第13卷 第4期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 13 №. 4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年10月 (NATURAL SCIENCE) Oct. 1992

微分形式论与外微分应用于电动力学的探讨*

陈强顺 王建成
(同济大学) (华侨大学)

摘要 本文探讨微分形式论与外微分应用于电动力学中的若干问题，并指出其优点．

关键词 微分形式论，外微分，电动力学

0 前言

电动力学研究电磁场的运动规律及其同带电物质间的相互作用，电磁场是物质世界中重要的矢量场．研究矢量场问题的主要数学工具为矢量分析和数学物理方法．虽然，矢量分析已建立了一套完整的理论，但比较繁琐．于是，人们引进了哈密顿算子▽，并规定了一些运算规则．虽然按规则运算可得到正确的结果，但一般还要对结果进行验算．

本文着重探讨把法国数学家 Elie Cartan 所创建的微分形式论和外微分应用于电动力学中的表式和矢算．在扼要地阐明微分形式论和外微分形式理论的基本概念和方法之后，阐明这种数学形式如何用来表达电磁场的运动规律，同时着重指明哪些组成部分同矢量分析相关联，可利用它们取代电动力学的矢算，并以具体实例推证一整套矢算公式．

1 微分形式论的基本概念

在欧氏三维空间 R^3 中，开集 U 上，零次、一次、二次和三次微分形式分别为[1-4]

$$\overset{0}{\omega} = F(x,y,z) = F(x^1,x^2,x^3), \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\overset{1}{\omega} &= f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + t(x,y,z)dz \\ &= F_1dx^1 + F_2dx^2 + F_3dx^3 = \sum_i F_i(x^1,x^2,x^3)dx^i,\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\overset{2}{\omega} &= p(x,y,z)dy \wedge dz + q(x,y,z)dz \wedge dx + r(x,y,z)dx \wedge dy \\ &= P_{23}dx^2 \wedge dx^3 + P_{31}dx^3 \wedge dx^1 + P_{12}dx^1 \wedge dx^2\end{aligned}$$

* 本文 1992-01-12 收到．

$$= \sum_{i<j} P_{ij}(x^1,x^2,x^3)dx^i \wedge dx^j, \tag{3}$$

其中 $P_{23}=-P_{32}=P_1((x^1,x^2,x^3)=p(x,y,z)$；$P_{31}=-P_{13}=P_2(x^1,x^2,x^3)=q(x,y,z)$；$P_{12}-P_{21}=P_3(x^1,x^2,x^3)=r(x,y,z)$，

$$\overset{3}{\omega} = W(x,y,z)dx \wedge dy \wedge dz = W(x^1,x^2,x^3)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{4}$$

显然，零次和三次微分形式仅有一个数量，可用来表示标量场；一次和二次微分形式拥有三个数量，可用来表示矢量场.三维空间自然不存在四次以上的微分形式.

不难见到：零次微分形式无基；一次微分形式的基为 dx^1、dx^2 和 dx^3（简称一次基，以下类推）；其配对的集合通常记为 $dx^2\wedge dx^3$、$dx^3\wedge dx^1$、$dx^1\wedge dx^2$，称为其外积或楔积，它们构成了二次基，如式(3)所示；三次基 $dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$ 是由一次基的二重外积构成.诸种基遵从两个公理：改变一次基外积的顺序差一个负号，；两同名一次基的外积为零.据此，下列等式成立，即

$$dx^2\wedge dx^3=-dx^3\wedge dx^2,\quad dx^3\wedge dx^1=-dx^1\wedge dx^3,\quad dx^1\wedge dx^2=-dx^2\wedge dx^1,$$

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 = dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 = -dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^1$$
$$= -dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 = dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2,$$

$$dx^1 \wedge dx^1 = 0,\quad dx^2 \wedge dx^2 = 0,\quad dx^3 \wedge dx^3 = 0,$$

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^1 = 0,\quad dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0,\quad dx^2 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 0,\cdots$$

2 微分形式的外微分运算

外微分是对微分形式施行的一种数学运算，因引用与微分相同的符号 d 而得名[6—9]。对式(1)求一次外微分，得

$$d\overset{0}{\omega} = \frac{\partial F}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial F}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial F}{\partial x^3}dx^3 = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i}dx^i = \overset{1}{\omega}, \tag{5}$$

可记为

$$d\overset{0}{\omega} = \overset{1}{\omega}_{\nabla F} = \overset{1}{\omega}_{\nabla\overset{0}{\omega}}. \tag{6}$$

式(6)的意义是：对零次微分形式求一次外微分，其结果变成一次微分形式，且其三个分量是以原零次微分形式梯度的三个分量构成的.可见零次微分形式的外微分同梯度相联系.

