第13卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol.13 №.3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年7月 (NATURAL SCIENCE) Jul. 1992

等距运算在现有体素造形系统不可精确表示*

陈思雄

(管理信息科学系)

摘要 本文论述二种极为常用的自由曲线的等距曲线不可参数有理化的重要事实. 指出即使具有自由曲线造形功能的体素造形系统,也无法精确表示等距运算.

关键词 计算机辅助设计,自由曲线,等距运算.

0 引言

CAD/CAM 的造形系统从开始研究便以两条主要干线平行发展着:一是为构造体边界的各局部解析区域而形成起来的曲线、曲面几何造形系统;另一则是研究 n 维体的整体结构如何在计算机内部表示和计算形成起来的体素造形系统. 参数样条及有理曲线(面),或称自由曲线(面),由于其具有表达力强、几何直观、局部可调、可修改性强,且求值、求导方便等良好性质,而被当今造形系统研制者们一致推崇. 因此,现有大多数体素造形系统均采用自由曲线(面)为基准曲线(面). 体素造形系统若由 CSG 树结构化体表示观点来看,不管体多么复杂,均可由系统的若干基本体素(如圆柱、球、台、棱、环、立方体、锥等)进行有限次正则布尔聚合运算和正交运算后而构造起来. 但是这种方法表示的体明显不足之处是:其边界形状复杂度仅限于二次圆锥曲线(面)的情形,难于满足当今具有雕塑曲线(面)构造要求的应用课题. 不过,通过边界曲线(面)的统一多数样条或有理表示及允许一定量的边界运算,现有体素造形系统已完全克服上述不足.

现有体素造形系统另一严重不足是:其关于体的基本运算极其有限(即只有布尔集合运算和正交运算)难于刻画那些不是靠上述运算而构造起来的体素. 事实上,在某些工业应用课题中,如鞋样加工中的镶边设计[1],机器人无障碍道路寻求[2],机械加工中的刀具中心轨迹自动生成[3]等直接或间接地涉及到形体各向等长度膨胀或收缩的过程便是一例. 这些变化过程若用数学语言予以描述,可为 n 维体 D 到另一 n 维 D_0 的变换 $\varphi_{d\pm}$,有 $D_0^+=\varphi_d+(D)=\{P\mid dis(P,D)\leqslant d,p\in R^n\}$,$D_0^-=\varphi_d-(D)=\{P\mid dis(P,R^n-D)>d,P\in R^n\}$,其中,$d$ 为膨胀收缩的厚度.

---

* 本文1990-11-07收到.

显然，等距运算 $\varphi_{d\pm}$ 如同正交运算，是关于体的单目运算. 易证其与正交运算可交换，但与正则布尔集合运算不可交换[4]. 因此，经 CSG 树表示的体素的等距体就不可简单地理解为失对，其组成的各基本体素施行等距运算后再重新进行 CSG 树表示. 这样，等距运算实际上以崭新的姿态而并入到体素造形系统关于体的基本运算之列. 然而，不幸的是：以现有体素造形系统的曲线(曲面)表示能力尚无法精确支持这种新引入的体运算[5]. 本文将就维数简单的 2 维体素造形系统给出上述结论的两个重要论据：(1)非直线、圆弧段的参数二次有理曲线的等距曲线必不可参数有理化；(2)非直线段且有拐点的参数四次多项式曲线的等距曲线必不可参数化.

1 可参数有理化的等距曲线类

首先，将给出 2 维体素的等距边界 ∂D_0 的参数表示. 事实上，若不妨设原 2 维体 D 的边界 ∂D 是由参数曲线 $r=\{(x(t),y(t))\,|\,t\in(0,1)\}$，则直接计算可得相应等距边界 ∂D_0 为 $r_0=\{(x_0(t),y_0(t)\,|\,t\in(0,1)\}$，其中

$$\begin{cases} x_0(t)=x(t)\pm d-y'(t)/\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}, \\ y_0(t)=y(t)\pm d-x'(t)/\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}, \end{cases}$$

r_0 便是机械加工上常称的等距曲线. 易证等距运算具有保切向、保直线、圆弧段、保凸凹性不变的良好几何性质. 然而，正如 Tiller 在文〔5〕中所证，非直线段参数样条的等距曲线必不再是参数样条. 因此，等距曲线在现有体素造形系统的精确表示，只有往表达范围更广的参数有理曲线类寻求. 这里，我们先给出有用的引理 1,2,3.

