第13卷 第4期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 13 No. 4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年10月 (NATURAL SCIENCE) Oct. 1992

解色散方程的加耗散项半显式与显式差分格式*

曾 文 平

(管理信息科学系)

摘要 解色散方程 $U_t=aU_{xxx}$ 的大多数常见的显式差分格式,例如文[1]中的差分格式,其稳定性条件是苛刻的.这一困难可由在常规的显式差分格式中引入耗散项而得到克服.基于此,我们导出一类新的无条件稳定的两层的半显式差分格式及若干具有高稳定性的三层显式格式,它们包含了若干已知的具有高稳定性的三层显式格式.

关键词 耗散项,半显式与显式差分格式,色散方程

0 前言

对于色散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\qquad (a\text{ 为常数,可正可负}),\tag{1}$$

已有许多数值解法.如果采用隐式差分格式[1-3],则需解大型线性方程组,计算量较大.与隐式格式相比,半显式格式或显式格式具有明显的优点,即更便于计算且节约存贮,这方面已有许多工作[4-9].本文利用加耗散项的思想[9-11],提出一个绝对稳定的两层的半显式格式及若干类具有高稳定性的显式格式,它包含了迄今已知的若干高稳定性的显式差分格式.为分析差分格式的稳定性,我们需 如下的

Miller 准则[12].当 $|A|=|C|$ 时,复系数二次方程

$$AZ^2+BZ+C=0\qquad (A\neq 0)\tag{2}$$

具有模为1的不等复根,其充要条件为 $\bar{A}B\equiv\bar{B}C$,且 $|B|<2|A|$.当利用 Fourier 分析法研究本文所构造的三层的显式格式时,把 $U_m^n=Z^n e^{im\omega}$ 代入差分格式时,得到如下形式的特征方程:(Ⅰ).(Ⅰ).

* 本文 1991—01—15 收到.

(Ⅰ) $$Z^2-2iRG(\theta)Z-1=0,\tag{3}$$

其中 $G(\theta)$ 为 θ 的函数. 根据 Miller 准则, 相应差分格式的稳定条件为

$$|R|\leqslant\inf_{\theta\in(0,\pi)}\frac{1}{G(\theta)}.\tag{4}$$

(Ⅱ) $$e^{i\theta}\cdot Z^2-2i(\sin\theta+RG(\theta))\lambda-e^{-i\theta}=0,\tag{5}$$

根据 Miller 准则, 相应差分格式的稳定条件为

$$|\sin\theta+RG(\theta)|\leqslant 1.\tag{6}$$

1 差分格式

对于色散方程(1)利用加入耗散项的思想, 构造如下几种差分格式.

1° 耗散项 $\varepsilon\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}$ 及其相应的差分格式. 在色散方程(1)中加入 $\varepsilon\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^3u}{\partial x^3}+\varepsilon\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t},\tag{7}$$

其中取 $\varepsilon=(\alpha+i\beta)Rh$, α、β 为实数, $R=a\tau/h^3$. 对上述方程(7)构造二种半显式差分格式

$$u_m^{n+1}=u_m^n+\frac{R}{2}\{u_{m+2}^n-u_{m-2}-2(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\}$$
$$+(\alpha+i\beta)R\{u_m^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}-u_m^n+u_{m-1}^n\},\qquad(a>0),\tag{8}$$

及

$$u_m^{n+1}=u_m^n+\frac{R}{2}\{u_{m+2}^n-u_{m-2}^n-2(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\}$$
$$+(\alpha+i\beta)R\{u_{m+1}^{n+1}-u_m^{n+1}-u_{m+1}^n+u_m^n\},\qquad(a<0),\tag{9}$$

不难计算. 式(8)与式(9)的截断误差均为 $o(\tau+h^2+\tau/h^2)$. 当 $\tau=0(h^3)$ 时, 均相容于色散方程(1).