对式(2)求一次外微分得

$$d\overset{1}{\omega} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x^2} - \frac{\partial F_2}{\partial x^3}\right)dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x^3} - \frac{\partial F_3}{\partial x^1}\right)dx^3 \wedge dx^1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x^1} - \frac{\partial F_1}{\partial x^2}\right)dx^1 \wedge dx^2$$
$$= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x^i} - \frac{\partial F_i}{\partial x^j}\right)dx^i \wedge dx^j = \overset{2}{\omega}, \tag{7}$$

可记为

$$d\overset{1}{\omega} = \overset{2}{\omega}_{\nabla\times\overset{1}{\omega}}. \tag{8}$$

式(8)的意义是：对一次微分形式求一次外微分，其结果变成二次微分形式，且其三个分量是以原一次微分形式旋度的三个分量构成的，可见一次微分形式的外微分同旋度相联系.

对式(3)求一次外微分得

$$d\overset{2}{\omega} = \left(\frac{\partial P_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial P_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial P_{12}}{\partial x^3}\right)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \overset{3}{\omega}, \tag{9}$$

可记为

$$\overset{2}{d\omega} = \overset{3}{\omega}_{\nabla\cdot\overset{2}{\omega}}. \tag{10}$$

式(10)的意义是：对二次微分形式求一次外微分，其结果变成三次微分形式，且其量值是以原二次微分形式的散度构成的. 可见二次微分形式的外微分同散度相联系.

对式(4)求外微外自然为零. 对微分形式作一次外微分运算，得到高一次的新微分形式. 记为

$$n\text{ 次微分形式} \xrightarrow[(n=0,1,2)]{d} (n+1)\text{ 次微分形式}. \tag{11}$$

利用式(6)、(8)和式(8)、(10)，不难证得

$d^2\overset{0}{\omega}=d(d\overset{0}{\omega})=d\overset{1}{\omega}_{\nabla\overset{0}{\omega}}=\overset{2}{\omega}_{\nabla\times\nabla\overset{0}{\omega}}=0$，即梯度的旋度为零；

$d^2\overset{1}{\omega}=d(d\overset{1}{\omega})=d\overset{2}{\omega}_{\nabla\times\overset{1}{\omega}}=\overset{3}{\omega}_{\nabla\cdot\nabla\times\overset{1}{\omega}}=0$，即旋度的散度为零.

可见，连续作两次外微分运算，其结果均为零. 记为

$$d^2 \equiv 0. \tag{12}$$

此外，可以证明下列运算公式成立：[2,3,5,6]

$$(\omega + \theta) \wedge \lambda = (\omega \wedge \lambda) + (\theta \wedge \lambda), \tag{13}$$

$$\omega \wedge (\lambda_1 + \lambda_2) = (\omega \wedge \lambda_1) + (\omega \wedge \lambda_2), \tag{14}$$

$$(\omega \wedge \theta) \wedge \sigma = \omega \wedge (\theta \wedge \sigma), \tag{15}$$

$$d(\overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\theta}) = d\overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\theta} + (-1)^p \overset{p}{\omega} \wedge d\overset{q}{\theta}. \tag{16}$$

3 化电动力学有关方程为其外微分形式的举例

应用上述微分形式论的概念及外微分运算的规律，可将电动力学有关方程表为外微分形式.