引理 1 若 $\sqrt{\bar{h}(t)}$，是 t 的有理函数，其中 $\bar{h}(t)$，是 t 的非负多项式，则 $\sqrt{\bar{h}(t)}$，必是 t 的非负多项式.

证明 由假设，∃ t 的两互素多项式 $p(t)$. $q(t)$ 使 $\sqrt{\bar{h}(t)}=p(t)/q(t)$，所以 $\bar{h}(t)=(p(t)/q(t))^2$，$\bar{h}(t)\cdot q^2(t)=p^2(t)$. 只有当 $q\equiv\text{const}$，才不致发生与 p、q 互素的矛盾，即 $\sqrt{\bar{h}(t)}\equiv p(t)/c$ 是一非负多项式，证毕.

引理 2 若参数有理曲线 $\bar{r}=\{(\bar{p}(t)/\bar{h}(t),\bar{q}(t)/\bar{h}(t))\,|\,t\in I\}$ 是一单位圆弧段，则∃ t 的某一有理函数 $s=s(t)$，使 $\bar{r}(t)=\{(s^2(t)-1/s^2(t)+1,2s(t)/s^2(t)+1)\,|\,t\in I\}$.

证明 由假设，$\bar{r}$ 是一单位圆弧段. 而单位圆段可由另一参数有理线 $\bar{r}=\{(s^2-1/s^2+1,2s/s^2+1)\}$ 来表示. 这样，

$$\begin{cases} \bar{p}(t)/\bar{h}(t)=s^2-1/s^2+1. \\ \bar{q}(t)/\bar{h}(t)=2s/s^2+1. \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} (\bar{p}(t)+\bar{h}(t))/\bar{h}(t)=2s^2/s^2+1, & (1) \\ \bar{q}(t)/\bar{h}(t)/\bar{h}(t)=2s/s^2+1. & (2) \end{cases}$$

将(1)/(2)，可得：$s=s(t)=(\bar{p}(t)+\bar{h}(t)/\bar{q}(t)$. 由此，$s(t)$ 便是所求的参数有理函数. 证毕

引理 3 若 t 的两多项式 f，g 互素，则 f^2-g^2，$2fg$ 均有 f^2-g^2 互素.

证明 先证 f^2-g^2 与 f^2+g^2 互素. 不然，∃ t 的非常数不可约多项式 $d(t)$，使

$$d\,|\,f^2-g^2,\qquad d\,|\,f^2+g^2,$$

所以

$$d|(f^2-g^2)+(f^2+g^2)=2f^2,$$
$$d|(f^2+g^2)-(f^2-g^2)=2g^2.$$

因为 d 不可约，所以 $d|f,d|g$. 但这与 f、g 互素相矛盾，故 f^2-g^2，f^2+g^2 互素.

类似的，我们也可证 $2fg$ 与 f^2+g^2 互素. 证毕.

定理1　若参数有理曲线 $r=\{(p(t)/h(t),q(t)/h(t))|t\in I\}$ 的等距曲线 r_0 也是参数有理曲线，则∃ t 的两互素多项式 f，g 及非负多项式 $\bar{h}(t)$，使：

$$\begin{cases}[p/h]'_t=(f^2-g^2)\bar{h}(t)/h^2, & (3)\\ [q/h]'_t=2fg\bar{h}/h^2. & (4)\end{cases}$$

