

# 矩阵逆阵的上界及相应扰动 方程组的误差估计

陈 恒 新

(管理信息科学系)

**摘要** 本文证明了一类非对角占优矩阵是可逆的,并给出了其逆阵的上界,以及解相应扰动方程组的误差估计.从而使严格对角占优这一类矩阵的有关结论得到扩充,并成为本文定理的特例.

**关键词** 逆矩阵,界,扰动方程,误差估计

## 0 引言

在数值代数的计算中,经常要判别一个矩阵  $A$  是否可逆,以及求其逆矩阵  $A^{-1}$ . 例如,对相应扰动方程组  $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$  进行误差估计时,要计算条件数  $\text{Cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ . 而求  $A$  之逆矩阵  $A^{-1}$  是很麻烦的. 如果能够用简便的方法获知  $A$  是可逆的,并且不必通过求逆矩阵  $A^{-1}$  便能得到  $\|A^{-1}\|$  的上界,这无疑是很有意义的,并且具有较好的实用价值. 当  $A$  是严格对角占优矩阵时,这些问题已有结论[1].

那么,当  $A$  是非对角占优矩阵时,情况又如何呢? 为此,本文证明了一类非对角占优矩阵  $A$  是可逆的,并在不求逆矩阵  $A^{-1}$  下,而通过简单的计算便得到  $\|A^{-1}\|$  的上界. 并给出了解相应扰动方程组的误差估计定理. 而且使原有  $A$  是严格对角占优的情况包括在本文定理之中成为特例.

为叙述方便,引入如下记法:设  $n$  阶方阵  $A = [a_{ij}]$ ,  $N_1 \oplus N_2 = \tilde{N}_1 \oplus \tilde{N}_2 = N = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ ,  $a_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ,  $\tilde{a}_i = \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$ ,  $s_i = \sum_{j \in N_1} |a_{ij}|$ ,  $\tilde{N}_1 \cap \tilde{N}_2 = \emptyset$ ,  $h_i = \sum_{j \in N_2} |a_{ij}|$ ,  $\tilde{s}_i = \sum_{j \in \tilde{N}_1} |a_{ji}|$ ,  $\tilde{h}_i = \sum_{j \in \tilde{N}_2} |a_{ji}|$ , 空集  $\emptyset$ . 则  $s_i + h_i = \tilde{s}_i + \tilde{h}_i = \tilde{a}_i$ .

\* 本文 1991—05—17 收到.

## 1 定理证明

引理1 若  $A$  为严格对角占优矩阵, 即  $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , 则  $A$  非奇异, 且

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} (|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)}.$$

证略, 见文[1]P56 引理.

定理1 若矩阵  $A$  对于  $i \in N_1 = \{i | \sum_{k \neq i} |a_{ik}| < |a_{ii}|\} \neq \emptyset$ ,  $j \in N_2 = \{j | \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \geq |a_{jj}|\}$ , 成立

$\max_{j \in N_2} \frac{s_j}{|a_{jj}| - h_j} = d_1 < d_2 = \min_{i \in N_1} \frac{|a_{ii}| - s_i}{h_i}$ , 且  $|a_{jj}| - h_j > 0$ ,  $j \in N_2$ , 则  $A$  非奇异. 若取  $d = (d_1 + d_2)/2$  (当  $N_2 = \emptyset$ , 则取  $d=1$ ), 便有

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{d}{\min_{1 \leq i \leq n} (|a_{ii}| - a_i^{(1)})} = \mu,$$

其中

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} s_i + dh_i, & i \in N_1, \\ s_i/d + h_i, & i \in N_2. \end{cases}$$

特别地, 当  $N_2 = \emptyset$ , 本定理即为引理1之结果.

