

平面刚架稳定问题的一种非线性分析方法

方德平 林赞生 陈 锐

(土木工程系)

摘要 本文构造了既体现轴压力又体现侧向位移与轴向位移耦合因素的杆单元刚度方程,借助叠代逼近法处理非线性问题,综合杆件有限元分析的简便性与非线性分析方法的严密性,对受有水平和竖直均布荷载的单层与多层刚架稳定问题进行了研究,计算结果反映了多种因素对刚架力学响应的影响,得出有益的分析结论。

关键词 刚架,弹性屈曲,非线性,稳定

0 引言

随着建筑物不断向高层发展,高层钢结构在国外得到广泛应用,国内对此潜在的应用前景也已引起了充分的注意。稳定性问题是高层钢结构的关键性课题,在弹性稳定性方面,人们已获得许多重要成果。近代研究则致力于放弃种种简化假设,采用更复杂的模型,应用非线性分析方法,借助计算机以探索高层钢结构稳定性的更深入更全面的信息:临界荷载,屈曲型式,过屈曲等。其中,在平面刚架稳定分析方面,Simitses 等人近年的研究工作^[1-3]颇有建树,他们从杆件微分方程的通解出发,利用节点内力与位移的连续条件建立起求解平衡位置及各杆轴向力的非线性代数方程,进而应用屈曲方程,以屈曲方程在齐次边界条件下存在非零解为依据确定临界荷载及屈曲型。与国内该领域的某些研究^[4-7]相比,Simitses 等人的工作考虑了杆件受均布荷载的作用,同时考虑了轴向变形与弯曲变形相耦合的因素,因此无论在理论推导或在非线性方程的数值处理方面都远为复杂,而所获得的信息也更为全面和深入。

本文的目的是综合杆件有限元分析方法的简便性与 Simitses 等人非线性分析方法的严密性构造出不仅体现轴压力因素,而且体现侧向位移与轴向位移耦合因素的杆件单元刚度方程,借助迭代逼近法处理非线性问题,编制了适用于各类刚架(多层、受均布荷载)的计算程序。

本文方法避免了大量繁杂解析式的推导,而又没有忽略侧向与轴向变形耦合引起的非线性因素,试算结果与 Simitses 文[1]的结果相吻合,说明本方法是有效的。所获取的计算数据较全面地反映了刚架结构参数、几何参数、几何非对称、水平荷载等多种因素对刚架力学响应的

1991-03-08 收到。

影响,具有一定的理论和实际价值.

1 杆单元的刚度方程

在杆单元 AB 上建立局部坐标(图1),以 u, v 分别表示杆上某点在 x, y 方向上的位移,同时将杆端位移表示为

$$\{\delta\} = \{u_A, v_A, \theta_A, u_B, v_B, \theta_B\}^T \quad (a)$$

杆端力表示为

$$\{F\} = \{P_{AB}, Q_{AB}, M_{AB}, P_{BA}, Q_{BA}, M_{BA}\}^T. \quad (b)$$

采用无量纲符号 $U = \frac{u}{l}, V = \frac{v}{l}$,

$X = \frac{x}{l}$, 杆件的基本微分方程为

$$V_{,xxxx} - \frac{P^2}{EI} V_{,xx} = \frac{q l^2}{EI}, \quad (1)$$

$$\text{及 } U_{,x} + \frac{1}{2}(V_{,x})^2 = \frac{P}{EA}. \quad (2)$$

当杆受压时,即轴力 $P < 0$, 记

$$k^2 = -\frac{P^2}{EI}, \bar{q} = \frac{q l^2}{EI}, \quad (3)$$

方程(1)的通解为

$$V(X) = A_1 \sin kX + A_2 \cos kX + A_3 X + A_4 + \frac{\bar{q}}{2k^2} X^2. \quad (4)$$