例如，静电场强等于电位梯度负值的方程，可由零次微分形式表示标量场电位 $\overset{0}{\omega}=V(x^1,x^2,x^3)$ 和一次微分形式表示矢量场强 $\overset{1}{\alpha}=\sum_i E_i dx^i = E_1dx^1+E_2dx^2+E_3dx^3$，化为等价的外微分形式

$$\vec{E} = -\nabla V \Leftrightarrow \overset{1}{\alpha} = -d\overset{0}{\omega} = -\overset{1}{\omega}_{\nabla V},$$

由式(5)知上式右边方程的分式为：$E_1=-\partial V/\partial x^1$，$E_2=-\partial V/\partial x^2$，$E_3=-\partial V/\partial x^3$，合起来即为 $\vec{E}=-\nabla V$. 若将 $\overset{1}{\alpha}=-d\overset{0}{\omega}=-\overset{1}{\omega}_{\nabla V}$ 外微分一次，则等式左侧变为 $d\overset{1}{\alpha}=\overset{2}{\omega}_{\nabla\times\overset{1}{\alpha}}$，而等式右侧变为 $d(d\overset{0}{\omega})=0$，于是得静电场为无旋场：$d\overset{1}{\alpha}=0\Leftrightarrow\nabla\times\vec{E}=0$.

又例如，对于麦克斯韦电磁场方程组，除了引进一次微分形式 $\overset{1}{\alpha}=\sum_i E_i dx^i$ 表示交变电场外，还引进下列若干微分形式，即

$$\overset{2}{\beta} = \sum_{i<j} B_{ij}dx^i \wedge dx^j \text{ 表示交变磁场 } \vec{B} = (B_1, B_2, B_3),$$

其中 $B_{23}=-B_{32}=B_1$，$B_{31}=-B_{13}=B_2$，$B_{12}=-B_{21}=B_3$.

$$\overset{2}{\gamma} = \sum_{i<j} D_{ij}dx^i \wedge dx^j \text{ 表示电位移矢量 } \vec{D} = (D_1, D_2, D_3),$$

其中 $D_{23}=-D_{32}=D_1$，$D_{31}=-D_{13}=D_2$，$D_{12}=-D_{21}=D_3$.

$$\overset{1}{\delta}=\sum_i H_i dx^i \text{ 表示磁场强度 } \vec{H}=(H_1,H_2,H_3),$$

$$\overset{2}{\zeta}=\sum_{i<j} J_{ij} dx^i \wedge dx^j \text{ 表示电流密度矢量 } \vec{J}=(J_1,J_2,J_3),$$

其中 $J_{23}=-J_{32}=J_1, J_{31}=-J_{13}=J_2, J_{12}=-J_{21}=J_3$.

$$\overset{3}{\varepsilon}=\rho dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 \text{ 表示电荷密度 } \rho=\rho(x^1,x^2,x^3).$$

于是，可得如下相等价的方程外微分形式

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \Leftrightarrow d\overset{2}{\beta}=0,$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\Leftrightarrow d\overset{1}{\alpha}=-\partial_t\overset{2}{\beta},$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho\Leftrightarrow d\overset{2}{\gamma}=\overset{3}{\varepsilon},$$

$$\nabla\times\vec{H}=\partial_t\vec{D}+\vec{J}\Leftrightarrow d\overset{1}{\delta}=\partial_t\overset{2}{\gamma}+\overset{2}{\zeta}.$$

交变电场和交变磁场是统一的物质——电磁场，自然可把 $\overset{1}{\alpha}$ 和 $\overset{2}{\beta}$、$\overset{1}{\delta}$ 和 $\overset{2}{\gamma}$、$\overset{2}{\zeta}$ 和 $\overset{3}{\varepsilon}$ 结合起来，统一为如下两个二次和一个三次微分形式：[1,10,11]

$$\overset{2}{\Phi}=\overset{1}{\alpha}\wedge dx^0+\overset{2}{\beta},$$

$$\overset{2}{\Psi}=-\overset{1}{\delta}\wedge dx^0+\overset{2}{\gamma}, (x^0 \text{ 表示时间 } t, dx^0=dt),$$

$$\overset{3}{\Omega}=\overset{2}{\zeta}\wedge dx^0-\overset{3}{\varepsilon},$$

则麦克斯韦电磁场方程组可合为如下两个外微分形式的方程

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\end{array}\right.\Leftrightarrow d\overset{2}{\Phi}=0,$$

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla\cdot\vec{D}=\rho\\ \nabla\times\vec{H}=\partial_t\vec{D}+\vec{J}\end{array}\right.\Leftrightarrow d\overset{2}{\Psi}+\overset{3}{\Omega}=0.$$

文献[10]、[11]有深入的讨论.

