}) = 0,$$

由上式可知, 必定是

$$[(\frac{\pi}{2l})^2 - K^2] = 0,$$

由此可得

$$K^2 = (\pi/2l)^2. \quad (14)$$

以式(8)代入式(14)得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{GA} \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \frac{1}{1 + \bar{\nu} \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}}, \quad (15)$$

式中  $\bar{\nu} = \mu/GA$  为单位剪力产生的剪切角, 由结构力学可知

$$\bar{\nu} = \frac{bl}{12EI_b} + \frac{d^2}{24EI_d}, \quad (16)$$

式中,  $EI_b$  为加劲肋板的抗弯刚度;  $EI_d$  为主杆的抗弯刚度;  $b, d$  所表示的意义示于图(1)中. 以式

(16)代入式(15)可得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \frac{1}{1 + \left( \frac{bd}{12EI_b} + \frac{d^2}{24EI_d} \right) \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}} \quad (17)$$

式(17)就是一端固定,他端自由,考虑弯矩和剪力耦合作用下,空腹支墩柱弹性失稳时的临界荷载计算公式。

### 3 结束语

在式(17)中,  $\pi^2 EI/(2l)^2$  就是一端固定,他端完全自由的压杆,只考虑弯矩作用而不计剪力影响,临界荷载的欧拉公式,若以  $P_E$  表示,则式(17)可改写为

$$P_{cr} = P_E \frac{1}{1 + \left( \frac{bd}{12EI_b} + \frac{d^2}{24EI_d} \right) P_E} \quad (18)$$

在前面我们是将空腹支墩柱简化为一端固定,他端自由而得出式(17), (18) 临界荷载的计算式,如果考虑面板的支承作用而将空腹支墩柱简化为一端固定,另一端铰支,按照同样思路推导,可以得出如同式(18)一样的临界荷载计算式,只是式中  $P_E$  应为

$$P_E' = \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2} \quad (19)$$

这就是一端固定,另一端铰支的压杆,只考虑弯矩而不计剪力影响的欧拉临界荷载公式。

### 参 考 文 献

- [1] 徐文焕、陈 虬,加权余量法在结构分析中的应用,铁道出版社,(1985),5—26.
- [2] 杜耀星,圆环圆拱承受均匀径向荷载时弹性失稳的加权余量解,华侨大学学报(自然科学版),4(1990),371—376.
- [3] 湖南大学结构理论研教组,结构力学(下册),人民教育出版社,(1960),664—670.
- [4] 刘鸿文,高等材料力学,高等教育出版社,(1985),191—198.
- [5] Timoshenko, S., *Strength of Materials (part I Advanced)*, Third Edition, (1978), 171—178.

## The Stability of Hollow Buttress Pier Column Subjected to the Coupling of Bending Moment and Shearing Force

Du Yaoping

(Department of Civil Engineering)

**Abstract** In relation to a hollow buttress pier column subjected to the coupling of bending moment and shearing force, a formula is derived by the method of weighted residual method for calculating its critical load  $P_{cr}$  in case the elastic instability occurs.

**Key words** hollow buttress pier column, elastic instability, stability, critical load, weighted residual method