借助通解(4)中的四个待定系数 A_1, A_2, A_3, A_4 作为中间变量,不难建立起四个节点位移

$$\{\bar{\delta}\} = \{v_A, \theta_A, v_B, \theta_B\}^T \quad (c)$$

与四个杆端力

$$\{\bar{F}\} = \{Q_{AB}, M_{AB}, Q_{BA}, M_{BA}\}^T \quad (d)$$

之间的关系⁽⁶⁾为

$$\{\bar{F}\} = \{K\} \{\bar{\delta}\} + \{\bar{f}\}, \quad (5)$$

其中

$$\{K\} = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & -a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 & -a_3 & a_4 \\ -a_1 & -a_3 & a_1 & -a_3 \\ a_3 & a_4 & -a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{EI}{l^3} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{k}{2}}{\frac{k}{2}} - 1 \right) k^2, & a_2 &= \frac{EI}{l} \left(\frac{1 - k \operatorname{ctg} k}{2 \operatorname{tg} \frac{k}{2} - k} \right) k, \\ a_3 &= \frac{EI}{l^2} \frac{k^2 \operatorname{tg} \frac{k}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{k}{2} - k}, & a_4 &= \frac{EI}{l} \frac{k - \sin k}{2 \operatorname{tg} \frac{k}{2} - k} \frac{k}{\sin k}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

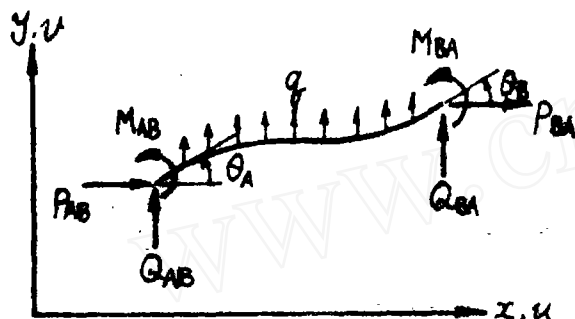


图1 杆单元的位移与受力状态

且

$$\{\bar{\zeta}\} = \left\{ -\frac{ql}{2}, -\frac{ql^2}{12}\varphi(k), -\frac{ql}{2}, \frac{ql^2}{12}\varphi(k) \right\}^T, \quad (8)$$

其中

$$\varphi(k) = \frac{12}{k^2} \left(1 - \frac{k}{2} \operatorname{ctg} \frac{k}{2} \right). \quad (9)$$

方程(5)的建立说明,节点侧向位移和转角可表达成节点剪力和弯矩的线性式,而轴力 p 则隐含在系数矩阵 $[K]$ 与 $\{\bar{\zeta}\}$ 中. 为了寻求节点轴向位移 u_A, u_B 与节点力的关系,对方程(2)进行积分,得

$$u_B - u_A + \frac{l}{2} \int_0^1 (V_{,x})^2 dX = \frac{pl}{EA}, \quad (10)$$

其中含 $(V_{,x})^2$ 的积分项体现了侧向变形的影响. 进而,借助方程(1)的通解(4),经过一系列的运算代换可得

$$\begin{aligned} V_{,x} = & \left(\theta_A + \frac{Q_{AB}}{p} \right) \cos kX + \frac{kM_{AB}}{p} \sin kX - \frac{Q_{AB}}{p} \\ & + \frac{ql}{2p} \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{k}{2} \sin kX - \cos kX - \frac{2X}{l} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

可见,式(11)中的积分项使节点轴向位移与轴力及其它节点力和位移构成十分复杂的非线性耦合关系. 为了在形式上构成轴向位移与轴向力的线性关系式,现引入一个综合影响系数

$$\alpha = \left(1 - \frac{EA}{p} \int_0^1 \frac{1}{2} (V_{,x})^2 dX \right)^{-1}, \quad (12)$$

并把式(10)改写为

$$p = \frac{EA}{l} \alpha (u_B - u_A), \quad (13)$$

这样,可以形式上构成轴向力与轴向位移的线性表达式

$$\begin{Bmatrix} P_{AB} \\ P_{BA} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p \\ p \end{Bmatrix} = \frac{\alpha EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

