

在各向异性磁介质中载流二次曲线焦点的磁场

林文枝 陈燊年

(电气技术系)

摘要 本文提出各向异性直角坐标系的概念,给出磁各向异性毕奥-萨伐尔定律在此坐标系中的形式,求得在各向异性磁介质中载流二次曲线焦点的磁场.为一般在各向异性直角坐标中求解问题提供一个范例.

关键词 磁场,二次曲线,焦点,各向异性

0 引言

在各向异性磁介质中求解磁场问题时,一般必须知道,在各向异性磁介质中磁矢势 \vec{A} 的积分公式,文[1]已给出该公式为

$$A_n(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi \sqrt{|\mu_{ik}|}} \sum_{m=1}^3 \Delta_{nm} \int \frac{j_m(\vec{x}') dV'}{(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mu_{ik}^{-1} R_i R_k)^{1/2}}, \quad (n = 1, 2, 3,). \quad (1)$$

并应用它求得各向异性磁介质的电感公式.文[2]和[3]继续应用它分别求得在各向异性磁介质中磁矢势 \vec{A} 的多极展开和各向异性磁介质中的毕奥-萨伐尔定律,后者利用该定律计算了若干种电流分布的各向异性磁场,它们都有一个特点,矢径 \vec{R} 的三个分量中,仅有一个分量为积分变量,其余二个分量为积分恒量,致使该定律积分是可积的.本文进而应用它求载流二次曲线焦点的磁场.此时,在矢径 \vec{R} 的三个分量中,有两个分量为积分变量,如果仍沿用文[3]的方法,将遇到对定律积分时不可积的困难.为此,本文引进一个新坐标系,称为各向异性直角坐标系,在此坐标系中,可使积分时只有一个积分变量,因而也是可积的.

* 本文 1992-01-07 收到.

1 在各向异性直角坐标系中毕奥-萨伐尔定律

当各向异性磁介质的三个主轴与直角坐标系 x_1, x_2, x_3 三个轴互为平行时, 式(1)简化为下式

$$\begin{cases} A_1(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{\mu_{11}}} \int \frac{j_1(\vec{x}') dV'}{(\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}})^{1/2}}, \\ A_2(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{33}}{\mu_{22}}} \int \frac{j_2(\vec{x}') dV'}{(\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}})^{1/2}}, \\ A_3(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{22}}{\mu_{33}}} \int \frac{j_3(\vec{x}') dV'}{(\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}})^{1/2}}, \end{cases} \quad (1)'$$

式中 $dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$, $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$, \vec{R} 为由源点矢径 \vec{x}' 端点指向场点矢径 \vec{x} 端点的矢径, 如图 1 所示. 若令

$$a_1 = \sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{\mu_{11}}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{33}}{\mu_{22}}}, \quad a_3 = \sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{22}}{\mu_{33}}}, \quad (2)$$

则磁矢势 \vec{A} 的三个分量合并在一起为

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{J}'(\vec{x}') dV'}{y}, \quad (3)$$

式中,

$$\vec{J}'(\vec{x}') = a_1 j_1(\vec{x}') \vec{e}_1 + a_2 j_2(\vec{x}') \vec{e}_2 + a_3 j_3(\vec{x}') \vec{e}_3, \quad (4)$$

$$y = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{1/2}, \quad (5)$$

且有

$$y_1 = \frac{R_1}{\sqrt{\mu_{11}}}, \quad y_2 = \frac{R_2}{\sqrt{\mu_{22}}}, \quad y_3 = \frac{R_3}{\sqrt{\mu_{33}}}, \quad (6)$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 分别是直角坐标轴的三个单位矢量.

对式(3)两边取旋度得

$$\vec{B}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{J}' \times \vec{y}'}{y^3} dV', \quad (7)$$

式中

$$\vec{y}' = y'_1 \vec{e}_1 + y'_2 \vec{e}_2 + y'_3 \vec{e}_3, \quad (8)$$

且有

$$y'_1 = \frac{y_1}{\sqrt{\mu_{11}}}, \quad y'_2 = \frac{y_2}{\sqrt{\mu_{22}}}, \quad y'_3 = \frac{y_3}{\sqrt{\mu_{33}}}, \quad (9)$$

式(7)是磁各向异性毕奥-萨伐尔定律在直角坐标系 x_1, x_2, x_3 中的形式.