4 矢算代数的外积运算

设以 a、b 表示标量场，$\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 表示矢量场，即

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}=A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3=\sum_i A_i\vec{e}_i,$$

$$\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}=B_1\vec{e}_1+B_2\vec{e}_2+B_3\vec{e}_3=\sum_i B_i\vec{e}_i,$$

如上所述，可用一次或二次微分形式表示矢量场，有

$$\overset{1}{\omega}_{\vec{A}}=A_1dx^1+A_2dx^2+A_3dx^3=\sum_i A_i dx^i,$$

$$\overset{2}{\omega}_{\vec{A}}=A_1dx^2\wedge dx^3+A_2dx^3\wedge dx^1+A_3dx^1\wedge dx^2=\sum_{i<j}A_{ij}dx^i\wedge dx^j,$$

$$\overset{1}{\omega}_{\vec{B}}=\sum_i B_i dx^i,\quad \overset{2}{\omega}_{\vec{B}}=\sum_{i<j} B_{ij}dx^i\wedge dx^j.$$

$\overset{1}{\omega}_{\vec{A}}$和$\overset{2}{\omega}_{\vec{A}}$分别表示以矢量$\vec{A}$的三个分量为分量的一次和二次微分形式，$\overset{1}{\omega}_{\vec{B}}$和$\overset{2}{\omega}_{\vec{B}}$与之类似。

和差运算只适于同次微分形式之间.两个一次(或二次)微分形式求和差，其结果是以原两个一次(或二次)微分形式的相应三个分量之和差为其分量的一次(或二次)微分形式.经运算可得[1]

$$\overset{1}{\omega}_{\vec{A}}\pm\overset{1}{\omega}_{\vec{B}}=\overset{1}{\omega}_{\vec{A}\pm\vec{B}},\overset{2}{\omega}_{\vec{A}}\pm\overset{2}{\omega}_{\vec{B}}=\overset{2}{\omega}_{\vec{A}\pm\vec{B}},\tag{17}$$

微分形式同任一数量a作外积运算，得到同次的微分形式;其相应的三个分量为原分量的a倍，即

$$a\wedge\overset{1}{\omega}_{\vec{A}}=a\overset{1}{\omega}_{\vec{A}}=\overset{1}{\omega}_{a\vec{A}},\quad a\wedge\overset{2}{\omega}_{\vec{A}}=a\overset{2}{\omega}_{\vec{A}}=\overset{2}{\omega}_{a\vec{A}},\tag{18}$$

外积 $\overset{1}{\omega}_{\vec{A}}\wedge\overset{1}{\omega}_{\vec{B}}=\sum_i A_i dx^i\wedge\sum_i B_i dx^i=\sum_{i<j}(A_iB_j-A_jB_i)dx^i\wedge dx^j$，记为

$$\overset{1}{\omega}_{\vec{A}}\wedge\overset{1}{\omega}_{\vec{B}}=\overset{2}{\omega}_{\vec{A}\times\vec{B}},\tag{19}$$

特例

$$\overset{1}{\omega}_{\vec{A}}\wedge\overset{1}{\omega}_{\vec{A}}=0.\tag{19'}$$

外积 $\overset{1}{\omega}_{\vec{A}}\wedge\overset{2}{\omega}_{\vec{B}}=\sum_i A_i dx^i\wedge\sum_{i<j}B_{ij}dx^i\wedge dx^j=(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3=(\vec{A}\cdot\vec{B})dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$，记为

$$\overset{1}{\omega}_{\vec{A}}\wedge\overset{2}{\omega}_{\vec{B}}=\overset{3}{\omega}_{\vec{A}\cdot\vec{B}},\tag{20}$$

特例

$$\overset{1}{\omega}_{\vec{A}}\wedge\overset{2}{\omega}_{\vec{A}}=\overset{3}{\omega}_{A^2}.\tag{20'}$$

5 证明矢量分析中的场论公式

应用微分形式的外微分运算和矢算代数的外积运算之性质和规则，可证明众多的场论公式.其所阐明的思路和方法，也适用于其余矢量分析的推导和演算.