利用式(14),把式(5)扩展为

$$\{F\} = [K]\{\delta\} + \{\bar{\zeta}\}, \quad (15)$$

其中

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{\alpha EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 & -a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 & 0 & -a_3 & a_4 \\ -\frac{\alpha EA}{l} & 0 & 0 & \frac{\alpha EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & -a_2 & 0 & a_1 & -a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 & 0 & -a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\{\bar{\zeta}\} = \left\{ 0, -\frac{ql}{2}, -\frac{ql^2}{12}\varphi(k), 0, -\frac{ql}{2}, \frac{ql^2}{12}\varphi(k) \right\}^T. \quad (17)$$

方程(15)的构成为我们提供了以 k 和 α 为耦合参数的受压杆单元节点位移与节点力之间非线性关系的线性表达形式. 受拉杆单元 ($P \geq 0$) 的刚度方程亦可用类似的途径获得. 但考虑到对一般受竖向荷载的刚架, 杆中出现拉力所引起的非线性耦合作用相对微小, 为计算上的方便, 可近似取 $\alpha=1$, 及令 $k \rightarrow 0$.

2 计算方法

基于杆单元刚度方程(15), 按照常规矩阵位移法可集合得到刚架的总体刚度方程. 由于总体刚度方程中含有各杆的轴力系数 k_i 与综合耦合系数 α_i (i 为杆号), 故对每一级给定的荷载均需采用迭代逼近法求解结构的位移和内力. 迭代步骤如下: (1) 将前一轮计算所得的 k_i, α_i 代入总刚度矩阵, 求得结构的位移和内力 (在第一次计算循环中令 $\alpha_i=1, k_i=0$, 即按常规单元进行结构分析). (2) 将步骤(1)所求得的轴力和位移生成新一轮的 k_i, α_i . (3) 重复上述两个步骤, 直到以下收敛条件得到满足

$$\left[\sum_i \left(\frac{p_i^{(N+1)} - p_i^{(N)}}{p_i^{(N)}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon_0, \quad (18)$$

其中 $p_i^{(N)}, p_i^{(N+1)}$ 分别为某级荷载下第 N 次和第 $(N+1)$ 次迭代所求得第 i 杆的轴力, ε_0 为设定的精度要求. (4) 计算总体刚度行列式值. 对于对称刚架受对称荷载的情况, 将可以求得刚架出现侧移屈曲 (sway buckle) 时的分枝点临界荷载^[12]. 本文采用的计算判断方法是: 当荷载增大而经过临界值 (q_0) 时, 总刚行列式值由正变负. 适当选择荷载增量的步长可按要求的精度计算出临界值.

对于存在水平单侧荷载 (风载) 的对称刚架或刚架受对称竖向荷载但存在几何不完善 (几何非对称) 的情况, 上述的分枝点临界荷载是不存在的. 本文的计算将提供刚架某特征位移 (如横梁中点水平位移) 随荷载增大而增大的变化规律.

3 算例与分析

设刚架第 i 杆的杆长、弹性模量、横截面积、截面惯性矩分别为 l_i, E_i, A_i 和 I_i , 并以刚架第一层左边柱为 1 号杆, 引入以下几何无量纲参数: 长度比为 $\omega_i = l_i/l_1$, 抗弯刚度比为 $r_i = \frac{(EI)_i}{(EI)_1}$.

设第 i 杆受有均布荷载 q_i , 定义无量纲参数为 $q_i^* = \frac{q_i l_i^2}{(EI)_1}$, 设支座节点 j 处的扭转刚度为 β_j , 定义无量纲参数为 $\bar{\beta}_j = \frac{\beta_j l_1}{(EI)_1}$.

以下分别对单层、双层及多层 (三、四层) 单跨刚架进行计算, 分析刚架几何参数、支座扭转刚度、几何不完善 (非对称)、水平荷载、层数及各层柱刚度分布等因素对刚架稳定性的影响.