证明　简单计算，我们可把等距曲线表 r_0 如：

$$\begin{cases}x_0=p/h\pm d\bar{p}/\sqrt{\bar{h}},\\ y_0=q/h\pm d\bar{q}/\sqrt{\bar{h}},\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}\bar{p}=-q'h+h'q,\\ \bar{q}=p'h-h'p,\\ \bar{h}=\bar{p}^2+\bar{q}^2.\end{cases}$$

由假设，r_0 为 t 的有理曲线，因此，由引理1，$\sqrt{\bar{h}}$ 必为 t 的一非负多项式 $\bar{h}$. 即

$$\begin{cases}x_0=p/h\pm d\bar{p}/\bar{h},\\ y_0=q/h\pm d\bar{q}/\bar{h}.\end{cases}$$

易证，参数有理曲线 $\bar{r}=\{(\bar{p}(t)/\bar{h}(t),\bar{q}(t)/\bar{h}(t)|t\in I\}$ 是单位圆弧段，由引理2，∃ t 的某有理函数 $s=s(t)$，使

$$\begin{cases}\bar{p}/\bar{h}=s^2-1/s^2+1,\\ q/\bar{h}=2s/s^2+1,\end{cases}$$

对于有理函数 $s(t)$ 可选择两互素多项式 f、g 使 $s=f/g$，这样

$$\begin{cases}\bar{p}/\bar{h}=(f^2-g^2)/(f^2+g^2),\\ \bar{q}/\bar{h}=2fg/(f^2+g^2),\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\bar{p}=(f^2-g^2)\bar{h}/(f^2+g^2),\\ \bar{q}=2fg\bar{h}/(f^2+g^2).\end{cases}$$

由引理3，f^2-g^2、$2fg$ 均与 f^2+g^2 互素. 故欲上述方程组成立，$\bar{h}/(f^2+g^2)$ 应是 t 的非负多项式 h^*；即

$$\begin{cases}[p/h]_t=(f^2-g^2)h^*/h^2,\\ [q/h]_t=2fgh^*/h^2.\end{cases}$$

这正与命题原意相符，证毕.

上述定理1的结论是针对原曲线 r 为有理曲线而言，若把原曲线限制在参数多项式时，则 $h\equiv\mathrm{const}$，不妨设 $h\equiv1$，则定理1的(3)和(4)，变为

$$\begin{cases}p_t=(f^2-g^2)\bar{h},\\ q_t=2fg\bar{h}.\end{cases}$$

由此，得到定理1推论：

推论若参数多项式曲线 $r=\{(p(t),q(t))|t\in I\}$ 的等距曲线可参数有理化，则∃ t 的两互素

多项式 f、g 及非负多项式 $\bar{h}$，使

$$\begin{cases} p_t = (f^2 - g^2)\bar{h}, \\ q_t = 2fg\bar{h}. \end{cases}$$

2 等距曲线不可参数有理化的两类重要自由曲线

本节将利用上节的定理 1 及其推论来证明在 CAD/CAM 极为常用的参数二次有理曲线和参数四次多项式曲线在一般情况下其等距曲线不可参数有理化. 首先，我们将给出有用的引理 4、引理 5、引理 6：

引理 4 $\max(\deg(f^2-g^2),\deg(2fg))=2\max(\deg(f),\deg(g))$.

证明 因 $(f^2-g^2)^2+(2fg)^2=(f^2+g^2)^2$，所以 $\deg((f^2-g^2)^2+(2fg)^2)=2\deg(f^2+g^2)$，$2\max(\deg(f^2-g^2,\deg(2fg))=2\max(\deg(f^2),\deg(g^2)$，故 $\max(\deg(f^2-g^2),\deg(2fg=2\max(\deg(f),\deg(g))$. 证毕.

引理 5 若 f、g 互素且为线性多项式，则 $\{f^2,2fg,g^2\}$ 恰构成 p^2 的一组基（p^2 是全体实数域上的二次多项式线性空间）.