利用 Fourier 分析法研究其稳定性. 把 $u_m^n=Z^ne^{im\theta}$ 代入式(8)得特征方程为 $\{1-(\alpha+i\beta)R+(\alpha+i\beta)Re^{-i\theta}\}Z=1+2Ri\sin\theta(\cos\theta-1)-(\alpha+i\beta)R+(\alpha+i\beta)Re^{-i\theta}$, 其特征根为

$$Z=\frac{1-\alpha(1-\cos\theta)R+\beta R\sin\theta+i\{2R\sin\theta(\cos\theta-1)-\beta R(1-\cos\theta)-\alpha R\sin\theta\}}{1-\alpha(1-\cos\theta)R+\beta R\sin\theta+i\{-\beta R(1-\cos\theta)-\alpha R\sin\theta\}}$$

$$\triangleq N/D.$$

因 $R_eN=R_eD$, 故若要 $|Z|\leqslant1$, 只要 $I_mN^2\leqslant I_mD^2$, 即

$$\{-2R\sin\theta(1-\cos\theta)-\beta R(1-\cos\theta)-\alpha R\sin\theta\}^2$$
$$\leqslant\{-\beta R(1-\cos\theta)-\alpha R\sin\theta\}^2,$$

或

$$4R^2\sin^2\theta(1-\cos\theta)^2+4R\sin\theta(1-\cos\theta)\{\beta R(1-\cos\theta)+\alpha R\sin\theta\}\leqslant0,$$

当 $\beta=0$ 时, 上式成为

$$4R^2\sin\theta(1-\cos\theta)\{1-\cos\theta+\alpha\}\leqslant0,$$

当取 $\alpha\leqslant-2$ 时上式恒成立, 该格式恒稳定. 同理讨论格式(9). 于是有

定理 1 若 $\beta=0$, $\alpha\leqslant-2$, 则格式(8)绝对稳定; $\beta=0$, $\alpha\geqslant2$, 若, 则格式(9)绝对稳定.

格式(8)与(9)均为双层的半显式格式.

2° 耗散项 $\varepsilon\frac{\partial^3u}{\partial x^3}$ 及其相应的差分格式. 在色散方程中加入 $\varepsilon\frac{\partial^3u}{\partial x^3}$ 得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\varepsilon\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\tag{10}$$

其中 $\varepsilon=a(\alpha+i\beta)\tau$ 或 $\varepsilon=a(\alpha+i\beta)h^k(k=1,2,3)$，有如下的三层显式格式：五点格式．即

$$u_m^{n+1}=u_m^{n-1}+\{1+(\alpha+i\beta)\tau\}R\{u_{m+2}^n-u_{m-2}^n-2(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\},\tag{11}$$

其截断误差为 $o(\tau^2+h^2+\tau h^2)$，当 $\tau=o(h^3)$ 时它相容于色散方程(1)．这时特征方程为(I)型，其中 $G(\theta)$ 为 $G(\theta)=2R\{(1+\alpha\tau)+i\beta\tau\}\sin\theta(1-\cos\theta)$，其稳定性条件为

$$|R|\leqslant\frac{1}{\sqrt{(1+\alpha\tau)^2+(\beta\tau)^2}}\cdot\inf_{\theta\in(0,\pi)}\frac{1}{|2\sin\theta(1-\cos\theta)|}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{9\sqrt{(1+\alpha\tau)^2+(\beta\tau)^2}}=\frac{0.3849}{\sqrt{(1+\alpha\tau)^2+(\beta\tau)^2}}.$$

当取 $\beta=\alpha,\alpha<0$ 且使 $|1+\alpha\tau|<1$ 时，则可在不增加中间层网格数的条件下，扩大稳定性范围．这一结论对于 $\varepsilon=(\alpha+i\beta)h^k(k=1,2,3)$ 也成立．于是有

定理 2　当取 $\varepsilon=\alpha\tau$ 或 $\varepsilon=\alpha h^k(k=1,2,3)$ 时，差分格式

$$u_m^{n+1}=u_m^{n-1}+(1+\varepsilon)R\{u_{m+2}^n-u_{m-2}^n-2(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\}\tag{12}$$

的稳定条件为

$$|R|\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9|1+\alpha\tau|}=\frac{0.3849}{|1+\alpha\tau|},\qquad(\text{对应于 }\varepsilon=\alpha\tau).$$

或

$$|R|\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9|1+\alpha h^k|}=\frac{0.3849}{|1+\alpha h^k|},\qquad(\text{对应于 }\varepsilon=\alpha h^k).$$

类似的结论对其它三层对称显格式也成立．例如

定理 3　当取 $\varepsilon=\alpha\tau$ 或 $\varepsilon=\alpha h^k(k=1,2,3)$ 时，差分格式

$$u_m^{n+1}=u_m^{n-1}+\frac{1}{4}R(1+\varepsilon)\{u_{m+3}^n-u_{m-3}^n-3(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\}\tag{13}$$