3.1 单层单跨刚架 (图 2)

(1) 当荷载对称时, 对称刚架各几何参数取 $\omega_i = r_i = 1$ ($i=1, 2, 3$), 支座弹性参数 $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\beta}$, 而无水平荷载 ($q_1^* = 0$), 选取节点 3 的转角 φ_3 与均布荷载 q_1^* 的对应关系来描述刚架的变形响应. 图 3 反映了在不同 $\bar{\beta}$ 下 $\varphi_3 - q_1^*$ 的关系曲线及临界荷载 q_0^* 的值. 这些结果与 Simitses^[1] 所获

得的相吻合.

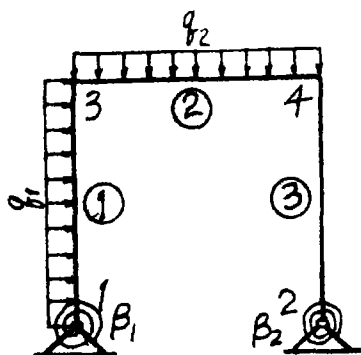


图2 单层单跨刚架

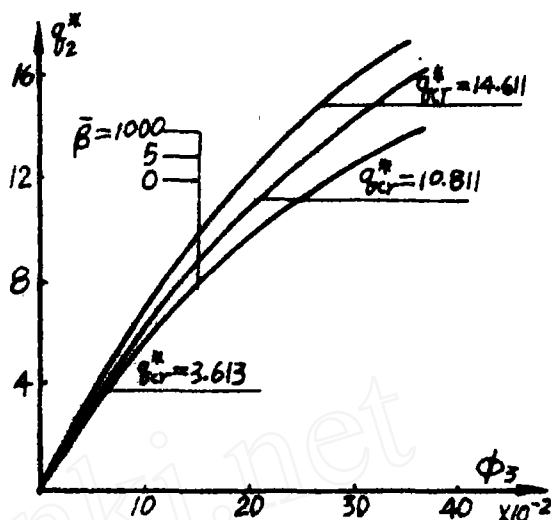


图3 $q_1-q_2^*$ 的关系曲线

表1的数据更详尽地反映了不同支座扭转刚度 $\bar{\beta}$ 对临界荷载 q_2^* 的影响. 显然, $\bar{\beta}$ 从0上升至20的过程中 q_2^* 随之提高的幅度是显著的,而 $\bar{\beta} > 20$ 后则无明显提高.

表1 $\bar{\beta}-q_2^*$ 的对应关系

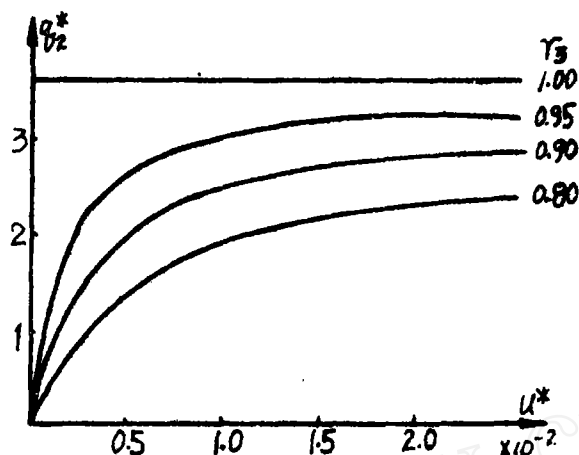
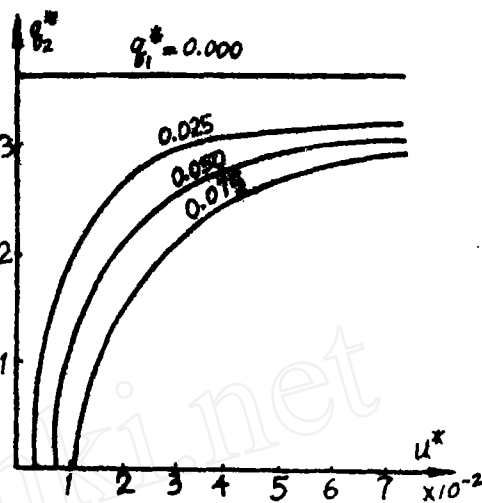
$\bar{\beta}$	0	1	3	8	20	100	1000
q_2^*	3.613	6.360	9.305	11.903	13.352	14.280	14.611

上述对称刚架在对称荷载下所出现的屈曲是侧移屈曲,其临界荷载值为平衡分枝点. 当刚架存在(2)中的几何非对称或(3)中的水平荷载,它将不出现上述性质的屈曲.