证明 由假设，f、g 均是线性多项式，则 $f^2,2fg,g^2$ 均是 t 的二次多项式. 下面，欲证 $\{f^2,2fg,g^2\}$ 恰构成 p^2 的一组基. 若不然，∃ 一组非零常数 c_0,c_1,c_2，使：$c_0f^2+2c_1fg+c_2g^2\equiv0$，所以 $c_0(f/g)^2+2c_1(f/g)+c_2\equiv0$. 因此，要么 $f/g\equiv s_1$，要么 $f/g\equiv s_2$，其中 s_1,s_2 是二次方程 $c_0s^2+2c_1s+c_2=0$ 的两个根. 不管 $f/g\equiv s_1$ 还是 $f/g\equiv s_2$，均与 f，g 互素相矛盾，故 $\{f^2,2fg,g^2\}$ 恰构成 p^2 的一组基证毕.

引理 6 若 $\bar{h}(s)=h_0s^2+2h_1s+h_2$，则欲使

$$\begin{cases} \left(\bar{h}(s)\int_0^s(s^2-1)/\bar{h}(s)ds\right)^{(\prime\prime)}\equiv0, & (5) \\ \left(\bar{h}(s)\int_0^s 2s/\bar{h}(s)ds\right)^{(\prime\prime)}\equiv0, & (6) \end{cases}$$

当仅仅当 $h_2=h_0\neq0,h_1=0$.

证明 对式(5)、(6)直接计算可得

$$\begin{cases} 3\bar{h}''(s)(s^2-1)\bar{h}(s)+3\bar{h}'(s)[2sh(s)-(s^2-1)\bar{h}'(s)] \\ \quad +2\bar{h}^{-2}(s)-4s\bar{h}(s)\bar{h}'(s)+2(s^2-1)\bar{h}''(s)h(s)\equiv0, \\ 3\cdot\bar{h}''(s)s\bar{h}(s)+6\bar{h}'(s)\bar{h}(s)-6s\bar{h}'^2(s)-4\bar{h}'(s)h(s)-2s\bar{h}''(s) \\ \quad +4s\bar{h}'^2(s)\equiv0, \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} h_1=0, \\ h_2=h_0. \end{cases}$ 证毕.

定理 2 非同弧直线段的参数二次有理曲线的等距曲线必不可参数有理化.

证明 采用反证法：否则，由定理 1，∃ t 的两互素多项式 f、g 及非负项式 $\bar{h}$，使曲线 $r=\{(p(t)/h(t),g(t)/h(t))|t\in I\}$. 满足：

$$\begin{cases} [p(t)/h(t)]'_t=(f^2(t)-g^2(t))\bar{h}(t)/h^2(t), \\ [g(t)/h(t)]'_t=2f(t)g(t)\bar{h}(t)/h^2(t), \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}\bar{p} = p'h - ph' = (f^2 - g^2)\bar{h},\\ \bar{q} = q'h - qh' = 2fg\bar{h}.\end{cases}$$

因为 p、q、h 都是 t 的二次多项式，易证 $\bar{p}$，$\bar{q}$ 也都是 t 的二次多项式，所以
$$\begin{cases}\deg(2fg) + \deg(\bar{h}) \leqslant 2,\\ \deg(f^2 - g^2) + \deg(\bar{h}) \leqslant 2,\end{cases}$$

故 $\max(\deg(2fg),\deg(f^2-g^2))+\deg(\bar{h})\leqslant 2$. 由引理4知：$2\max(\deg(f),\deg(g))+\deg(\bar{h})\leqslant 2$.

从上述可知：要么：$\max(\deg(f),\deg(g))=0$，要么 $\max(\deg(f),\deg(g))=1$.