因为 $\vec{R} = R_1 \vec{e}_1 + R_2 \vec{e}_2 + R_3 \vec{e}_3$, 当 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ 时, 有 $\vec{y} = (1/\sqrt{\mu})\vec{R}$. 即 \vec{y} 的长度比 \vec{R} 的缩短, 且方向平行. 由此可知, 当 $\mu_{11} \neq \mu_{22} \neq \mu_{33}$ 时, \vec{y} 的长度不仅比 \vec{R} 的缩短, 而且两者方向不平行.

由式(5)、(6)和式(8)、(9)可见, \vec{y}' 相对 \vec{y} 的关系与 \vec{y} 相对 \vec{R} 的关系相同. 由此可知, 当 $\mu_{11} \neq \mu_{22} \neq \mu_{33}$ 时, 不仅 \vec{y}' 的长度比 \vec{y} 的长度缩短, 而且两者方向不平行.

以上说明, 在直角坐标系中, 由于磁介质的各向异性在式(7)中引起 \vec{y}' 和 \vec{y} 对 \vec{R} 的偏离. 即 \vec{y}' 和 \vec{y} 的起点虽然都位于体积元 dV' 处, 但终点已分别落在不同点上, 如图 2 所示.

因此, 必须设法把 \vec{y}' 变换为 \vec{y} . 由式(2)、(4)和式(6)、(8)、(9)得

$$\begin{aligned} \vec{j}' \times \vec{y}' &= (a_2 j_2 \frac{R_3}{\mu_{33}} - a_3 j_3 \frac{R_2}{\mu_{22}}) \vec{e}_1 + (a_3 j_3 \frac{R_1}{\mu_{11}} - a_1 j_1 \frac{R_3}{\mu_{33}}) \vec{e}_2 \\ &\quad + (a_1 j_1 \frac{R_2}{\mu_{22}} - a_2 j_2 \frac{R_1}{\mu_{11}}) \vec{e}_3 \\ &= \sqrt{\mu_{11}} (\frac{j_2}{\sqrt{\mu_{22}}} \frac{R_3}{\sqrt{\mu_{33}}} - \frac{j_3}{\sqrt{\mu_{33}}} \frac{R_2}{\sqrt{\mu_{22}}}) \vec{e}_1 + \sqrt{\mu_{22}} (\frac{j_3}{\sqrt{\mu_{33}}} \frac{R_1}{\sqrt{\mu_{11}}} - \frac{j_1}{\sqrt{\mu_{11}}} \frac{R_3}{\sqrt{\mu_{33}}}) \vec{e}_2 \\ &\quad + \sqrt{\mu_{33}} (\frac{j_1}{\sqrt{\mu_{11}}} \frac{R_2}{\sqrt{\mu_{22}}} - \frac{j_2}{\sqrt{\mu_{22}}} \frac{R_1}{\sqrt{\mu_{11}}}) \vec{e}_3 \\ &= \sqrt{\mu_{11}} (j''_{2y_3} - j''_{3y_2}) \vec{e}_1 + \sqrt{\mu_{22}} (j''_{3y_1} - j''_{1y_3}) \vec{e}_2 + \sqrt{\mu_{33}} (j''_{1y_2} - j''_{2y_1}) \vec{e}_3 \\ &= \vec{\mu}'' \cdot (\vec{j}'' \times \vec{y}), \end{aligned} \quad (10)$$

式中并矢 $\vec{\mu}''$ 和矢量 \vec{j}'' 分别定义为

$$\vec{\mu}'' = \sqrt{\mu_{11}} \vec{e}_1 \vec{e}_2 + \sqrt{\mu_{22}} \vec{e}_2 \vec{e}_2 + \sqrt{\mu_{33}} \vec{e}_3 \vec{e}_3, \quad (11)$$

$$\vec{j}'' = \frac{j_1}{\sqrt{\mu_{11}}} \vec{e}_1 + \frac{j_2}{\sqrt{\mu_{22}}} \vec{e}_2 + \frac{j_3}{\sqrt{\mu_{33}}} \vec{e}_3. \quad (12)$$

现在引入一新的坐标系 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 它与原来直角坐标系 x_1, x_2, x_3 相互平行且大小关系为

$$\xi_1 = \frac{x_1}{\sqrt{\mu_{11}}}, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{\sqrt{\mu_{22}}}, \quad \xi_3 = \frac{x_3}{\sqrt{\mu_{33}}}, \quad (13)$$

对于新坐标系, 在三个轴 ξ_1, ξ_2, ξ_3 上所定义的单位长度不同, 分别为 $\frac{1}{\sqrt{\mu_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{\mu_{22}}}, \frac{1}{\sqrt{\mu_{33}}}$. 因此, 称为各向异性直角坐标系. 原来坐标系 x_1, x_2, x_3 则称为各向同性直角坐标系.