(2)当荷载对称,几何非对称时,取 $\omega_i = 1 (i=1, 2, 3)$, $r_1 = r_2 = 1$, $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = 0$, $q_1^* = 0$,而取 r_3 分别为0.80, 0.90, 0.95,即减小右柱的抗弯刚度. 图4给出了不同 r_3 值下梁中点无量纲水平位移 $u^* = \frac{1}{2l_1}(u_3 + u_1)$ 与 q_2^* 的关系曲线. 显然,几何不完善刚架在荷载远小于相应的对称刚架的临界荷载时就产生了明显的侧移变形,非对称性明显削弱了刚架的抗侧移刚度.

(3)当刚架为几何对称: $\omega_i = r_i = 1 (i=1, 2, 3)$, $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = 0$,但存在单侧水平荷载($q_1^* \neq 0$)时,计算结果图5表明:微小水平荷载 q_1^* 的存在将导致 $u^*-q_2^*$ 曲线的明显变化,刚架的侧向位移对竖向荷载的响应显得敏感了.

(4)对对称刚架受对称荷载($\omega_i = 1$, $r_1 = r_2 = 1$, $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = 0$, $q_1^* = 0$)的情况,通过改变梁2的刚度比 r_2 ,计算结果所得的 $q_2^*-\log r_2$ 曲线(图6)说明:梁刚度的增加在一定范围内将有效地提高刚架的临界荷载,其影响与支座扭转刚度 $\bar{\beta}$ 对 q_2^* 的影响类似.

图4 不同 r_3 时的 $u^*-q_2^*$ 曲线图5 不同 q_1^* 时的 $u^*-q_2^*$ 曲线

3.2 二层单跨刚架(图7)

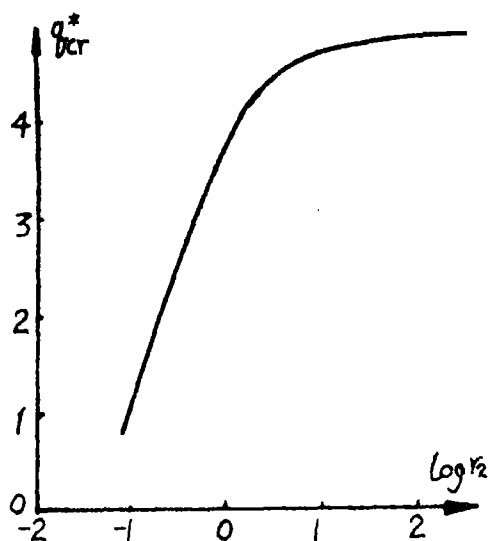


图6 梁刚度对临界荷载的影响

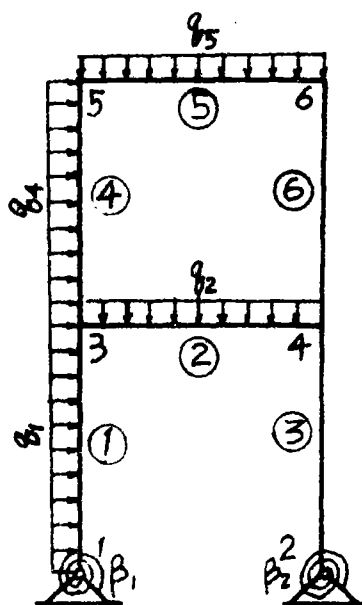


图7 二层单跨刚架

(1) 考虑对称二层刚架受对称荷载的情况: $\omega_i = r_i = 1$, $(i=1, \dots, 6)$ $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\beta}$, $q_1^* = q_2^* = 0$, 且 $q_3 = q_4$. 对不同的 $\bar{\beta}$ 值, 我们计算了竖向合均布荷载的临界值 $q_{cr}^* = (q_3^* + q_4^*)_{cr}$, 并列出于表2. 比较表2与表1的值说明: 具有相同几何参数的单层与双层刚架, 其合竖向荷载数值相近. 由