的稳定性条件为 $|R|\leqslant1/|1+\alpha\tau|$，(对应于 $\varepsilon=\alpha\tau$)，或 $|R|\leqslant1/|1+\alpha h^k|$，(对应于 $\varepsilon=\alpha h^k$)．

证明从略．

3°　加耗散项 $\varepsilon\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}$ 及其相应的差分格式．将此耗散项加入色散方程(1)得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\varepsilon\frac{\partial^5 u}{\partial x^5},\tag{14}$$

其中 $\varepsilon=a(\alpha+i\beta)h^2$，构造如下差分格式

$$\text{(i)}\quad\begin{aligned}u_m^{n+1}=&u_m^{n-1}+R\{u_{m+2}^n-u_{m-2}^n-2(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\}\\&+(\alpha+i\beta)R\{u_{m+3}^n-u_{m-3}^n-4(u_{m+2}^n-u_{m-2}^n)+5(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\},\end{aligned}\tag{15}$$

其截断误差为 $o(\tau^2+h^2+h^4)$，且当 $\tau=o(h^3)$ 时它相容于方程(1)，特征方程为(Ⅰ)型，其中 $G(\theta)=2\sin\theta(1-\cos\theta)R\{1-2\alpha(1-\cos\theta)-2\beta i(1-\cos\theta)\}$.

当 $\beta=0$ 时，其稳定条件为

$$|R|\leqslant\inf_{\theta\in(0,\pi)}\frac{1}{2\sin\theta(1-\cos\theta)|1-4\alpha\sin^2(\theta/2)|},$$

当 $\beta=0,\alpha=2/(5-b)$ 时，格式(15)即文[6]中格式(1.6)；特别取 $\beta=0,\alpha=1/4$ 时，其稳定性条

件为$|R|\leqslant\inf\limits_{\theta\in(0,\pi)}\frac{1}{\sin^3\theta}=1$；当$\alpha=0.3620298$时得最佳稳定区域$|R|\leqslant1.506745865$.[6]于是得

定理 4 差分格式(15)当$\beta=0,\alpha=1/4$时稳定条件为$|R|\leqslant1$；当$\beta=0,\alpha=0.3620298$时得最佳稳定条件为$|R|\leqslant1.506745865$.

$$\text{(ii)}\quad u_{m+1}^{n+1}=u_{m-1}^{n-1}+(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)+R\{u_{m+2}^n-u_{m-2}^n-2(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\}+(\alpha+i\beta)R\cdot\{u_{m+3}^n-u_{m-3}^n-4(u_{m+2}^n-u_{m-2}^n)+5(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\},\quad(\alpha>0),\tag{16}$$

及

$$u_{m-1}^{n+1}=u_{m+1}^{n-1}+(u_{m-1}^n-u_{m+1}^n)+R\{u_{m+2}^n-u_{m-2}^n-2(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\}+(\alpha+i\beta)R\cdot\{u_{m+3}^n-u_{m-3}^n-4(u_{m+2}^n-u_{m-2}^n)+5(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\},\quad(\alpha<0),\tag{17}$$

其截断误差都是$0(\tau^2+h^2+h^4)$，且当$\tau=0(h^3)$时相容于方程(1)其特征方程为(Ⅰ)型，其中当$\beta=0$时格式(16)的

$$G(\theta)=2(\cos\theta-1)+4\alpha(\cos\theta-1)^2,$$

故其稳定的充要条件为

$$|\sin\theta+RG(\theta)|=|\sin\theta\{1+2(\cos\theta-1)R+4\alpha(\cos\theta-1)^2R|\leqslant1,$$

即

$$|\sin\theta\{1-4R\sin^2\frac{\theta}{2}(1-4\alpha\sin^2\frac{\theta}{2})|\leqslant1,$$

或

$$\sin\theta-1\leqslant4R\sin^2\frac{\theta}{2}(1-4\alpha\sin^2\frac{\theta}{2})\sin\theta\leqslant1+\sin\theta,\qquad\theta\in(0,\pi).$$