(i)当 $\max(\deg(f),\deg(g))=0$ 时，则此时 $\deg(\bar{h})=2$，所以 $f\equiv\text{const}$，$g\equiv\text{const}$，当然，$\exists$ 常数 c_1, c_2 使 $f^2-g^2\equiv c_1$，$2fg\equiv c_2$，这样：原曲线的斜率 $\frac{dg}{dx}=[g/h]'_t/[p/h]'=c_2\cdot\bar{h}/h^2/c_1\cdot\bar{h}/h_2\equiv c_2/c_1$，即原曲线 r 是斜率为常数 c_2/c_1 的直线段。

(ii)当 $\max(\deg(f),\deg(g))=1$ 时，此时 $\deg(\bar{h})=0$，所以$\exists$ 常数 c_0，使 f、g 互素，且是线性多项式，由引理5，$\{f^2,2fg,g^2\}$恰构成 p^2 的一组基。因此，$\forall$ p、g、h，$\exists$ 素数 p_0^*、p_1^*、p_2^*，g_0^*、g_1^*、g_2^*、h_0^*、h_1^*、h_2^*，使
$$\begin{cases}p(t) = p_0^* f^2 + 2p_1^* fg + p_2^* g^2,\\ q(t) = g_0^* f^2 + 2g^* fg + g_2^* g^2,\\ h(t) = h_0^* f^2 + 2h_1^* fg + h_2^* g^2,\end{cases}$$

令 $s=f/g$，
$$\begin{cases}p^*(s) = p_0^* s^2 + 2p_1^* s + p_2^*,\\ q^*(s) = g_0^* s^2 + 2q_1^* s + g_2^*,\\ h^*(s) = h_0^* s^2 + 2h_1^* s + h_2^*,\end{cases}$$

则 $p(t)=g^2(t)p^*(s)$，$q(t)=g^2(t)q^*(s)$，$h(t)=g^2(t)h^*(s)$，

所以
$$\begin{cases}[p(t)/h(t)]'_t = [p^*(s)/h^*(s)]'_s\cdot\dfrac{ds}{dt} = c_0\cdot\dfrac{s^2-1}{h^*(s)}\cdot\dfrac{1}{g^2},\\[2ex] [q(t)/h(t)]'_t = [q^*(s)/h^*(s)]'_s\cdot\dfrac{ds}{dt} = c_0\cdot\dfrac{2s}{h^*(s)}\cdot\dfrac{1}{g^2}.\end{cases}$$

$\frac{ds}{dt}=\frac{f'g-g'f}{g^2}$. 因 f，g 是线性多项式，则易证 $f'g-g'f\equiv c_1\neq 0$，所以
$$\begin{cases}[p^*(s)/h^*(s)]'_s = \dfrac{c_0}{c_1}\cdot\dfrac{s^2-1}{h^*(s)},\\[2ex] [q^*(s)/h^*(s)]'_s = \dfrac{c_0}{c_1}\cdot\dfrac{2s}{h^*(s)}.\end{cases}$$

$\exists$ 常数 A_1、A_2 使
$$\begin{cases}p^*(s) = h^*(s)[\dfrac{c_0}{c_1}\cdot\displaystyle\int_0^s \dfrac{s^2-1}{h^*(s)}ds + A_1],\\[2ex] q^*(s) = h^*(s)[\dfrac{c_0}{c_1}\cdot\displaystyle\int_0^s \dfrac{2s}{h^*(s)}ds + A_2],\end{cases}$$

因为 p^*、q^* 是两次多项式，故

$$\begin{cases}[h^*(s)\int_0^s(s^2-1)/h^{*2}(s)ds]^{(*)}\equiv 0,\\ [h^*(s)\int_0^s 2s/h^{*2}(s)ds]^{(*)}\equiv 0.\end{cases}$$

由引理 6，当且仅当 $h_0=h_2\neq 0, h_1=0$，这样

$$\begin{cases}[p^*(s)/h^*(s)]'=\dfrac{c_0}{c_1\cdot h_0}\cdot\dfrac{s^2-1}{(s^2+1)},\\ [q^*(s)/h^*(s)]'=\dfrac{c_0}{c_1\cdot h_0}\cdot\dfrac{2s}{s^2+1},\end{cases}$$