于对刚架屈曲起决定作用的因素是底层柱的受力状态,而对两种情况,底层柱的受力状态是十分相近的,这就解释了上述的结果.进一步的计算亦说明,改变 q_2 与 q_5 的比例几乎对合临界荷载不起什么作用.

(2)当双层刚架存在几何非对称时,即 $\omega_i=1, (i=1, \dots, 6), r_i=1, (i=1, 2, 4, 5), \bar{\beta}_1=\bar{\beta}_2=0, q_1^*=q_6^*=0$,

表 2 二层刚架 $\bar{\beta}-q_2^*$ 的关系

$\bar{\beta}$	0	1	3	8	20	100	1000
q_2^*	3.691	6.415	9.230	11.853	13.221	14.100	14.214

$q_2^*=q_5^*$, 而 $r_3=r_6$ 分别取 0.95, 0.90, 和 0.80. 图 8 给出了梁 5 中点无量纲水平位移 u^* 与合荷载 $q^*=q_2^*+q_5^*$ 的关系曲线. 与图 4 相比双层刚架对几何不完美的反应相对不敏感.

(3)当刚架存在水平荷载时,即 $\omega_i=r_i=1, (i=1, \dots, 6), \bar{\beta}_1=\bar{\beta}_2=0, q_1^*=q_6^*, q_1^*=q_6^* \neq 0$ 时, 得到与图 5 类似的结果(图 9). 显然, 水平荷载的存在对双层刚架的影响远比对一层刚架的影响来得大.

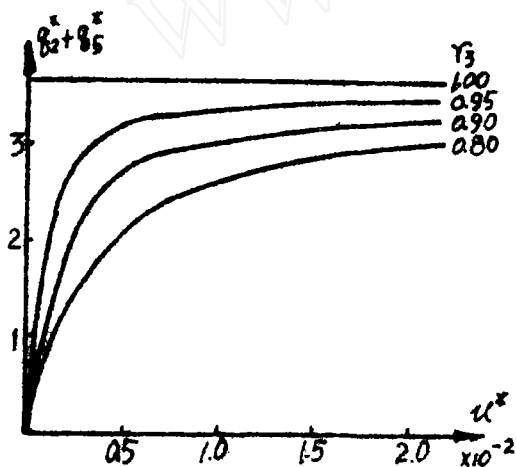


图 8 双层刚架不同 r_3 的 $u^*-q_2^*+q_5^*$ 关系曲线

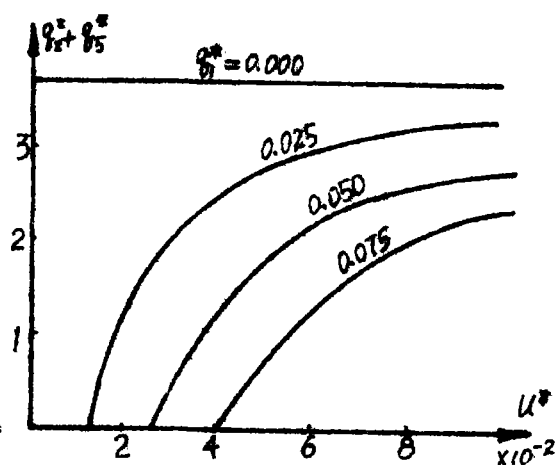


图 9 双层刚架不同 q_1^* 的 $u^*-q_2^*+q_5^*$ 关系曲线

(4)同时改变梁 2 与梁 5 的刚度比 r_2, r_5 , 得出与单层刚架的图 6 类似的关系曲线(略).