当$R>0$时，取$\alpha=1/4$得稳定条件为

$$R\leqslant\inf_{\theta\in(0,\pi)}\frac{1+\sin\theta}{\sin^3\theta}=2.$$

事实上，当$\beta=0$时，格式(16)可改写为

$$\frac{u_{m+1}^{n+1}-u_{m-1}^{n-1}}{\tau}=\frac{u_{m+1}^n-u_{m-1}^n}{\tau}+\frac{1}{h^3}\{\frac{\alpha}{2}(u_{m+3}^n-u_{m+3}^n)+(\frac{1}{2}-\frac{4\alpha}{2})(u_{m+2}^n-u_{m-2}^n)+(-1+\frac{5\alpha}{2})(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\}.$$

当$\alpha=2\eta$时，即为文[5]中格式(1)；或当$\alpha=2/(5-b)$时的文[6]中格式(1.7)，故当$\alpha^*=2\eta^*=0.2976$或当$b=-1.7188$时取到最大稳定区域$(0,2.394]$[5,6]. 类似地可证式(17)的稳定性．从而有

定理 5 当$\beta=0,\alpha=1/4$时，差分格式(16)、(17)的稳定条件为$0<|R|\leqslant2$；当$\beta=0,\alpha=0.2976$时，差分格式(16)，(17)取到最大稳定区域为$0<|R|\leqslant2.394$.

4° 加耗散项$\varepsilon\frac{\partial^6u}{\partial x^6}$及其相应的差分格式．这时方程成为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^3u}{\partial x^3}+\varepsilon\frac{\partial^6u}{\partial x^6}.\tag{18}$$

当$\varepsilon=a^2(\alpha-i\beta)\tau$，构造差分格式如下

$$u_m^{n+1}=u_m^{n-1}+R\{u_{m+2}^n-u_{m-2}^n-2(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)\}+(\alpha-i\beta)\frac{R^2}{2}\{u_{m+4}^n+u_{m-4}^n-4(u_{m+3}^n+u_{m-3}^n)$$

$$+4(u_{m+2}^n+u_{m-2}^n)\}+4(u_{m+1}^n+u_{m-1}^n)-10u_m^n\},\tag{19}$$

其截断误差为 $0(\tau^2+h^2+\tau h^2)$，当 $\tau=0(h^3)$ 时，显然它相容于色散方程(1). 特征方程为(Ⅰ)型，其中当 $\alpha=0$ 时，

$$\begin{aligned}G(\theta)&=-2\sin\theta(1-\cos\theta)R+4\beta R^2\sin^2\theta(1-\cos\theta)^2\\&=-\xi+\beta\xi^2,\end{aligned}$$

其中 $\xi=2R\sin\theta(1-\cos\theta)=8R\sin^3(\theta/2)\cos(\theta/2)$，则其稳定条件为

$$|\xi-\beta\xi^2|\leqslant 1,\qquad \theta\in(0,\pi).$$

即

$$\begin{cases}\beta\xi^2-\xi-1\leqslant 0, & \text{(A)}\\ \beta\xi^2-\xi+1\geqslant 0. & \text{(B)}\end{cases}$$

令 $\beta>0$，由式(A)得 $\triangle_A=1+4\beta>0$，故 $F(\xi)=\beta\xi^2-\xi+1=0$ 的两个根 $\xi_\pm$ 为

$$\frac{1-\sqrt{1+4\beta}}{2\beta}=\xi_-\leqslant\xi\leqslant\xi_+=\frac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2\beta}.$$

因为 $\xi_-\leqslant 0$，故当 $R>0$ 时，只要

$$\xi\leqslant\xi_+=\frac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2\beta},$$

另方面，由式(B) $f(\xi)=\beta\xi^2-\xi+1=0$ 的 $\triangle_B=1-4\beta$ 只要取 $\beta\geqslant 1/4$，则 $\triangle_B\leqslant 0$，式(B)成立.

把表达式 $\xi=2R\sin\theta(1-\cos\theta)=8R\sin^3(\theta/2)\cos(\theta/2)$ 代入 $\xi\leqslant\xi_+=\sqrt{1+4\beta}/(2\beta)$ 得

$$8R\sin^3(\theta/2)\cos(\theta/2)\leqslant\frac{1+\sqrt{1+4\beta}}{2\beta},\quad \beta\geqslant\frac{1}{4},\quad \theta\in(0,\pi).$$

易知 $\mathrm{Max}(8\sin^3\theta/2)\cos(\theta/2)=\mathrm{Max}(2\sin\theta(1-\cos\theta))=3\sqrt{3}/2$，而右端函数 $(1+\sqrt{1+4\beta})/2\beta$ 单调下降，当 $\beta=1/4$ 时达最大值 $2(1+\sqrt{2})$ 从而当 $\beta\geqslant 1/4, R\geqslant 0$ 时，格式(19)的稳定条件为 $0<R\leqslant(4/9)\sqrt{3}(1+\sqrt{2})=1.8584624$.