两边对积分，可得

$$\begin{cases}p^*(s)/h^*(s)=\dfrac{c_0}{2c_1\cdot h_0}\cdot\dfrac{2s}{s^2+1}+A_1,\\ q^*(s)/h^*(s)=\dfrac{c_0}{2c_1\cdot h_0}\cdot\dfrac{s^2-1}{s^2+1}+A_2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}p(t)/h(t)=p^*(s)/h^*(s)=\dfrac{c_0}{2c_1\cdot h_0}\cdot\dfrac{2s}{s^2+1}+A_1,\\ q(t)/h(t)=q^*(s)/h^*(s)=\dfrac{c_0}{2c_1\cdot h_0}\cdot\dfrac{s^2-1}{s^2+1}+A_2,\end{cases}$$

所以 $(p(t)/h(t)-A_1)^2+(g(t)/h(t)-A_2)^2\equiv(c_0/2c_1\cdot h_0)^2$，即，原曲线是以 (A_1,A_2) 为圆心、半径为 $c_0/2c_1\cdot h_0$ 的圆弧段. 至此，我们证明了参数二次有理曲线的等距曲线可参数有理化，则其必为直线段或圆弧段，此结论恰与定理 2 互为逆命题. 证毕.

第二个结论是：

定理 3　非直线段且具有拐点的参数四次多项式曲线的等距曲线必不可参数有理化.

证明　由假设和定理 1 推论，可知原曲线 $r=\{(p(t),q(t))|t\in I\}$ 可表为

$$\begin{cases}p'(t)=(f^2(t)-g^2(t))h^*(t), & (7)\\ q'(t)=2f(t)g(t))h^*(t), & (8)\end{cases}$$

其中，f、g 互素，h^* 为非负多项式.

直接计算可得：

$$(r'\times r'')=(f^2+g^2)h^{*2}(f'g-g'f),$$

由式(7)和(8)及假设 p、q 是四次多项式，知

$$\begin{cases}\deg(f^2-g^2)+\deg(h^*)\leqslant 3,\\ \deg(2fg)+\deg(h^*)\leqslant 3,\end{cases}$$

所以 $\max(\deg(f^2-g^2),\deg(2fg))+\deg(h^*)\leqslant 3$，由引理 4 知 $2\max(\deg(f),\deg(g))+\deg(h^*)\leqslant 3$，所以 $\max(\deg(f),\deg(g))\leqslant 1$，故∃常数 c_0 使 $f'g-g'f\equiv c_0\neq 0$，所以 $(r'\times r'')=(f^2+g^2)h^{*2}-c_0$. 即原曲线的曲率符号与 c_0 相同，恒不改变，当然无拐点. 因此非直线段且有拐点的参数四次多项式曲线的等距曲线必不可参数有理化. 证毕.

3　结论

等距曲线不可参数有理化的严重事实，已全打破了原计划把等距运算寓于仅具有参数有

理曲线(面)构造功能的体素造形系统的幻想. 因此,唯有进一步将现有体素造形系统的基准曲线(面)——自由曲线(面),扩展至等距运算不变的子空间,才可准确支持等距运算,从而也将极大地拓广系统的体素表示范围. 本文对此已着手进行等距曲线可隐含代数方程精确表示的证明工作.

参　考　文　献

〔1〕 Klass, R., *Comput. — Aid Des.*, 15, 3(1983), 297—299.

〔2〕 Taiwo, O., *INt. J. control*, 43, (1986), 671—678.

〔3〕 Loney, G. C., *Comput. — Aid Des.*, 19, 2(1987), 85—90.

〔4〕 Tiller, W., and Hanson, E. G., *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 4, 9(1984), 36—46.

〔5〕 Rossignac, J. R., and Rechicha, A. A. G., *Comput. — Aid Geom. Des.*, 3, 2(1986), 268—324.

Isometric Operation Cannot Have Precise Representation in Existing Modelling System of Body Surface

Chen Sixiong

(*Department of Management Information Science*)

Abstract　The author proves that the equidistant curves of two sorts of conventional free curves cannot have rational parametric representations. It is also unequivocally pointed out that the isometric operation cannot be precisely represented even if in a body surface modelling system which has the function of free curve modelling.

Key words　computer aided design, free curve, isometric operation