(1)$\nabla(f\pm g)=\nabla f\pm\nabla g$

式中出现的是标量场的梯度，引用零次微分形式，令$f\pm g=\overset{0}{\omega}$.对此式求一次外微分，由式(6),(7)得

$$d\overset{0}{\omega}=df\pm dg=\overset{1}{\omega}_{\nabla f}\pm\overset{1}{\omega}_{\nabla g}=\overset{1}{\omega}_{\nabla f\pm\nabla g},$$

由式(6)又知$d\overset{0}{\omega}=\overset{1}{\omega}_{\nabla\overset{0}{\omega}}=\overset{1}{\omega}_{\nabla(f\pm g)}$.由$\overset{1}{\omega}_{\nabla f\pm\nabla g}=\overset{1}{\omega}_{\nabla(f\pm g)}$，即可证得

$$\nabla(f\pm g)=\nabla f\pm\nabla g.$$

(2)$\nabla(cf)=c\nabla f$ (c为恒量)

类似(1)例，可引用零次微分形式，记$cf=c\overset{0}{\omega}$，即可证明之.

(3)$\nabla(fg)=g\nabla f\pm f\nabla g$

同样，引用零次微分形式，记$fg=\overset{0}{\omega}$，即可以求证.

(4)$\nabla(f/g)=(g\nabla f-f\nabla g)/g^2$

引用零次微分形式，记$f/g=\overset{0}{\omega}$.同样可以求证.

(5) $\nabla\cdot(\vec{F}\pm\vec{G})=\nabla\cdot\vec{F}+\nabla\cdot\vec{G}$

式中出现矢量场的散度，故引用二次微分形式，记 $\overset{2}{\omega}_{\vec{F}}\pm\overset{2}{\omega}_{\vec{G}}=\overset{2}{\omega}$. 对此式求一次外微分，由式(10),(17)得

$$d\overset{2}{\omega}=d\overset{2}{\omega}_{\vec{F}}\pm d\overset{2}{\omega}_{\vec{G}}=\overset{3}{\omega}_{\nabla\cdot\vec{F}}\pm\overset{3}{\omega}_{\nabla\cdot\vec{G}}=\overset{3}{\omega}_{(\nabla\cdot\vec{F}\pm\nabla\cdot\vec{G})},$$

由式(10)又知 $d\overset{2}{\omega}=\overset{3}{\omega}_{\nabla\cdot\overset{2}{\omega}}=\overset{3}{\omega}_{\nabla\cdot(\vec{F}\pm\vec{G})}$. 由 $\overset{3}{\omega}_{\nabla\cdot(\vec{F}\pm\vec{G})}=\overset{3}{\omega}_{(\nabla\cdot\vec{F}\pm\nabla\cdot\vec{G})}$，即可证得

$$\nabla\cdot(\vec{F}\pm\vec{G})=\nabla\cdot\vec{F}+\nabla\cdot\vec{G}.$$

(6) $\nabla\times(\vec{F}\pm\vec{G})=\nabla\times\vec{F}+\nabla\times\vec{G}$.

式中出现矢量场的旋度，故引用一次微分形式，记 $\overset{1}{\omega}_{\vec{F}}\pm\overset{1}{\omega}_{\vec{G}}=\overset{1}{\omega}$. 对此式求一次外微分，由式(8),(17)得

$$d\overset{1}{\omega}=d\overset{1}{\omega}_{\vec{F}}\pm d\overset{1}{\omega}_{\vec{G}}=\overset{2}{\omega}_{\nabla\times\vec{F}}\pm\overset{2}{\omega}_{\nabla\times\vec{G}}=\overset{2}{\omega}_{(\nabla\times\vec{F}\pm\nabla\times\vec{G})},$$