3.3 多层单跨刚架

对图 10 的三层与四层对称刚架,我们分别计算了竖向合荷载的临界值 $q_2^*=3.691$ (三层), $q_2^*=3.611$ (四层), 在数值上它们与一、二层刚架的临界荷载相近,这再次说明底层柱的受力状态是屈曲的最关键控制因素.

分别增加各层柱的刚度,我们逐一计算了临界荷载,并列表 3 加以比较. 表 3 的数值表明: 增加底层柱的刚度可最有效地提高高层刚架的临界荷载.

表3 增加不同层柱刚度对临界荷载影响

$r_1=r_3$	$r_4=r_6$	$r_7=r_9$	$r_{10}=r_{12}$	q_c^2
1	1	1	1	3.611
2	1	1	1	5.513
1	2	1	1	3.747
1	1	2	1	3.673
1	1	1	2	3.637

4 讨论及今后的工作

本文通过引入综合影响系数 α , 利用迭代法建立了平面刚架稳定问题的一种非线性分析方法. 在研究过程中作者曾与 Simitses 教授探讨过通过屈曲方程存在非零解确定临界荷载与线性化后通过刚度矩阵行列式值为零的二种判断准则的等价性问题. 由于复杂非线性问题形式上线性化的步骤直接影响刚度矩阵的构成, 这一等价性尚有待进一步研究. 作者将在今后的工作中进一步改进非线性分析方法以解决更复杂的刚架稳定性问题.

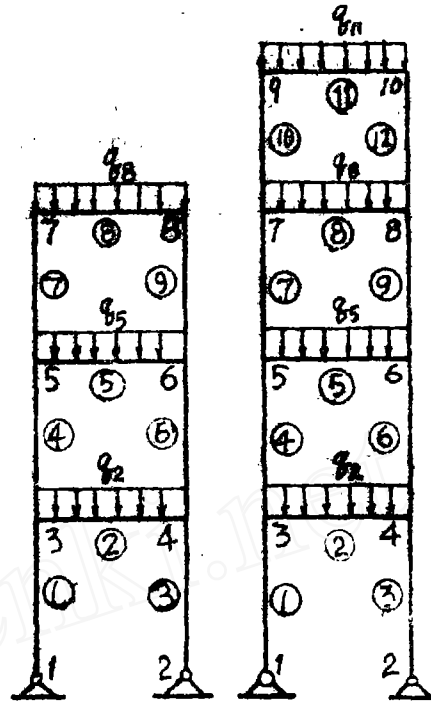


图10 三、四层单跨刚架

参 考 文 献

- [1] Simitses, G. J. and Giri, J., *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 17, 1(1982), 47-61.
- [2] Simitses, G. J. et. al., *Int. J. for Numerical Methods in Eng.* 17, (1981), 123-132.
- [3] Simitses, G. J. et. al., *Computer & Structures*, 22, 6, (1986) 1047-1054.
- [4] 蒙承军, 高层单跨对称刚架临界荷载的计算方法, 广西大学学报, 2(1988).
- [5] 戴安民, 多层多跨刚架的稳定性计算, 建筑结构, 2(1989).
- [6] Chali, A. Neville, A. M., Cheung, Y. K., *Structural Analysis*, International Textbook Company, (1972).

A Non-Linear Method for Analysing the Stability of Plane Frames

Fang Deping Lin Zansheng Chen Guang

(Department of Civil Engineering)

Abstract An equation of rod element stiffness embodying both axial compressive force and the coupling of lateral and axial displacements was formulated. With the aid of iterated approximate method for handling nonlinear problem and combining the handy finite element analysis of rod member with the

strict non-linear analysis, the stability of single and multi-storey rigid frames bearing uniformly distributed loads was effectively studied. The computed results reflected the effects of multiple factors on the mechanical response of rigid frames, from which a valuable conclusion ensued.

Key words rigid frame, elastic buckling; non-linear, stability

www.cnki.net