证明 由  $j \in N_2$  有  $\sum_{k \neq j} |a_{jk}| \geq |a_{jj}|$ , 得  $s_j + h_j \geq |a_{jj}|$ ,  $s_j \geq |a_{jj}| - h_j > 0$ . 因此  $\frac{s_j}{|a_{jj}| - h_j} \geq 1$ , 于是有  $d_1 = \max_{j \in N_2} \frac{s_j}{|a_{jj}| - h_j} \geq 1$ . 因  $d_1 < d_2$ , 取  $d = (d_1 + d_2)/2$ , 则有  $d_1 < d < d_2$ . 因此由定理1条件知, 对一切  $i \in N_1, j \in N_2$  有

$$1 \leq \frac{s_j}{|a_{jj}| - h_j} < d < \frac{|a_{ii}| - s_i}{h_i}. \quad (1)$$

令对角矩阵

$$D = \text{diag}(d_i | d_i = 1, i \in N_1, d_i = d, i \in N_2), \quad (2)$$

则  $\det D \neq 0$ , 作

$$A_1 = D^{-1}AD = [a_{ij}^{(1)}], \quad (3)$$

则有

$$a_{ij}^{(1)} = d_i^{-1} a_{ij} d_j = \begin{cases} a_{ij} d_j, & i \in N_1, \\ d^{-1} a_{ij} d_j, & i \in N_2, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

因此

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} a_{ij}, & i \in N_1, \\ d^{-1} a_{ij}, & i \in N_2, \end{cases} \quad j \in N_1 \quad a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} a_{ij} d, & i \in N_1, \\ a_{ij}, & i \in N_2, \end{cases} \quad j \in N_2 \quad (4)$$

于是其对角元  $a_{ii}^{(1)} = a_{ii}, i=1, 2, \dots, n$ .

(i) 当  $i \in N_1$  时, 由式(4)有  $a_i^{(1)} = \sum_{j \neq i} |a_{ij}^{(1)}| = \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}| + \sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij} d| = s_i + dh_i$ . 因  $s_i + h_i = a_i$ ,  $s_i, h_i$

$\geq 0$ . 若  $h_i > 0$ , 由式(1)后一不等式, 则有

$$s_i + dh_i < s_i + \frac{|a_{ii}| - s_i}{h_i} h_i = |a_{ii}|,$$

若  $h_i = 0$ , 则

$$s_i + dh_i = s_i = a_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| < |a_{ii}|,$$

即恒有

$$a_i^{(1)} = s_i + dh_i < |a_{ii}|, \quad i \in N_1. \quad (5)$$

(ii) 当  $i \in N_2$  时, 由式(4)和式(1)前二个不等式有

$$\begin{aligned} a_i^{(1)} &= \sum_{j \neq i} |a_{ij}^{(1)}| = \sum_{\substack{j \in N_1 \\ j \neq i}} |d^{-1} a_{ij}| + \sum_{\substack{j \in N_2 \\ j \neq i}} |a_{ij}| \\ &= s_i \frac{1}{d} + h_i < s_i \frac{|a_{ii}| - h_i}{s_i} + h_i = |a_{ii}|, \end{aligned}$$

即有

$$a_i^{(1)} = s_i/d + h_i < |a_{ii}|, \quad i \in N_2. \quad (6)$$

这样, 由式(5)、(6)便知  $A_1$  为严格对角占优矩阵, 因此由引理 1 知  $A_1$  是非奇异的, 且

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} s_i + dh_i, & i \in N_1 \\ s_i \frac{1}{d} + h_i, & i \in N_2. \end{cases}$$

因由式(3)有  $A = DA_1D^{-1}$ , 则  $A^{-1}$  亦存在, 且  $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \|D\|_{\infty} \|A_1^{-1}\|_{\infty} \|D^{-1}\|_{\infty}$ .