由式(8)又知 $d\overset{1}{\omega}=\overset{2}{\omega}_{\nabla\times\overset{1}{\omega}}=\overset{2}{\omega}_{\nabla\times(\vec{F}\pm\vec{G})}$，由 $\overset{2}{\omega}_{\nabla\times(\vec{F}\pm\vec{G})}=\overset{2}{\omega}_{(\nabla\times\vec{F}\pm\nabla\times\vec{G})}$，即可证得

$$\nabla\times(\vec{F}\pm\vec{G})=\nabla\times\vec{F}\pm\nabla\times\vec{G}.$$

(7) $\nabla\cdot(f\vec{F})=\vec{F}\cdot\nabla f+f\nabla\cdot\vec{F}$

式中出现标量场的梯度和矢量场的散度，故宜取 $f=\overset{0}{\omega}$ 及 $\overset{2}{\omega}_{\vec{F}}=\overset{2}{\omega}$，利用式(16)，则有

$$d(\overset{0}{\omega}\wedge\overset{2}{\omega})=d\overset{0}{\omega}\wedge\overset{2}{\omega}+(-1)^0\overset{0}{\omega}\wedge d\overset{2}{\omega}=\overset{1}{\omega}_{\nabla f}\wedge\overset{2}{\omega}_{\vec{F}}+f\wedge\overset{3}{\omega}_{\nabla\cdot\vec{F}}=\overset{3}{\omega}_{\vec{F}\cdot\nabla f}+\overset{3}{\omega}_{f\nabla\cdot\vec{F}},$$

由式(18),(10)得 $d(\overset{0}{\omega}\wedge\overset{2}{\omega})=d(f\wedge\overset{2}{\omega}_{\vec{F}})=d\overset{2}{\omega}_{f\vec{F}}=\overset{3}{\omega}_{\nabla\cdot(f\vec{F})}$，

又由 $\overset{3}{\omega}_{\nabla\cdot(f\vec{F})}=\overset{3}{\omega}_{(\vec{F}\cdot\nabla f+f\nabla\cdot\vec{F})}$，即可证得

$$\nabla\cdot(f\vec{F})=\vec{F}\cdot\nabla f+f\nabla\cdot\vec{F}.$$

(8) $\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{G}\cdot\nabla\times\vec{F}-\vec{F}\cdot\nabla\times\vec{G}$

利用式(19)，有 $\overset{1}{\omega}_{\vec{F}}\wedge\overset{1}{\omega}_{\vec{G}}=\overset{2}{\omega}_{\vec{F}\times\vec{G}}$，然后对该等式求一次外微分. 利用式(10)，得等式右侧为 $\overset{3}{\omega}_{\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G})}$；利用式(16),(8)和(20)，得等式左侧为 $\overset{3}{\omega}_{(\vec{G}\cdot\nabla\times\vec{F}-\vec{F}\cdot\nabla\times\vec{G})}$，即可得证.

(9) $\nabla\times(f\vec{F})=\nabla f\times\vec{F}+f\nabla\times\vec{F}$

式中出现梯度和旋度，故宜取 $f=\overset{0}{\omega}$ 和 $\overset{1}{\omega}_{\vec{F}}=\overset{1}{\omega}$，然后分别利用式(16)和(8)求外微分 $d(\overset{0}{\omega}\wedge\overset{1}{\omega})$，在运算中还利用式(6),(19)和(18)，即可证得该命题.

(10) $\nabla\cdot\nabla\times\vec{F}=0$

记 $\overset{1}{\omega}_{\vec{F}}=\overset{1}{\omega}$，由式(8)，则得 $d\overset{1}{\omega}=\overset{2}{\omega}_{\nabla\times\vec{F}}$，由式(12)知 $d^2=0$，因而有 $d^2\overset{1}{\omega}=d(d\overset{1}{\omega})=d\overset{2}{\omega}_{\nabla\times\vec{F}}=\overset{3}{d\omega}_{\nabla\cdot\nabla\times\vec{F}}=0$，即可得证.