反之，当 $R<0$ 时，令 $\beta<0$，则式(B)的 $\triangle_B=1-4\beta>0$，故 $f(\xi)=\beta\xi^2-\xi+1=0$ 的两个根 $\xi^\pm$ 为

$$\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2\beta}=\xi^-\leqslant\xi\leqslant\xi^+=\frac{1-\sqrt{1-4\beta}}{2\beta},$$

由于 $\xi^+\geqslant 0$，故当 $R<0$ 时上式右端恒成立，只要

$$\xi\geqslant\xi^-=\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2\beta},$$

另方面，由式(A) $F(\xi)=\beta\xi^2-\xi-1=0$ 的 $\triangle_A=1+4\beta$ 只要取 $\beta\leqslant\frac{-1}{4}$，则 $\triangle_A\leqslant 0$，式(A)成立.

把表达式 $\xi=2R\sin\theta(1-\cos\theta)=8R\sin^3(\theta/2)\cos(\theta/2)$ 代入 $\xi\geqslant\xi^-=\dfrac{(1+\sqrt{1-4\beta})}{2\beta}$ 得

$$8R\sin^3(\theta/2)\cos(\theta/2)\geqslant\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{2\beta},\quad \beta\leqslant-\frac{1}{4}\quad \theta\in(0,\pi),$$

或

$$(-R)8\sin^3(\theta/2)\cos(\theta/2)\leqslant\frac{1+\sqrt{1-4\beta}}{-2\beta},\quad \beta\leqslant-\frac{1}{4}\quad \theta\in(0,\pi),$$

易知右端函数$(1+\sqrt{1-4\beta})/(-2\beta)$为单调上升函数，它在$\beta=-1/4$时达到最大值$2(1+\sqrt{2})$，从而当$R<0$，$\beta\leqslant-1/4$时格式(19)的稳定条件为$0<|R|\leqslant(4/9)\sqrt{3}(1+\sqrt{2})=1.8584624$.

综上所述，得到

定理 6　当$R>0,\beta\geqslant1/4$时，或当$R<0,\beta\leqslant-1/4$时，差分格式(19)的稳定条件为$0<|R|\leqslant(4/9)\sqrt{3}(1+\sqrt{2})=1.8584624$.

2 比　较

1) 差分格式(8),(9)，当$\beta=0,\alpha\leqslant-2$或$\alpha\geqslant2$时为恒稳的半显式格式，这是一个双层格式.

2) 差分格式(12),(13)，当取$\beta=0,\alpha<0$且$|1+\alpha\tau|<1$或$|1+\alpha h^k|<1(k=1,2,3)$时可在不增加网格点数的情况下，扩大原有格式(末引进耗散项的相应格式)的稳定性范围.

3) 格式(16),(17)具有较高稳定性，它包含了已有的高稳定性的显式格式，其稳定性条件列于表1.

4) 格式(15)及(19)为三层对称的显式格式，其稳定性均优于青蛙跳格式，其稳定性条件列于表1.

