第13卷 第4期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 13 №. 4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年10月 (NATURAL SCIENCE) Oct. 1992

关于 $\|B^{-1}A\|_\infty$ 的估计定理*

蔡火萤

(管理信息科学系)

摘要 对于一类矩阵B，本文出 $\|B^{-1}A\|_\infty$ 的一些估计，它们包含文[1]，扩充了文[1]的结论．

关键词 矩阵，范数，估计

0 引言

众所周知[2]，当 $B=[b_{ij}]$ 是 n 阶严格对角占优阵时，B^{-1} 存在，且有

$$\|B^{-1}\|_\infty \leqslant \max_i \frac{1}{|b_{ii}| - \sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|},$$

但在实用中，常常要求估计 $\|B^{-1}A\|_\infty$，此处 A 为 $n\times n$ 或 $n\times m$ 矩阵，关于 $\|B^{-1}A\|_\infty$ 的估计，文[1]中已经得到一些结论，并讨论了这种估计的一些应用．本文给出一类矩阵 B，建立 $\|B^{-1}A\|_\infty$ 的一些估计式，它们包含了文[1]的估计式，扩充了文[1]的结论．

1 $\|B^{-1}A\|_\infty$ 的估计

定理1 若 $B=[b_{ij}]$ 是 n 阶严格对角占优矩阵，$\alpha=[a_1,\cdots,a_n]^T\in E_n$，则有

$$\|B^{-1}\alpha\|_\infty \leqslant \max_i \frac{|a_i|}{|b_{ii}| - \sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|}. \tag{1}$$

证明 由于 B 严格对角占优，所以 B^{-1} 存在，记 $B=D+L+U$，其中 D 为对角线矩阵，L 及 U 分别为严格下三角和严格上三角矩阵(以下同，不再说明)，于是有

$$B=D[I+D^{-1}(L+U)],$$
$$B^{-1}=[I+D^{-1}(L+U)]^{-1}D^{-1},$$
$$B^{-1}\alpha=D^{-1}\alpha-D^{-1}(L+U)B^{-1}\alpha.$$

---

* 本文以 01-01-29 收到

由向量范数定义知

$$\| B^{-1}\alpha \|_\infty = \max_i |(B^{-1}\alpha)_i| \overset{\text{记}}{=} |(B^{-1}\alpha)_r|, \qquad 1 \leqslant r \leqslant n,$$

可得

$$\begin{aligned}\| B^{-1}\alpha \|_\infty &= |(B^{-1}\alpha)_r| \\ &= |(D^{-1}\alpha - D^{-1}(L+U)B^{-1}\alpha)_r| \\ &= \frac{\alpha_r}{b_{rr}} - \sum_{j\neq r} \frac{b_{ij}}{b_{rr}}(B^{-1}\alpha)_j| \\ &\leqslant \frac{|\alpha_r|}{|b_{rr}|} + \sum_{j\neq r}\frac{|b_{rj}|}{|b_{rr}|}\| B^{-1}\alpha \|_\infty,\end{aligned}$$

由此推知

$$\| B^{-1}\alpha \|_\infty \leqslant \max_i \frac{|\alpha_i|}{|b_{ii}| - \sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|}.$$

定理2　若 B 为严格对角占优 n 阶方阵，$A=[a_{ij}]$ 为 $n\times n$ 或 $n\times m$ 矩阵，则有

$$\| B^{-1}A \|_\infty \leqslant \max_i \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|}{|b_{ii}| - \sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|}.$$

证明　因 B 为严格对角占优阵，所以 B^{-1} 存在．记 $B=D+L+U=D(I+D^{-1}(L+U))$，有

$$B^{-1} = (I + D^{-1}(L+U))^{-1}D^{-1},$$

$$B^{-1}A = D^{-1}A - D^{-1}(L+u)B^{-1}A.$$

由矩阵范数定义知

$$\begin{aligned}\| B^{-1}A \|_\infty &= \max_{\|x\|_\infty=1} \| B^{-1}AX \|_\infty \\ &= \| B^{-1}A\tilde{x} \|_\infty, \qquad \| \tilde{x} \|_\infty = 1 \\ &\overset{\text{记}}{=} |(B^{-1}A\tilde{x})_r|, \qquad 1 \leqslant r \leqslant n.\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}\| B^{-1}A \|_\infty &= |(B^{-1}A\tilde{x})_r| \\ &= |(D^{-1}A\tilde{x} - D^{-1}(L+U)B^{-1}A\tilde{x})_r| \\ &= |\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{rj}}{b_{rr}}(\tilde{x})_j - \sum_{j\neq r}\frac{b_{rj}}{b_{rr}}(B^{-1}A\tilde{x})_j| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{|a_{rj}|}{|b_{rr}|}\| \tilde{x} \|_\infty + \sum_{j\neq r}\frac{|b_{rj}|}{|b_{rr}|}\| B^{-1}A \|_\infty.\end{aligned}$$