由于  $d > d_i \geq 1$ , 因此由式(2)知  $\|D\|_{\infty} = d$ ,  $\|D^{-1}\|_{\infty} = 1$  (显然由式(2)知, 若  $N_2 = \emptyset$ , 则  $D = I$ ,  $\|D\|_{\infty} = \|D^{-1}\|_{\infty} = 1$ , 此时可使  $d = 1$ ). 于是  $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq d \|A_1^{-1}\|_{\infty}$ , 又由引理 1 便有

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_{\infty} &\leq \frac{d}{\min_{1 \leq i \leq n} (|a_{ii}^{(1)}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^{(1)}|)} = \frac{d}{\min_{1 \leq i \leq n} (|a_{ii}| - a_i^{(1)})}, \text{ 其中} \\ a_i^{(1)} &= \begin{cases} s_i + dh_i, & i \in N_1, \\ s_i/d + h_i, & i \in N_2. \end{cases} \end{aligned}$$

此外, 当  $N_2 = \emptyset$  时, 即  $N_1 = N$ . 因  $d = 1, s_i = a_i, h_i = 0$ , 因此  $a_i^{(1)} = s_i + dh_i = s_i + 1 \times 0 = s_i = a_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, (i \in N_1 = N)$ . 即有

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} (|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)},$$

此即引理 1 之结果. 证毕.

引理 2 设方程组  $Ax = b \neq 0$  中  $A$  非奇异, 扰动方程组为  $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$ , 如果  $\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$ , 则  $A + \delta A$  非奇异, 且有

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{Cond}(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \left( \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right).$$

证略, 见文[2]P394 和文[3].

定理 2 设方程组  $Ax = b \neq 0$  中系数矩阵  $A$  满足定理 1 之条件, 对于扰动方程组  $(A + \delta A)$

•  $(x+\delta x)=b+\delta b$ , 如果  $\mu\|\delta A\|_\infty < 1$ , 则  $A+\delta A$  非奇异, 且有

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\mu\|A\|_\infty}{1-\mu\|\delta A\|_\infty} \left( \frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right), \quad (7)$$

其中  $\mu = \frac{d}{\min_{1 \leq i \leq n} (|a_{ii}| - a_i^{(1)})}$ , 而  $a_i^{(1)} = \begin{cases} s_i + dh_i, & i \in N_1, \\ s_i \frac{1}{d} + h_i, & i \in N_2, \end{cases}$   $N_1, N_2, d$  如定理1所定义.

证明 由定理1知  $A$  非奇异, 且  $\|A^{-1}\|_\infty \leq \mu$ . 于是  $\|A^{-1}\|_\infty \|\delta A\|_\infty \leq \mu \|\delta A\|_\infty < 1$ , 则由引理2知  $A+\delta A$  非奇异. 又由于条件数

$$\text{Cond}(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty \leq \mu \|A\|_\infty.$$

因此再由引理2便得式(7). 证毕.

同理, 对列亦有如下相应定理

定理3 若矩阵  $A$  对于  $i \in \tilde{N}_1 = \{i | \sum_{k \neq i} |a_{ik}| < |a_{ii}|\} \neq \emptyset, j \in \tilde{N}_2 = \{j | \sum_{k \neq j} |a_{kj}| \geq |a_{jj}|\}$  成立,

$$\max_{j \in \tilde{N}_2} \frac{\tilde{s}_j}{|a_{jj}| - \tilde{h}_j} = \tilde{d}_1 < \tilde{d}_2 = \min_{i \in \tilde{N}_1} \frac{|a_{ii}| - \tilde{s}_i}{\tilde{h}_i},$$

且  $|a_{jj}| - \tilde{h}_j > 0, j \in \tilde{N}_2$ . 则  $A$  非奇异, 若取  $\tilde{d} = (\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2)/2$  (当  $\tilde{N}_2 = \emptyset, \tilde{d} = 1$ ). 便有

$$\|A^{-1}\|_1 \leq \frac{\tilde{d}}{\min_{1 \leq i \leq n} (|a_{ii}| - \tilde{a}_i^{(1)})} = \tilde{\mu}, \quad (8)$$

其中  $\tilde{a}_i^{(1)} = \begin{cases} \tilde{s}_i + \tilde{d}h_i, & i \in \tilde{N}_1, \\ \tilde{s}_i/\tilde{d} + \tilde{h}_i, & i \in \tilde{N}_2. \end{cases}$

定理4 设方程组  $Ax=b \neq 0$  中系数矩阵  $A$  满足定理3之条件, 对于扰动方程组  $(A+\delta A)$

•  $(x+\delta x)=b+\delta b$ , 如果  $\tilde{\mu}\|\delta A\|_1 < 1$ , 则  $A+\delta A$  非奇异, 且有

$$\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1} \leq \frac{\tilde{\mu}\|A\|_1}{1-\tilde{\mu}\|\delta A\|_1} \left( \frac{\|\delta A\|_1}{\|A\|_1} + \frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1} \right),$$

其中  $\tilde{\mu}$  取值同定理3之式(8).