表1　带耗散项差分格式稳定性与截断误差比较表*

耗散项	差分格式	截断误差	稳定性条件	附注
0	左右偏心显格式	$0(\tau+h)$	$0<\|R\|\leqslant1/4$	双层四点格式
0	青蛙跳格式	$0(\tau^2+h^2)$	$\|R\|\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}=0.3849$	三层五点格式
$\alpha Rh\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}$	式(8),(9)	$0(\tau+h^2+\frac{\tau}{h^2})$	恒稳$\left(\begin{matrix}\alpha\leqslant-2\text{ 或}\\ \alpha\geqslant2\end{matrix}\right)$	双层五点的半显格式
$\alpha\alpha\tau\frac{\partial^3u}{\partial x^3}$	式(12)	$0(\tau+h^2+\tau h^2)$	$\|R\|\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9\|1+\alpha\tau\|}=\frac{0.3849}{\|1+\alpha\tau\|}$	三层五点显格式 $(\alpha<0)$
$\alpha\alpha h^k\frac{\partial^3u}{\partial x^3}$ $(k=1,2,3)$		$0(\tau+h^2+h^{2k+2})$ $(k=1,2,3)$	$\|R\|\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{9\|1+\alpha h^k\|}=\frac{0.3849}{\|1+\alpha h^k\|}$ $(k=1,2,3)$	
$\alpha\alpha\tau\frac{\partial^3u}{\partial x^3}$	式(13)	$0(\tau+h^2+\tau h^2)$	$\|R\|\leqslant\frac{1}{\|1+\alpha\tau\|}$	三层七点显格式 $(\alpha<0)$
$\alpha\alpha h^k\frac{\partial^3u}{\partial x^3}$ $(k=1,2,3)$		$0(\tau+h^2+h^{2k+2})$ $(k=1,2,3,)$	$\|R\|\leqslant\frac{1}{\|1+\alpha h^k\|}$ $(k=1,2,3)$	

续表1 带耗散项差分格式稳定性与截断误差比较表*

耗散项	差分格式	截断误差	稳定性条件	附注
$aah^2\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}$	式(15)	$0(\tau+{}^2+h^2+h^4)$	$\lvert R\rvert\leqslant 1$(当 $a=1/4$) $\lvert R\rvert\leqslant 1.506745865$ (当 $a=0.3620298$)	三层七点 显格式 即文[6]中格式
	式(16),(17)	$0(\tau^2+h^2+h^4)$	$\lvert R\rvert\leqslant 2$(当 $a=1/4$) $0<\lvert R\rvert<2.394$ (当 $a=0.2976$)	三层七点显格式 即文[5]、[6] 中的格式
$-ia^2\beta\tau\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}$	式(19)	$0(\tau^2+h^2+\tau h^2)$	$0<\lvert R\rvert\leqslant 4\sqrt{3}(1+\sqrt{2})/9$ $=1.8585$ (当 $a>0,\beta\geqslant 1/4$ 或 $a<0,\beta\leqslant -1/4$)	三层九点 显格式

*表中点数系指中间层所用点数.

参 考 文 献

[1] 秦孟兆,色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的差分格式,计算数学,6,1(1984),1—13.

[2] 黎 益、李北杰,逼近色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的高精度差分格式,四川大学学报,22,4(1985),12—21.

[3] 曾文平,解色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的一族绝对稳定的高精度差分格式,计算数学,9,4(1987),403—410.

[4] 黎 益、李北杰,关于色散方程的两个显式差分格式计算数学,8,3(1986),275—280.

[5] 戴嘉尊、赵 宁、徐 云,关于色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的一类显式差分格式的讨论,11,2(1989),172—177.

[6] 黎 益,关于色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的三层显式差分格式,四川大学学报,25,3(1988),298—306.

[7] 曾文平,关于色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的一类绝对稳定的半显式格式,计算数学,10,3(1988).248—252.

[8] 林鹏程,解色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 绝对稳定的两层半显式格式,应用数学,4(1989),62—68.

[9] 林鹏程,色散方程 $u_t=au_{xxx}$ 的一类具高稳定性的三层显式格式,应用数学和力学,9,9(1988),803—808.

[10] Chan, T. F., Lee, Ding, Shen, Longjun, SIAM. J. Numer. Anal., 23, 2(1986),274—281.

[11] 萨乌里耶夫,B.K. 著(袁兆鼎译),抛物型方程的网格积分法,北京,科学出版社,(1963),34—36.

[12] John J. H. Miller, J. Inst. Math. Appls., 8(1971),397—406.

[13] Richtmyer, R. D., Morton, K. W., Diffetence Method for Initial--Value Problems, 2nd, Edit, wiley, New York,(1967).

Introducing Dissipative Term into Semi-Explicit and Explicit Difference Schemes for Solving Dispersion Equation

Zeng Wenping

(*Department of Management Information Science*)

Abstract The stability condition of most conventional explicit schemes, e. g. the schemes in reference

[1], for solving the dispersion equation $U_t = AU_{xxx}$ is harsh. This is a difficulty which can be overcome by introducing a dissipative term into conventional explicit schemes. On this basis, the author derives a class of two-level new semi-explicit schemes with unconditional stability and also a number of three-level explicit schemes with high stability of which some are already known.

Key words dissipative term, explicit and semi-explicit schemes, dispersion equation