第13卷 第4期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 13 №. 4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年10月 (NATURAL SCIENCE) Oct. 1992

耗散拟线性双曲型方程组的真空问题[*,**]

郑 永 树

(管理信息科学系)

摘要 本文考虑耗散的 p 方程组初值问题的光滑解．我们得到，对于任意的大初值，如果初始数据离开真空，则初值问题的光滑解一致地(即与时间无关)离开真空．同时给出了整体光滑解存在性与非存在性的结果．

关键词 耗散，拟线性，双曲型方程，真空问题

0 引言

考虑耗散的 p 方程组的初值问题

$$v_t - u_x = 0, \qquad u_t + p(v)_x = -2\alpha u, \qquad (x,t) \in R \times R_+, \tag{1}$$

$$v(x,0) = v_0(x), \qquad u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in R \tag{2}$$

其中 α 为正的常数，$p(v) \in C^2(v>0)$，$p'(v)<0, p'(v) \to 0(v \to +\infty), p''(v)>0$. 方程组(1)有特征值

$$\lambda = -\sqrt{-p'(v)}, \qquad \mu = \sqrt{-p'(v)}. \tag{3}$$

当 $0<v<+\infty$ 时，$\lambda<\mu$，方程组(1)是严格双曲型的；当 $v=+\infty$ 时，$\lambda=\mu=0$，方程组(1)不再是严格双曲型的，习称这时出现真空状态．

取黎曼不变量

$$r = u + \Phi(v), \qquad s = u - \Phi(v). \tag{4}$$

其中

$$\Phi(v) = \int_1^v \sqrt{-p'(v)}dv. \tag{5}$$

黎曼不变量给出区域

$$\Omega = \{(v,u) \mid 0 < v < +\infty, u \in R\}$$

到区域

---

* 本文1992—03—09收到．
** 福建省自然科学基金资助项目．

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\Omega_1 = \{(r,s) \mid 2\Phi(0) < r - s < 2\Phi(+\infty)\}$$

光滑的一对一映照，而且将(1)(2)变成

$$r_t + \lambda r_x = -\alpha(r+s), \qquad s_t + \mu s_x = -\alpha(r+s), \tag{6}$$

$$r(x,0) = r_0(x), \qquad s(x,0) = s_0(x). \tag{7}$$

这个初值问题的整体光滑解的存在性与非存在性，已为许多作者研究过[1-4]．众所周知，如同不带耗散项的 p 方程组的初值问题一样[5-7]，对于真正的大初值的情形，将会碰到可能出现真空的困难．为使不在有限时间出现真空，对于带耗散项的 p 方程组，一般地都对初值附加限制，即设

$$\{(r,s) \mid \inf_x r_0(x) \leqslant r \leqslant \sup_x r_0(x), \inf_x s_0(x) \leqslant s \leqslant \sup_x s_0(x)\} \subset \Omega_1. \tag{8}$$

实际上在条件(8)之下，初值已不再是真正的大初值．

我们将在本文中对一类 p 方程组，即

$$p(v) = k^2 v^{-\gamma}, \quad (k > 0, 0 < \gamma < 3), \tag{9}$$

证明对任意的大初值，只要初值离开真空，那么其所存在的 C^1 解都离开真空．特别地，如果整体 C^1 解存在，那么它必一致地离开真空．换句话说，整体 C^1 解的 $v(x,t)$ 之上界，仅与状态函数 p, α 和初值 $v_0(x)$, $u_0(x)$ 及其一阶导数的界有关，而与时间 t 无关. 利用这个结果，可以将文[1]中，当 $1<\gamma<3$ 时，整体 C^1 解存在的必要条件之结果，解除其附加限制条件(8). 同时对 $0<\gamma<1$ 情形，对于问题(1)、(2)存在唯一的整体 C^1 解，我们给出同文[2]$\gamma=1$ 完全相同的充分条件，改进了文[1]中的充分条件．由于当 $\gamma=1$ 时，已由文[2]获得解决了，所以本文只考虑 $0<\gamma<3, \gamma\neq 1$ 的情形．

1　C^1 解的非真空性质

假设初值满足

$$\begin{cases} v_0(x), \quad u_0(x) \in C^1(R), \\ 0 < v_{0*} \leqslant v_0(x) \leqslant v_0^* < +\infty, \quad \| v_0(x) \|_{C^1} + \| u_0(x) \|_{C^1} < +\infty, \end{cases} \tag{10}$$