## 2 数值例子

例1 对于非对角占优矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & -1 & 2 \\ 5 & -7 & 12 & 4 \\ 8 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix},$$

由  $N_1 = \{i | \sum_{k \neq i} |a_{ik}| < |a_{ii}|\}, N_2 = \{j | \sum_{k \neq j} |a_{kj}| \geq |a_{jj}|\}$  知  $N_1 = \{1, 2\} \neq \emptyset, N_2 = \{3, 4\}$ . 又由  $s_i = \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}|, h_i = \sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}|$ , 得  $s_1 = 4, s_2 = 2, s_3 = 12, s_4 = 11; h_1 = 2, h_2 = 3, h_3 = 4, h_4 = 1$ . 对  $j \in N_2 = \{3, 4\}$ ,

有  $|a_{33}| - h_3 = 8 > 0, |a_{44}| - h_4 = 8 > 0$ . 又因

$$d_1 = \max_{j \in N_2} \frac{s_j}{|a_{jj}| - h_j} = \max \left\{ \frac{12}{12-4}, \frac{11}{9-1} \right\} = \max \left\{ \frac{3}{2}, \frac{11}{8} \right\} = \frac{3}{2}.$$

$$d_2 = \min_{i \in N_1} \frac{|a_{ii}| - s_i}{h_i} = \min \left\{ \frac{10-4}{2}, \frac{8-2}{3} \right\} = \min \{3, 2\} = 2,$$

所以有  $d_1 < d_2$ , 由定理 1 知矩阵  $A$  非奇异, 取  $d = (d_1 + d_2)/2 = (1/2)(3/2 + 2) = 7/4$ , 便有

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{d}{\min_{1 \leq i \leq 4} (|a_{ii}| - a_i^{(1)})},$$

其中

$$a_1^{(1)} = s_1 + dh_1 = 4 + 7/4 \times 2 = 15/2,$$

$$a_2^{(1)} = s_2 + dh_2 = 2 + 7/4 \times 3 = 29/4,$$

$$a_3^{(1)} = s_3/d + h_3 = 12 \times (4/7) + 4 = 76/7,$$

$$a_4^{(1)} = s_4/d + h_4 = 11 \times (4/7) + 1 = 51/7,$$

因此

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq i \leq 4} (|a_{ii}| - a_i^{(1)}) &= \min \left\{ 10 - \frac{15}{2}, 8 - \frac{29}{4}, 12 - \frac{76}{7}, 9 - \frac{51}{7} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{5}{2}, \frac{3}{4}, \frac{8}{7}, \frac{12}{7} \right\} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

所以得  $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{7/4}{3/4} = \frac{7}{3} = 2.3333$ .

例 2 设有线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -3 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{10}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 6 \end{bmatrix} \quad (9)$$

即  $Ax=b$ . 可知其系数矩阵  $A$  为非对角占优矩阵. 若在式(9)中取 4 位小数进行计算, 则得扰动方程组

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.6666 & -0.6666 \\ 1.0000 & -3.0000 & 0.3333 \\ 0.3333 & 1.6666 & -3.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \delta x_1 \\ x_2 + \delta x_2 \\ x_3 + \delta x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.3333 \\ -0.3333 \\ 6.0000 \end{bmatrix} \quad (10)$$