(11) $\nabla\times\nabla f=0$

记 $f=\overset{0}{\omega}$，由式(6)得 $d\overset{0}{\omega}=\overset{1}{\omega}_{\nabla f}$，再利用式(12)，则可得 $d^2\overset{0}{\omega}=d(d\overset{0}{\omega})=d\overset{1}{\omega}_{\nabla f}=\overset{2}{\omega}_{\nabla\times\nabla f}=0$，即可得证.

从(1)至(11)的证明中看出：把微分形式论和外微分运算应用于矢量分析中，具有明显的优越性. 它使推导演绎的篇幅大为缩减，使运算工作大大地简化，显示出特有的简捷性和鲜明

性.剩下的四个公式,由于自身的复杂性,证明过程不免麻烦些,但终究要比矢量分析所沿用的方法更简单、更明快.现分述于下:

(12)$\nabla\times\nabla\times\vec{F}=\nabla\nabla\cdot\vec{F}-\nabla^2\vec{F}$

因为$\nabla\times\vec{F}$为一矢量函数,故可用一次微分形式表示,记

$$\overset{1}{\omega}=\overset{1}{\omega}_{\nabla\times\vec{F}},\tag{I}$$

$$\overset{1}{\omega}=(\frac{\partial F_3}{\partial x^2}-\frac{\partial F_3}{\partial x^3})dx^1+(\frac{\partial F_1}{\partial x^3}-\frac{\partial F_3}{\partial x^1})dx^2+(\frac{\partial F_2}{\partial x^1}-\frac{\partial F_1}{\partial x^2})dx^3,\tag{II}$$

对式(I)求外微分,并利用式(8),得

$$d\overset{1}{\omega}=\overset{2}{\omega}_{\nabla\times\overset{1}{\omega}}=\overset{2}{\omega}_{\nabla\times\nabla\times\vec{F}},\tag{III}$$

对式(II)求外微分,把得到的结果添加以下附加项(零),即

$$\pm\frac{\partial^2F_1}{\partial x^1\partial x^1}dx^2\wedge dx^3\pm\frac{\partial^2F_2}{\partial x^2\partial x^2}dx^3\wedge dx^1\pm\frac{\partial^2F_3}{\partial x^3\partial x^3}dx^1\wedge dx^2,$$

经整理归并后,可得

$$d\overset{1}{\omega}=\overset{2}{\omega}(\nabla\nabla\cdot\vec{F}-\nabla^2\vec{F}),\tag{IV}$$

由式(III)等于式(IV),公式即可得证.

(13)$\nabla(\vec{F}\cdot\vec{G})=(\vec{F}\cdot\nabla)\vec{G}+(\vec{G}\cdot\nabla)\vec{F}+\vec{F}\times\nabla\times\vec{G}+\vec{G}\times\nabla\times\vec{F}$

因为$\vec{F}\cdot\vec{G}$为一标量函数,故可用零次微分形式表示,记

$$\overset{0}{\omega}=\vec{F}\cdot\vec{G},\tag{V}$$

$$\overset{0}{\omega}=F_1G_1+F_2G_2+F_3G_3,\tag{VI}$$

对式(V)求外微分,并利用式(6)得

$$d\overset{0}{\omega}=\overset{1}{\omega}_{\nabla\overset{0}{\omega}}=\overset{1}{\omega}_{\nabla(\vec{F}\cdot\vec{G})},\tag{VII}$$

对式(VI)求外微分,得到的结果再添加以下附加项(零),即

$$\pm F_2\frac{\partial G_1}{\partial x^2}dx^1\pm F_3\frac{\partial G_1}{\partial x^3}dx^1\pm F_1\frac{\partial G_2}{\partial x^1}dx^2\pm F_3\frac{\partial G_2}{\partial x^3}dx^2\pm F_1\frac{\partial G_3}{\partial x^1}dx^3$$

$$\pm F_2\frac{\partial G_3}{\partial x^2}dx^3\pm G_2\frac{\partial F_1}{\partial x^2}dx^1\pm G_3\frac{\partial F_1}{\partial x^3}dx^1$$

$$\pm G_1\frac{\partial F_2}{\partial x^1}dx^2\pm G_3\frac{\partial F_2}{\partial x^3}dx^2\pm G_1\frac{\partial F_3}{\partial x^1}dx^3\pm G_2\frac{\partial F_3}{\partial x^2}dx^3,$$

再经过整理和归并后,可得

$$d\overset{0}{\omega}=\overset{1}{\omega}_{((\vec{F}\cdot\nabla)\vec{G}+(\vec{G}\cdot\nabla)\vec{F}+\vec{F}\times\nabla\times\vec{G}+\vec{G}\times\nabla\times\vec{F})},\tag{VIII}$$

联立式(VII)与式(VIII).即可得证.