令

$$\prod\nolimits_T = \{(x,t) \mid x \in R, 0 \leqslant t < T \leqslant +\infty\}.$$

下面所讨论的方程组(1)（或(6)），其中 $p(v)$ 由式(9)所给定，如无例外，不另说明．首先证明如下引理．

引理 1　假设初值满足条件(10). 如果 $(r(x,t), s(x,t))$ 为初值问题(6)、(7)在 $\prod_T$ 上的 C^1 解，那么

$$[v(x,t)]^{-\frac{\gamma+1}{4}}\left[r_x(x,t) + \frac{8\alpha}{3-\gamma}v(x,t)\right] \leqslant M, \tag{11}$$

$$[v(x,t)]^{-\frac{\gamma+1}{4}}\left[s_x(x,t) + \frac{8\alpha}{3-\gamma}v(x,t)\right] \leqslant M, \quad \forall\ (x,t) \in \prod\nolimits_T. \tag{12}$$

其中

$$M = max\{0, M_1, M_2\}, \tag{13}$$

$$M_1 = \sup_x\left[v_0(x)^{-\frac{\gamma+1}{4}}\left(\frac{dr_0(x)}{dx} + \frac{8\alpha}{3-\gamma}v_0(x)\right)\right]\}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$M_2=\sup_x[v_0(x)^{-\frac{\gamma+1}{4}}(\frac{ds_0(x)}{dx}+\frac{8\alpha}{3-\gamma}v_0(x))]\}.$$

证明　式(6)的两个方程式的两边分别对 x 求偏导数，得到

$$(r_x)_t+\lambda(r_x)_x=-\frac{\gamma+1}{4v}r_x^2+\frac{\gamma+1}{4v}s_xr_x-\alpha r_x-\alpha s_x, \tag{14}$$

$$(s_x)_t+\mu(s_x)_x=-\frac{\gamma+1}{4v}s_x^2+\frac{\gamma+1}{4v}r_xs_x-\alpha r_x-\alpha s_x. \tag{15}$$

由式(6)得

$$(s-r)'=-2\mu s_x,\quad (s-r)^{\backprime}=-2\mu r_x. \tag{16}$$

又由式(4)、(5)得

$$(s-r)'=-2\Phi(v)'=-2\mu v',\quad (s-r)^{\backprime}=-2\Phi(v)^{\backprime}=-2\mu v^{\backprime}. \tag{17}$$

再由 式(16)、(17)，得到

$$s_x=v',\quad r_x=v^{\backprime}, \tag{18}$$

其中

$$'=\frac{\partial}{\partial t}+\lambda\frac{\partial}{\partial x},\qquad {}^{\backprime}=\frac{\partial}{\partial t}+\mu\frac{\partial}{\partial x}.$$

由式(14)、(18)得到

$$r_x'\leqslant\frac{\gamma+1}{4v}s_xr_x-\alpha r_x-\alpha s_x=\frac{\gamma+1}{4}v^{-1}v'r_x-\alpha r_x-\alpha s_x,$$

于是有

$$\begin{aligned}(v^{-\frac{\gamma+1}{4}}r_x)'&\leqslant\alpha v^{-\frac{\gamma+1}{4}}(s_x-r_x)-2\alpha v^{-\frac{\gamma+1}{4}}s_x\\&=\alpha v^{-\frac{\gamma+1}{4}}(s_x-r_x)-2\alpha v^{-\frac{\gamma+1}{4}}v'.\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}&(v^{-\frac{\gamma+1}{4}}r_x+\frac{8\alpha}{3-\gamma}v^{\frac{3-\gamma}{4}})'\leqslant\alpha v^{-\frac{\gamma+1}{4}}(s_x-r_x)\\&=\alpha\left[\left(v^{-\frac{\gamma+1}{4}}s_x+\frac{8\alpha}{3-\gamma}v^{\frac{3-\gamma}{4}}\right)-\left(v^{-\frac{\gamma+1}{4}}r_x+\frac{8\alpha}{3-\gamma}v^{\frac{3-\gamma}{4}}\right)\right],\end{aligned} \tag{19}$$

同理由式(15)、(18)得到

$$(v^{-\frac{\gamma+1}{4}}s_x+\frac{8\alpha}{3-\gamma}v^{\frac{3-\gamma}{4}})^{\backprime}\leqslant\alpha\left[\left(v^{-\frac{\gamma+1}{4}}r_x+\frac{8\alpha}{3-\gamma}v^{\frac{3-\gamma}{4}}\right)-\left(v^{-\frac{\gamma+1}{4}}s_x+\frac{8\alpha}{3-\gamma}v^{\frac{3-\gamma}{4}}\right)\right], \tag{20}$$