即  $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$ , 由  $N_1 = \{i \mid \sum_{k \neq i} |a_{ik}| < |a_{ii}|\}$ ,  $N_2 = \{j \mid \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \geq |a_{jj}|\}$ , 知  $N_1 = \{2, 3\} \neq \emptyset$ ,  $N_2 = \{1\}$ . 又由  $s_i = \sum_{j \in N_1, j \neq i} |a_{ij}|$ ,  $h_i = \sum_{j \in N_2, j \neq i} |a_{ij}|$ , 得  $s_1 = \frac{4}{3}$ ,  $s_2 = \frac{1}{3}$ ,  $s_3 = \frac{5}{3}$ ;  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 1$ ,  $h_3 =$

$\frac{1}{3}$ . 于是有

$$|a_{jj}| - h_j = 1 > 0, \quad j \in N_2 = \{1\},$$

$$d_1 = \max_{j \in N_2} \frac{s_j}{|a_{jj}| - h_j} = \frac{s_1}{|a_{11}| - h_1} = \frac{4/3}{1 - 0} = \frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \min_{i \in N_1} \frac{|a_{ii}| - s_i}{h_i} = \min \left\{ \frac{3 - 1/3}{1}, \frac{10/3 - 5/3}{1/3} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{8}{3}, 5 \right\} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

因此有  $d_1 < d_2$ . 可知矩阵  $A$  满足定理 1 之一切条件. 取  $d = (d_1 + d_2)/2 = (1/2)(4/3 + 8/3) = 2$ , 于是

$$a_1^{(1)} = s_1 \frac{1}{d} + h_1 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} + 0 = \frac{2}{3},$$

$$a_2^{(1)} = s_2 + dh_2 = \frac{1}{3} + 2 \times 1 = \frac{7}{3},$$

$$a_3^{(1)} = s_3 + dh_3 = \frac{5}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{3},$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{d}{\min_{1 \leq i \leq 3} (|a_{ii}| - a_i^{(1)})} = \frac{2}{\min \left\{ \left(1 - \frac{2}{3}\right), \left(3 - \frac{7}{3}\right), \left(\frac{10}{3} - \frac{7}{3}\right) \right\}} \\ &= \frac{2}{\min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right\}} = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6. \end{aligned}$$

由式(9)和(10)知  $\|\delta A\|_\infty = 0.000133$ ,  $\|b\|_\infty = 0.000033$ ,  $\|A\|_\infty = 16/3$ ,  $\|b\|_\infty = 6$ .

因  $\mu \| \delta A \|_\infty = 7.98 \times 10^{-4} \ll 1$ , 则由定理 2 知  $A + \delta A$  非奇异, 且有

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} &\leq \frac{\mu \|A\|_\infty}{1 - \mu \|\delta A\|_\infty} \left( \frac{\|\delta A\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \frac{\|b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right) \\ &= \frac{6 \times 16/3}{1 - 7.98 \times 10^{-4}} \times \left( \frac{0.000133}{16/3} + \frac{0.000033}{6} \right) \\ &= 9.75 \times 10^{-4} < 10^{-3}. \end{aligned}$$

可知方程组(9)是良态的, 这是由于其条件数相对较小, 即  $\text{Cond}(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty \leq \mu \|A\|_\infty = 6 \times 16/3 = 32$ . 此例说明利用定理 2 易于求出矩阵  $A$  之条件数上界, 若此上界相对较小, 即可断定其方程组  $Ax = b$  是良态的, 且可应用定理 2 之式(7)估计扰动误差, 结果较好.

### 参 考 文 献

- [1] 李庆杨等, 数值分析, 华中工学院出版社, (1982).
- [2] 阿特金森, K. E., 数值分析引论, 上海科技出版社, (1986).
- [3] 何旭初, 略论奇异性和病态及有关问题, 高等学校计算数学学报, 1, (1984).

## The Upper Bound of Inverse Matrix and the Error Estimate of Relevant Perturbation Equations

Chen Hengxin

(Department of Management Information Science)

**Abstract** A class of nondiagonally dominant matrices are proved to be invertible; the upper bound of their inverse matrices and the error estimate for solving their perturbation equations are given. Thus the conclusion in relation to strictly diagonally dominant matrices can be extended and become a special case in the theorems posed by this paper.

**Key words** inverse matrices, bound, perturbation equation, error estimate