第13卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol.13 No.3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年7月 (NATURAL SCIENCE) Jul. 1992

直杆承受均匀轴向荷载弹性失稳的加权余量解

杜 耀 星

（土木工程系）

摘要 本文用加权余量法推导出直杆承受均匀轴向荷载，发生弹性失稳时临界荷载 q_{cr} 的计算式.

关键词 加权余量法，弹性失稳，直杆，轴向荷载，临界荷载

0 引言

直杆在轴向集中荷载作用下，对应于各种不同形式的杆端约束，在求解其弹性失稳时的临界荷载问题都比较简单，因为它们所对应的挠曲线近似微分方程都是二阶常系数的线性微分方程. 但是，对于直杆在承受轴向均匀分布荷载(如直杆在本身自重作用下就是这种形式的荷载)，其挠曲线近似微分方程成为具有变系数的三阶微分方程，于是就增加了求解的难度. 如果要求其弹性失稳时的临界荷载，可以将微分方程通过特殊变换，使之成为贝塞尔方程，然后利用贝塞尔函数来求解，虽然所得结果是精确解，但增加了不少计算工作量.

本文在推导出这类问题的变系数三阶挠曲线近似微分方程后，利用加权余量法，就可以简捷地得出本问题的近似解，其精度完全满足了工程的需要. 加权余量法虽然是一种近似求解法，但是可以达到我们所需要的精度，所以新近以来加权余量法在结构分析中得到了迅速发展和广泛应用. 关于加权余量法的计算原理可参阅文献[1]，[2].

1 本问题的挠曲线近似微分方程——加权余量法的控制方程

以下端固定上端自由的等截面直杆，在均匀分布的临界荷载作用下呈微弯状态(图1)为例，推导出加权余量法的控制方程. 由材料力学可知，杆件在轴向均匀分布的临界荷载作用下呈曲线形状的平衡，此时弹性曲线的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-M(x), \tag{1}$$

将式(1)对 x 微分，则得

本文 1991-03-07 收到.

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{dM(x)}{dx}=-Q(x). \tag{2}$$

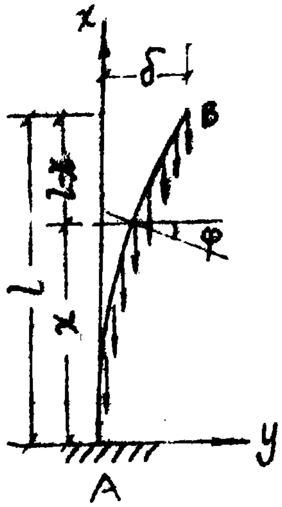

图1 均匀轴向荷载下压杆的失稳

由图1可知，在距固定端为 x 的任一截面上，其剪力为

$$Q(x)=(l-x)q\sin\varphi\approx(l-x)q\mathrm{tg}\varphi=(l-x)q\frac{dy}{dx}. \tag{3}$$

以式(3)代入式(2)，可得

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}+(l-x)q\frac{dy}{dx}=0, \tag{4}$$

令

$$K=q/EI, \tag{5}$$

则式(4)可改写为

$$\frac{d^3y}{dx^3}+k(l-x)\frac{dy}{dx}=0, \tag{6}$$

式(6)是一个具有变系数的三阶齐次微分方程，它也就是本问题利用加权余量法求解的控制方程.

2 临界荷载 q_{cr} 的加权余量解

采用加权余量法求解必须先取一试函数，为此，我们选取三角函数式为试函数，即

$$y=\delta\sin(mx), \tag{7}$$

式中，δ 为待定参数；$N_i=\sin(mx)$ 为基函数；$m=\pi/2L$. 将式(7)对 x 分别微分一次和三次得

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\delta m\cos(mx),\\ \frac{d^3y}{dx^3}&=-\delta m^3\cos(mx),\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由于试函数式(7)满足边界条件 $x=0$ 时，$y=0$；$x=l$ 时，$y=\delta$. 所以将式(8)代入式(6)得余量为

$$R_L=-\delta m^3\cos(mx)+k(l-x)\delta m\cos(mx). \tag{9}$$

我们采用加权余量法中的矩法，取权函数为

$$W_i=x^3, \tag{10}$$

将式(9)，(10)代入加权余量积分方程，则有

$$\int_v R_LW_i dv=\int_0^l x^3[-\delta m^3\cos(mx)+k(l-x)\delta m\cos(mx)]dx$$

$$=(kl\delta m-\delta m^3)\int_0^l x^3\cos(mx)dx-k\delta m\int_0^l x^4\cos(mx)dx,$$

为了消除余量，令加权余量积分为零，即

$$(kl\delta m-\delta m^3)\int_0^l x^3\cos(mx)dx-k\delta m\int_0^l x^4\cos(mx)dx=0,$$

上式积分并整理后可得

$$K=\frac{q}{EI}=\frac{7.63}{l^3},\tag{11}$$

所以最后可得

$$q_{cr}=\frac{7.63}{l^3}EI.\tag{12}$$

式(12)就是等直杆在轴向均匀荷载作用下,发生弹性失稳时的临界荷载 q_{cr} 的计算式.

3 讨论

本问题可以经过特殊变换,使式(4)成为贝塞尔方程,然后利用贝塞尔函数求得其精确解为

$$q_{cr}=\frac{7.83}{l^3}EI.\tag{13}$$

前面利用加权余量法求得近似解为式(12),两者相比,相对误差仅为 2.55%,可见采用加权余量法求解,虽然是近似的,但可达到较高的精度,足够满足工程上的需要.本问题还可以利用能量法、瑞利-里兹法求得近似结果,现将各种方法所求得结果列成表 1,比较于后.

表 1　各种计算方法精度比表

计算方法	临界荷载 q_{cr}	相对误差(%)
精确解	$q_{cr}=(7.83/l^3)EI$	
加权余量解	$q_{cr}=(7.63/l^3)EI$	2.55
能量解	$q_{cr}=(8.29/l^3)EI$	5.87
瑞利-里兹法	$q_{cr}=(8.0/l^3)EI$	2.17

由表 1 可以清楚地看出,在各种近似解算中,加权余量法不失是一种简捷又可得到足够精度的近似计算方法.所以加权余量法在流体力学、热传导、化学工程以及土木工程中最近得到迅速的发展和广泛的应用,它在近似计算中无疑是一种好方法.

参　考　文　献

〔1〕徐文焕、陈虬,加权余量法在结构分析中的应用,中国铁道出版社,(1985),5—26.

〔2〕杜耀星,圆环和圆拱承受均匀径向荷载时弹性失稳的加权余量解,华侨大学学报(自然科学版),4(1990),371—376.

〔3〕孙训方等,材料力学(下册),人民教育出版社,(1980),228—243.

〔4〕Timoskenko,S. P. ,*Mechanics of Materials*,Van Nostrand Reinhold,(1972),480—491.

〔5〕Феодосьев , В. И. , *Сопротивление Материалов* , Государственное Издательство Физико - Математической Литературы,(1979),459—463.

Weighted Residual Solution to the Elastic Instability of Straight Bar Bearing Axially Uniformly Distributed Load

Du Yaoxing

(Department of Civil Engineering)

Abstract In relation to a straight bar bearing an axially uniformly distributed load, a formula is derived by weighted residual method for calculating the critical load q_{cr} in case the elastic instability occurs.

Key words weighted residual method, elastic instability, straight bar, axial load, critical load