记

$$W=v^{-\frac{\gamma+1}{4}}r_x+\frac{8\alpha}{3-\gamma}v^{\frac{3-\gamma}{4}},\quad Z=v^{-\frac{\gamma+1}{4}}s_x+\frac{8\alpha}{3-\gamma}v^{\frac{3-\gamma}{4}}, \tag{21}$$

所以式(19)、(20)可写成

$$W'\leqslant\alpha(Z-W), \tag{22}$$

$$Z^{\backprime}\leqslant\alpha(W-Z). \tag{23}$$

根据式(22)、(23)，并援用文[8]命题 1 的证法，可以证得引理结论为真．

定理 1　假设初值满足条件(10)．如果$(v(x,t),u(x,t))$为初值问题(1)、(2)在$\prod_T$上的 C^1 解．则有先验估计

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$v(x,t) \leqslant K, \quad \forall\ (x,t) \in \prod\nolimits_T, \tag{24}$$

其中 T 为任意的正数，K 与 T 无关，且

$$K = \{\max[(v_0^*)^{\frac{3-\gamma}{4}}, \frac{3-\gamma}{8\alpha}M]\}^{\frac{4}{3-\gamma}}, \tag{25}$$

其中 M 为式(13)给定．

证明　根据引理 1 的式(11)、(12)及式(18)，得到

$$v^{-\frac{\gamma+1}{4}}(v' + \frac{8\alpha}{3-\gamma}v) \leqslant M,$$

$$v^{-\frac{\gamma+1}{4}}(v' + \frac{8\alpha}{3-\gamma}v) \leqslant M,$$

于是有

$$(v^{\frac{3-\gamma}{4}}e^{2\alpha t})' \leqslant \frac{3-\gamma}{4}Me^{2\alpha t}, \tag{26}$$

$$(v^{\frac{3-\gamma}{4}}e^{2\alpha t})' \leqslant \frac{3-\gamma}{4}Me^{2\alpha t}, \tag{27}$$

对于任意的 $(x,t) \in \prod_T$，令 $X = x_\lambda(\tau;x,t)$ 表示由点 (x,t) 所引的 λ 特征线，并设它与 x 轴交点的 x 坐标为 η. 沿此特征线，τ 从 0 到 t 积分(26)，得到

$$v(x,t)^{\frac{3-\gamma}{4}}e^{2\alpha t} \leqslant v_0(\eta)^{\frac{3-\gamma}{4}} + \frac{3-\gamma}{8\alpha}M(e^{2\alpha t} - 1,),$$

则

$$\begin{aligned} v(x,t)^{\frac{3-\gamma}{4}} &\leqslant v_0(\eta)^{\frac{3-\gamma}{4}}e^{-2\alpha t} + \frac{3-\gamma}{8\alpha}M(1 - e^{-2\alpha t}) \\ &\leqslant \max\{(v_0^*)^{\frac{3-\gamma}{4}}, \frac{3-\gamma}{8\alpha}M\} = K^{\frac{3-\gamma}{4}}. \end{aligned}$$

因此，定理结论得到证明．

注　定理 1 的结论表明，如果整体 C^1 解存在，其初值离开真空，那么此 C^1 解一致地离开真空(即 $v(x,t)$ 之上界与时间 t 无关)．因此，它对研究在有限时间内 C^1 解奇性的形成将起着重要的作用．据此，我们对文[1]，当 $1<\gamma<3$ 时，整体 C^1 解存在的必要条件的结果，可解除其附加限制条件(A)，即

$$\sup_x|r_0(x)| + \sup_x|s_0(x)| < \min\{-2\Phi(0), 2\Phi(+\infty)\}.$$

2　当 $0<\gamma<1$ 情形整体 C^1 解的存在性

在文[1]中，研究了当 $0<\gamma<1$ 时，初值问题(1)、(2)整体 C^1 解的存在性，得到如下充分条件

$$\frac{dr_0(x)}{dx} \geqslant -\frac{4\alpha}{3-\gamma}v_0(x), \quad \frac{ds_0(x)}{dx} \geqslant -\frac{4\alpha}{3-\gamma}v_0(x), \quad \forall\ x \in R, \tag{28}$$

这里将改进条件(28)，即假设初值满足条件

$$\frac{dr_0(x)}{dx} \geqslant -2\alpha v_0(x), \quad \frac{ds_0(x)}{dx} \geqslant -2\alpha v_0(x), \quad \forall\ x \in R, \tag{29}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

显然，条件(29)较之条件(28)放宽了限制，并且它与 $\gamma=1$ 情形相一致[2].