由此推知

$$\| B^{-1}A \|_\infty \leqslant \max_i \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|}{|b_{ii}| - \sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|}.$$

定理3　设 B 是 n 阶方阵，若对

$$i \in N_1 = \{i \mid |b_{ii}| > \sum_{j\neq i}|b_{ij}|\} \neq \varnothing$$

及对

$$j \in N_2 = \{j \mid |b_{jj}| \leqslant \sum_{j\neq i}|b_{ij}|\}$$

成立关系式

$$\max_{j\in N_2}\frac{s_j}{|b_{jj}|-h_j}=d_1<d_2=\min_{i\in N_1}\frac{|b_{ii}|-s_i}{h_i},$$

其中

$$=\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in N_1}}|b_{ij}|,\qquad h_i=\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in N_2}}|b_{ij}|,$$

$$a_i=s_i+h_i=\sum_{j\neq i}|b_{ij}|,$$

$$N_1\cup N_2=\{1,2,\cdots,n\},\qquad N_1\cap N_2=\varnothing$$

记 $d=(1/2)(d_1+d_2)$， $d\geqslant d_1\geqslant 1$，记 $D=\mathrm{diag}(\bar d_i\,|\,\bar d_i=1,\ i\in N_1,\ \bar d_i=d,\ i\in N_2)$，$\det D\neq 0$，记 $B_1=D^{-1}BD=[b_{ij}^{(1)}]=[\bar d_i^{-1}b_{ij}\bar d_j]$，则 B_1 为严格对角占优阵，且 $B_1^{-1}=D^{-1}B^{-1}D$，或

$$B^{-1}=DB_1^{-1}D^{-1}.$$

证明

$$b_{ij}^{(1)}=b_{ij},\quad i\in N_1,\quad j\in N_1,$$

$$b_{ij}^{(1)}=b_{ij}d,\quad i\in N_1,\quad j\in N_2,$$

$$b_{ij}^{(1)}=d^{-1}b_{ij},\quad i\in N_2,\quad j\in N_1,$$

$$b_{ij}^{(1)}=d^{-1}b_{ij}d=b_{ij},\quad i\in N_2,\quad j\in N_2,$$

当 $i\in N_1$ 时.

$$\sum_{j\neq i}|b_{ij}^{(1)}|=\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in N_1}}|b_{ij}^{(1)}|+\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in N_2}}|b_{ij}^{(1)}|$$

$$=\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in N_1}}|b_{ij}|+\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in N_2}}|b_{ij}d|=s_i+dh_i,$$

当 $h_i=0$ 时，$s_i=\sum_{j\neq i}|b_{ij}|<|b_{ii}|=|b_{ii}^{(1)}|$，即

$$\sum_{j\neq i}|b_{ij}^{(1)}|<|b_{ii}^{(1)}|,$$

当 $h_i\neq 0$ 时，$d<\frac{|b_{ii}|-s_i}{h_i}$，于是有

$$\sum_{j\neq i}|b_{ij}^{(1)}|=s_i+dh_i<s_i+\frac{|b_{ii}|-s_i}{h_i}\cdot h_i$$

$$=|b_{ii}|=|b_{ii}^{(1)}|,$$

所以亦有

$$\sum_{j\neq i}|b_{ij}^{(1)}|<|b_{ii}^{(1)}|,$$

当 $i\in N_2$ 时，

$$\sum_{j\neq i}|b_{ij}^{(1)}|=\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in N_1}}|b_{ij}^{(1)}|+\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in N_2}}|b_{ij}^{(1)}|$$

$$=\frac{1}{d}\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in N_1}}|b_{ij}|+\sum_{\substack{j\neq i\\ j\in N_2}}|b_{ij}|=(1/d)s_i+h_i,$$

$$<\frac{|b_{ii}|-h_i}{s_i}\cdot s_i+h_i=|b_{ii}|=|b_{ii}^{(1)}|,$$

所以有

$$\sum_{j\neq i}|b_{ij}^{(1)}|<|b_{ii}^{(1)}|,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

由此推知，$B_1=D^{-1}BD$ 是一个严格对角占优阵，从而 B_1^{-1} 存在，且 $B_1^{-1}=D^{-1}B^{-1}D$，或 $B^{-1}=DB_1^{-1}D^{-1}$.