积分体积元 $dV' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$ 是在各向同性直角坐标系里, 把它变换到各向异性直角坐标系里, 依式(13)有

$$dV' = \sqrt{\mu_{11} \mu_{22} \mu_{33}} d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3. \quad (14)$$

当电流作线分布时, 在各向异性直角坐标系中 $\vec{j}'' d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3$ 总可以表为线电流元的形式, 即

$$\vec{j}'' (\xi'_1 \xi'_2 \xi'_3) d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3 = I_\xi d\vec{l}_\xi. \quad (15)$$

若在各向同性直角坐标系中, 则

$$\vec{j}'' d\xi'_1 d\xi'_2 d\xi'_3 = \vec{j}'' \frac{dx'_1 dx'_2 dx'_3}{\sqrt{\mu_{11} \mu_{22} \mu_{33}}} = \vec{j}'' \frac{S}{\sqrt{\mu_{22} \mu_{33}}} \frac{d\vec{l}}{\sqrt{\mu_{11}}},$$

上式中 S 代表导线横截面, $d\vec{l}$ 为线元. 比较以上二式得电流强度和线元在上述两个直角坐标系之间的关系分别为

$$I_{\xi} = \left(\frac{j_1^2}{\mu_{11}} + \frac{j_2^2}{\mu_{22}} + \frac{j_3^2}{\mu_{33}} \right)^{1/2} \frac{S}{\sqrt{\mu_{22}\mu_{33}}}, \quad (16)$$

$$d\vec{l}_{\xi} = \frac{d\vec{l}}{\sqrt{\mu_{11}}}, \quad (17)$$

把式(10)、(14)和(15)代入式(7)中, 便得在各向异性直角坐标系中的磁各向异性毕奥-萨伐尔定律的形式为

$$\vec{B} = \frac{I_{\xi}}{4\pi} \sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}} \vec{\mu} \cdot \int \frac{d\vec{l}_{\xi} \times \vec{y}}{y^3}, \quad (18)$$

式中 \vec{y} 是由线元 $d\vec{l}_{\xi}$ 指向场点的矢径, 如图3所示.

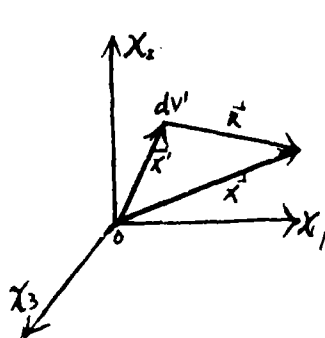


图1 \vec{R} 与 \vec{x}' 和 \vec{x} 的矢量关系图

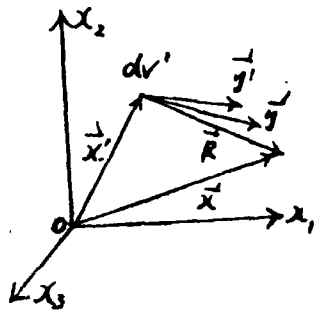


图2 在各向同性直角坐标系中 y' 和 y 对 \vec{R} 的偏离图

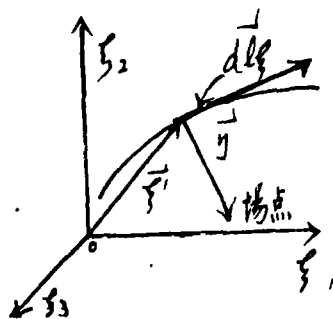


图3 磁各向异性毕奥-萨伐尔定律表示图

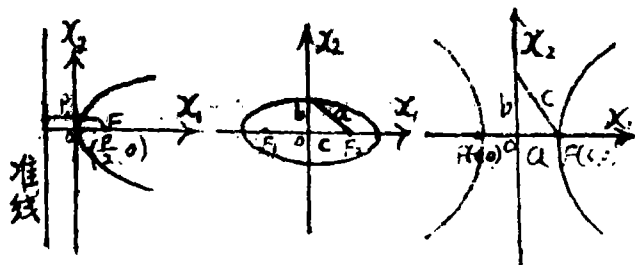
值得指出, \vec{y} 在各向同性直角坐标系中不易作图, 因为它较之 \vec{R} 有一长度缩短和方向的偏离. 但由式(6)见到 \vec{y} 在各向异性坐标系中则易作图, 因为它的三个分量就是它在三个坐标轴 ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 上的投影, 不必作长度和方向的偏离. 也就是说, \vec{y} 是各向异性直角坐标系中的矢量.