下面先证明如下引理．

引理 2 当 $0<\gamma<1$ 时，如果初值满足假设条件(10)和(29)，那么初值问题(6)、(7)的任意 C^1 解在其存在区域上具有

$$r_x(x,t)+2\alpha v(x,t)\geqslant 0, \tag{30}$$

$$s_x(x,t)+2\alpha v(x,t)\geqslant 0. \tag{31}$$

证明 由式(14)、(15)和(18)，得到

$$(r_x+2\alpha v)'=\frac{\gamma+1}{4v}\left(r_x+\frac{4\alpha}{\gamma+1}v\right)[(s_x+2\alpha v)-(r_x+2\alpha v)],$$

$$(s_x+2\alpha v)'=\frac{\gamma+1}{4v}\left(s_x+\frac{4\alpha}{\gamma+1}v\right)[(r_x+2\alpha v)-(s_x+2\alpha v)].$$

因为 $0<\gamma<1$，所以若当 $r_x+2\alpha v\geqslant 0, s_x+2\alpha v\geqslant 0$ 时，则

$$r_x+\frac{4\alpha}{\gamma+1}v=(r_x+2\alpha v)+\frac{2(1-\gamma)}{\gamma+1}\alpha v>0,$$

$$s_x+\frac{4\alpha}{\gamma+1}v=(s_x+2\alpha v)+\frac{2(1-\gamma)}{\gamma+1}\alpha v>0.$$

因此，由文[8]命题 1，可得知本引理结论成立．

引理 3 在引理 2 的假设之下，如果 $(v(x,t),u(x,t))$ 为初值问题(1)、(2)在 $\prod_T$ 上的 C^1 解，那么有先验估计

$$v(x,t)\geqslant v_{0*}e^{-2\alpha T},\quad \forall\ (x,t)\in\prod_T. \tag{32}$$

证明 由式(30)、(31)和(18)，得到 $v'+2\alpha v\geqslant 0$, $v'+2\alpha v\geqslant 0$. 则 $(ve^{2\alpha t})'\geqslant 0$, $(ve^{2\alpha t})'\geqslant 0$，所以

$$v(x,t)\geqslant(\inf_x v_0(x))e^{-2\alpha t}\geqslant v_{0*}e^{-2\alpha T}.$$

引理得证．

根据引理 1、2、3 和定理 1 的先验估计，局部解的存在定理，我们可以得到如下整体光滑解的存在定理．

定理 2 当 $0<\gamma<1$ 时，假设初值满足条件(10)，如果它还满足条件(29)，那么初值问题(1)、(2)(或即问题(6)、(7))存在唯一的整体光滑解．

参 考 文 献

[1] Lin Longwei, Zheng Yongshu, *Chin. Ann. of Math.* 9,B3(1988),372—377.

[2] Zheng Yongshu, *Acta. Math. Sci.* 7,4(1987),383—396.

[3] 王剑华、李才中，耗散拟线性双曲型方程组的整体光滑解及其奇性形成，数学年刊，9,A5(1988),509—523.

[4] 陈星乾，耗散对两个守恒律系统的影响，系统科学与数学，9,1(1989),1—13.

[5] Lin Longwei, *J. Math. & Appli.*, 120(1987),117—126.

[6] Lin Longwei, *J. Math. & Appli.*, 121(1987),406—425.

[7] 李大潜、赵彦淳，一维等熵流气体力学方程组的真空问题，数学季刊，1,1(1987),41—45.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[8] 李才中、张玉平，关于绝热气动力学方程组整体光滑解存在性的一个结果，成都科技大学学报，2(1990)，67—73.

Vacuum Problem of Quasilinear Hyperbolic Systems with Dissipation

Zheng Yongshu

(*Department of Management Information Science*)

Abstract In this paper, the smooth solutions to the initial value problem of p-system with dissipation are considered and the results are obtained as follows. For arbitrary large initial data, if it is away from vacuum, the smooth solutions to the initial value problem are uniformly (namely, independent of time) away from vacuum. The results of both existence and non-existence of global smooth solutions are given simultaneously.

Key words dissipation, quasilinear, hyperbolic equation, vacuum problem

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net