定理 4　设 B 具备定理 3 的条件，$\alpha=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]^T\in E_n$，则有

$$\| B^{-1}\alpha \|_\infty \leqslant \max_i d \frac{|\alpha_i|}{\bar{d}_i(|b_{ii}|-a_i^{(1)})},$$

其中

$$a_i^{(1)}=\begin{cases} s_i+dh_i, & i\in N_1, \\ s_i(1/d)+h_i, & i\in N_2. \end{cases}$$

证明　由定理 3 知，$B^{-1}=DB_1^{-1}D^{-1}$，其中 B_1 是严格对角占优阵，将它两边内积向量 α，然后取范数，可得，

$$\| B^{-1}\alpha) \|_\infty \leqslant d \| B_1^{-1}(D^{-1}\alpha \|_\infty$$
$$\leqslant \max_i d \frac{|\alpha_i|}{\bar{d}_i(|b_{ii}|-a_i^{(1)})},$$

其中

$$a_i^{(1)}=\begin{cases} s_i+db_i, & i\in N_1 \\ s_i\dfrac{1}{d}+h_i, & i\in N_2. \end{cases}$$

当 $N_2=\varnothing$ 时，$d=1$，$\bar{d}_i=1$，$i=1,2,\cdots,n$，得到定理 1 的结论.

定理 5　设 B 满足定理 3 的条件，A 为 $n\times n$ 或 $n\times m$ 矩阵，则有

$$\| B^{-1}A \|_\infty \leqslant \max_i d \frac{\sum_{j=i}^{n}|a_{ij}|}{\bar{d}_i(|b_{ii}|-a_i^{(1)}}$$

其中

$$a_i^{(1)}=\begin{cases} s_i+dh_i, & i\in N_1, \\ s_i\dfrac{1}{d}+h_i, & i\in N_2. \end{cases}$$

当 $N_2=\varnothing$ 时，$d=1$，$\bar{d}_i=1$，$i=1,2,\cdots,n$，与定理 2 相同.

证明　由定理 3 知 $B^{-1}=DB_1^{-1}D^{-1}$，其中 B_1 是严格对角占优阵，将它两边同乘阵 A，然后取矩阵范数可得

$$\| B^{-1}A \|_\infty \leqslant \max_i d \frac{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|}{\bar{d}_i(|b_{ii}|-a_i^{(1)})},$$

其中

$$a_i^{(1)}=\begin{cases} s_i+dh_i, & i\in N_1, \\ s_i(1/d)+h_i, & i\in N_2. \end{cases}$$

2 计算实例

设

$$B=\begin{bmatrix}-10 & 4 & 1 & -1\\ 2 & 8 & -1 & 2\\ 5 & -7 & 12 & 4\\ 8 & -3 & 1 & 9\end{bmatrix}\in E_{4\times 4}$$

$$\alpha=[1.1\quad 3/7\quad 1\quad 1.2]^T\in E_4$$

计算$\|B^{-1}\alpha\|_\infty$的上界

解：矩阵B虽然不是严格对角占优阵，但它满足定理3的条件，因此可按定理4估计它的上界．计算如下：

$N_1=\{1,2\}$，$N_2=\{3,4\}$，$N_1\neq\varnothing$，$N_1\cap N_2=\varnothing$，$s_1=4$，$s_2=2$，$s_3=12$，$s_4=11$，$h_1=2$，$h_2=3$，$h_3=4$，$h_4=1$，$d_1=3/2$．$d_2=2$，$d=7/4$，$a_1^{(1)}=15/2$，$a_2^{(1)}=29/4$，$a_3^{(1)}=76/7$，$a_4^{(1)}=51/7$，$\|B^{-1}\alpha\|_\infty\leqslant 1$.

参　考　文　献

[1] 胡家赣，$\|B^{-1}A\|$ 的估计式及其应用，计算数学，4，3(1982)，272-282.

[2] 李庆杨、王能超、易大义，数值分析，华中工学院出版社，(1983).

Theorem of Some Estimates of $\|B-1A\|_\infty$

Cai Huoying

(*Department of Management Information Science*)

Abstract To a category of matrices B, some estimates of $\|B^{-1}A\|_\infty$ are given. These estimates embody reference [1] and extend its results.

Key words matrices, norms, estimations