(14)$\nabla(\vec{F}\cdot\vec{F})=2(\vec{F}\cdot\nabla)\vec{F}+2\vec{F}\times\nabla\times\vec{F}$

本式事实上是(13)的特例,根据(13)公式,把矢量函数$\vec{G}$也改为矢量函数$\vec{F}$,即可得本式。

(15)$\nabla\times(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{F}\nabla\cdot\vec{G}-\vec{G}\nabla\cdot\vec{F}+(\vec{G}\cdot\nabla)\vec{F}-(\vec{F}\cdot\nabla)\vec{G}$

本式的求证完全可仿效(12)和(13)的求证思路和方法.鉴于$\vec{F}\times\vec{G}$为一矢量函数,故可用

一次微分形式表示，记

$$\overset{1}{\omega}=\overset{1}{\omega}_{\vec F\times\vec G},\tag{Ⅸ}$$

$$\overset{1}{\omega}=(F_2G_3-F_3G_2)dx^1+(F_3G_1-F_1G_3)dx^2+(F_1G_2-F_2G_1)dx^3,\tag{Ⅹ}$$

对式(Ⅸ)求外微分，并由式(8)得

$$d\overset{1}{\omega}=\overset{2}{\omega}_{\nabla\times(\vec F\times\vec G)},\tag{Ⅺ}$$

对式(Ⅹ)求外微分，所得结果又添加零附加项，再经过整理和归并后，得

$$d\overset{1}{\omega}=\overset{2}{\omega}_{(\vec F\nabla\cdot\vec G-\vec G\nabla\cdot\vec F+(\vec G\cdot\nabla)\vec F-(\vec F\cdot\nabla)\vec G)},\tag{Ⅻ}$$

联立式(Ⅺ)及(Ⅻ)，即可得证.

参　考　文　献

[1] 陈强顺，麦克斯韦磁场方程组的外微分形式，物理，17，8，(1988)，468—473.

[2] Schreiber, M., *Differential Forms—A Heuristic Introduction*, *Springer—Verlag*, New York Inc., (1977), 19—30, 74—81.

[3] Corwin, L. J., Szczarba, R. H., *Calculus in Vector Space*, Marcal Dekker, Inc., (1979), Chap. 15; 651—681.

[4] Marsden, J. E., Tromba, A. J., *Vector Calculus*, W. H. Freeman and Company, (1976), 397—409.

[5] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Inc., Third Edition, (1976), 253—266.

[6] Corwin, L. J., Szczarba, R. H., *Multivariable Caculus*, Marcel Dekker, Inc., (1982), 380—402.

[7] Westenholz, C. V., *Differential Forms in Mathematical Physics*, North-Holland Publishing Compamy, (1981), 142—155.

[8] Marsden, J. E., Tromba, A. J., *Vector Calculus*, W. H. Freeman and Company, Second Edition, (1981), 472—486.

[9] Loomis, L. H., Sternberg, S., *Advanced Calculus*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., (1968), 429—433, 438—441.

[10] 陈强顺，微分形式与外微分在电磁场中的应用，扬州师院学报(自然科学版)，10，3(1990)，54—63.

[11] 陈强顺，电荷守恒定律可确定麦克斯韦方程组的数学形式，同济大学学报，17，3，(1989)，395—400.

Applications of Differential Form Theory and Exterior Differential to the Electrodynamics

Chen Qiangshun　　Wang Jiancheng

(*Tongji University*)　　(*Huaqiao University*)

Abstract The authors inquire into several problems pertaining to the applications of differential form theory and exterior differential to electrodynamics, and point out the advantages of these applications.

Key words differential form theory, exterior differential, electrodynamics