2 二次曲线方程参数在二个不同坐标系间的变换

在各向同性直角坐标系 x_1, x_2, x_3 中, 抛物线、椭圆和双曲线的标准方程分别为

$$x_2^2 = 2px_1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad (19)$$

p 是抛物线焦点到准线的距离; a, b 对于椭圆即为长短半轴, 对于双曲线为实、虚半轴. a, b 与焦点坐标 c 的关系如图4所示.

图 4 抛物线、椭圆、双曲线 a, b 与焦点坐标 c 关系图

式(19)在各向异性直角坐标系 ξ_1, ξ_2, ξ_3 中, 相应的标准方程为

$$\xi_2^2 = 2p'\xi_1, \quad \frac{\xi_1^2}{a'^2} + \frac{\xi_2^2}{b'^2} = 1, \quad \frac{\xi_1^2}{a'^2} - \frac{\xi_2^2}{b'^2} = 1, \quad (20)$$

式中带撇表示在各向异性直角坐标系中二次曲线方程的参数.

把式(13)代入式(20)中, 再与式(19)比较, 便得三个参数各自的变换关系为

$$p' = \frac{\sqrt{\mu_{11}}}{\mu_{22}}p, \quad a' = \frac{a}{\sqrt{\mu_{11}}}, \quad b' = \frac{b}{\sqrt{\mu_{22}}}, \quad (21)$$

此外, 参照图 4 并利用上式, 就其余二个参数, 对椭圆有

$$c'^2 = a'^2 - b'^2 = \frac{a^2}{\mu_{11}} - \frac{b^2}{\mu_{22}}, \quad (22)$$

$$e' = \frac{c'}{a'} = \sqrt{\frac{a^2}{\mu_{11}} - \frac{b^2}{\mu_{22}}} / \frac{a}{\sqrt{\mu_{11}}}, \quad (23)$$

对双曲线有

$$c'^2 = a'^2 + b'^2 = \frac{a^2}{\mu_{11}} + \frac{b^2}{\mu_{22}}, \quad (24)$$

$$e' = \frac{c'}{a'} = \sqrt{\frac{a^2}{\mu_{11}} + \frac{b^2}{\mu_{22}}} / \frac{a}{\sqrt{\mu_{11}}}. \quad (25)$$

在各向异性极坐标下, 以定点为极点, 以 ξ_1 轴为极轴, 则二次曲线方程为

$$y = \frac{e' p'}{1 - e' \cos \theta'}, \quad (26)$$

对于椭圆和双曲线,利用式(21)~(25)得参量 p' 变换到各向同性直角坐标系中的参量 a 和 b 的关系分别为

$$p' = \frac{a'}{e'} - c' = \frac{b^2}{\mu_{22}} / \sqrt{\frac{a^2}{\mu_{11}} - \frac{b^2}{\mu_{22}}}$$

和

$$p' = c' - \frac{a'}{e'} = \frac{b^2}{\mu_{22}} / \sqrt{\frac{a^2}{\mu_{11}} + \frac{b^2}{\mu_{22}}}.$$

3 在各向异性直角坐标系中载流二次曲线焦点的磁场

在极坐标中,由二次曲线上的某个线元指向焦点的矢径为

$$\vec{y} = -y\vec{e}_r, \quad (29)$$

而线元可表为

$$d\vec{l}_\zeta = dy\vec{e}_r - yd\theta' \vec{e}_{\theta'},$$

因而

$$d\vec{l}_\zeta \times \vec{y} = -y^2 d\theta' \vec{e}_\zeta, \quad (30)$$

式中 $\vec{e}_r, \vec{e}_{\theta'}, \vec{e}_\zeta$ 为相互正交的单位矢量,并且符合右手螺旋关系,如图5所示.

把式(26)和式(30)代入以下积分中得

$$\begin{aligned} \int \frac{d\vec{l}_\zeta \times \vec{y}}{y^3} &= -\frac{\vec{e}_\zeta}{e' p'} \int_0^{2\pi} (1 - e' \cos \theta') d\theta' \\ &= -\frac{2\pi}{e' p'} \vec{e}_\zeta, \end{aligned}$$

代入式(18)得

$$\vec{B} = \sqrt{\mu_{11}\mu_{22}\mu_{33}} \frac{I_\zeta}{4\pi} \mu'' \cdot \left(-\frac{2\pi}{e' p'} \vec{e}_\zeta\right),$$

再以式(11)和(16)代入上式中,得

$$\vec{B} = -\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{33}}}{2e' p'} \left(\frac{j_1^2}{\mu_{11}} + \frac{j_2^2}{\mu_{22}} + \frac{j_3^2}{\mu_{33}}\right)^{1/2} S \vec{e}_\zeta, \quad (31)$$

这就是在各向异性直角坐标系中载流二次曲线焦点的磁场.

在各向同性直角坐标系中载流二次曲线焦点的磁场

式(31)中的二次曲线方程的参数 e' 和 p' 是在各向异性直角坐标系中,现在把它们变换到各向同性直角坐标系中.对抛物线有

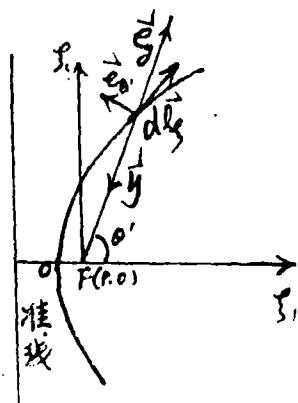


图5 各向异性极坐标系中线元及源点,矢径表示图

$$e' = 1, \quad p' = \frac{\sqrt{\mu_{11}}}{\mu_{22}} p = \frac{2\sqrt{\mu_{11}}}{\mu_{22}} f,$$

代入式(31)中得

$$\vec{B} = -\frac{\mu_{22}\sqrt{\mu_{33}}}{4f} \left(\frac{j_1^2}{\mu_{11}} + \frac{j_2^2}{\mu_{22}} + \frac{j_3^2}{\mu_{33}} \right)^{1/2} \vec{S} e_t. \quad (32)$$

f 是抛物线焦点到顶点的距离. 对椭圆, 用式(23)和(27)代入式(31)中得

$$\vec{B} = -a \frac{\mu_{22}\sqrt{\mu_{33}}}{2b^2} \left(\frac{j_1^2}{\mu_{11}} + \frac{j_2^2}{\mu_{22}} + \frac{j_3^2}{\mu_{33}} \right)^{1/2} \vec{S} e_t. \quad (33)$$

对双曲线, 用式(25)和(28)代入式(31)中得

$$\vec{B} = -\frac{a\mu_{22}\sqrt{\mu_{33}}}{2b^2} \left(\frac{j_1^2}{\mu_{11}} + \frac{j_2^2}{\mu_{22}} + \frac{j_3^2}{\mu_{33}} \right)^{1/2} \vec{S} e_t. \quad (34)$$

以上三式就是本文所求的结果.

当 $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ 时, 即当磁介质由各向异性过渡为各向同性时, 对抛物线, 式(32)简化为

$$\vec{B} = -\frac{\mu}{4f} I \vec{e}_t, \quad (35)$$

对椭圆, 式(33)简化为

$$\vec{B} = -\frac{a\mu}{2b^2} I \vec{e}_t.$$

由于 $e = c/a$ 和 $b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1 - e^2)$, 故用离心率 e 表示为

$$\vec{B} = -\frac{\mu I \vec{e}_t}{2a(1 - e^2)}, \quad (36)$$

作为特例, $e = 0$, 椭圆退化为圆, 得

$$\vec{B} = -\frac{\mu I}{2a} \vec{e}_t,$$

这正是预期的结果. 对双曲线, 式(34)化为

$$\vec{B} = -\frac{a\mu}{2b^2} I \vec{e}_t,$$

由于 $e = c/a$ 和 $b^2 = c^2 - a^2 = a^2(e^2 - 1)$, 故用离心率 e 表示为

$$\vec{B} = -\frac{\mu I \vec{e}_t}{2a(e^2 - 1)}, \quad (37)$$

作为特例, $a = b$, $e = \sqrt{2}$ 即为反比曲线, 得

$$\vec{B} = -\frac{\mu I}{2a} \vec{e}_t.$$

也正是所预期的结果.

参 考 文 献

- [1] 陈荣年、陈洁, 各向异性磁介质的电感新公式, 电子科学学刊, 科学出版社, 2(1991), 159—168.
- [2] 王建成、陈荣年, 在各向异性介质中磁向量势的多极矩展开, 华侨大学学报(自然科学版), 1(1990).
- [3] 王建成、陈荣年, 磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律及其应用, 华侨大学学报(自然科学版), 2(1989).

The Magnetic Field With Focus of Current-Carrying Conics in Anisotropic Magnetic Media

Lin Wenzhi Chen Xinnian

(*Department of Electric Technique*)

Abstract In this paper, a concept of anisotropic rectangular coordinates system is advanced; the form of Biot-Savart law of magnetic anisotropy in this coordinate system is given; the magnetic field with focus of current-carrying conics in anisotropic magnetic media is derived, An example is provided for solving general problem in anisotropic rectangular coordinates.

Key words magnetic fields, quadric curves foci, anisotropy