第13卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 13 No. 3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年7月 (NATURAL SCIENCE) Jul. 1992

# 重调和方程的一种非协调有限元解法*

黄 胜 好

(管理信息科学系)

**摘要** 本文给出处理非零边值的重调和方程的一种非协调有限元法，证明其为收敛且精度、条件数皆与协调元相同；应用于具体构造一个十自由度的三角形单元，并给出误差估计.

**关键词** 重调和方程，有限元，收敛，精度

## 0 引言

用有限元求解高阶椭圆型方程、至今仍未很好解决，其困难在于协调元所需的插值多项式的次数太高，计算量及存储量均不合算，因此迫使人们采用非协调方法. 在处理非零边值的重调和方程问题，杂交法受到限制（由于能量表达式没能含有位移函数的所有二阶导数平方的积分）；罚函数法[3]虽能保证其收敛，但精度差（误差阶只及协调元的一半），其代数方程组的条件也不好.

本文结合杂交法及罚函数法的优点. 与文〔1〕不同，在每一单元内采用三套变量，两套位移变量，一套应力变量，利用杂交法及罚函数法把三者联系起来. 在最一般的形式下（对单元形状的限制与协调元一样，不需满足任何的协调性条件），证明其误差阶及条件数均与协调元相同，也就是说是最优的。最后应用此方法具体构造一种十自由度的任意三角形单元（每个顶点给三个自由度——函数值及其一阶偏导数，单元的重心给一个函数值），并给出能量模及 $H^1$ 模估计. 这种单元也容易推广到三角形壳体单元上，且具有同样的精度.

## 1 变分公式

考虑

* 本文 1989-10-25 收到.

$$
\begin{cases}
\Delta^2 u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 上}, \\
u = P_0, & \text{在 } \Gamma \text{ 上}, \\
\partial u/\partial n = P_1, & \text{在 } \Gamma \text{ 上},
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中 $f$ 为定义在 $\Omega$ 上的外力，$P_0$、$P_1$ 均为给定的边界位移值。并假定 $\Omega$ 为凸的多角域，$\Gamma$ 为 $\Omega$ 的边界.

假定剖分为一致正则的，且其步长不超过 $h$，用 $\Omega_e$ 表示任一单元. $u$ 和 $\sigma$ 是定义在所有单元 $\Omega_e$ 上的函数，$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)^T$ 是定义在所有单元 $\Omega_e$ 上的二维列向量函数. 现先定义两个 Hilbert 空间 $H_1$ 和 $H_2$ 及其它们的范数. $\widetilde{H}_1=S_1\times S_2$，其中，$S_1=\{u|u\in H^1(\Omega)$，且 $u\in H^2(\Omega_e)$，$\forall\ \Omega_e\}$，$S_2=\{\lambda|\lambda_i\in H^1(\Omega), i=1,2\}$. $H_1=\{(u,\lambda)|(u,\lambda)\in\widetilde{H}_1, u|_\Gamma=\lambda|_\Gamma=0\}$，$H_2=\{\sigma|\sigma\in H^1(\Omega_e)$，$\forall\ \Omega_e$，且 $\sigma\in H^0(\Omega)\}$.

其模定义如下：

$$
\|(u,\lambda)\|_{H_1}^2 = \sum_e \{(\Delta u,\Delta u)\Omega_e + (\Delta u-\lambda_{j,j},\Delta u-\lambda_{j,j})\Omega_e + K|\Omega_e|^{-1}(u_{1j}-\lambda_j,u_{1j}-\lambda_j)\Omega_e\},
$$

$$
|\sigma|H_2 = \sum_e \{(\sigma,\sigma)\Omega_e + K^{-1}|\Omega_e|(\sigma_{1j},\sigma_{1j})\Omega_e\}.
$$

式中，$K$ 可以取定任一正常数，$|\Omega_e|$ 为 $\Omega_e$ 的面积. 令

$$
\begin{aligned}
J_{\Omega_e}(u,\lambda,\sigma) = {} & \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}(\Delta u,\Delta u)\Omega_e + (\sigma,\Delta u)\Omega_e - \frac{1}{2}(\sigma,\sigma)\Omega_e\Big] \\
& - (\sigma,\Delta u-\lambda_{j,j})\Omega_e - (\sigma_{1j},u_{1j}-\lambda_j)\Omega_e \\
& + \frac{1}{2}K|\Omega_e|^{-1}(u_{1j}-\lambda_j,u_{1j}-\lambda_j)\Omega_e - (f,u)\Omega_e,
\end{aligned}
$$

$$
J(u,\lambda,\sigma) = \sum_e J_{\Omega_e}(u,\lambda,\sigma).
$$

在 $H_1\times H_1$，$H_1\times H_2$，$H_2\times H_2$ 上定义双线性泛函.

$$
a(u,\lambda;v,\mu) = \sum_e \Big[\frac{1}{2}(\Delta u,\Delta v)\Omega_e + K|\Omega_e|^{-1}(u_{1j}-\lambda_j,v_{1j}-\mu_j)\Omega_e\Big],
$$

$$
b(u,\lambda,\sigma) = \sum_e \Big[\frac{1}{2}(\sigma,\Delta u)\Omega_e - (\sigma,\Delta u-\lambda_{j,j})\Omega_e - (\sigma_{1j},u_{1j}-\lambda_j)\Omega_e\Big],
$$

$$
c(\sigma,\varphi) = \sum_e \frac{1}{2}(\sigma,\varphi)\Omega_e,
$$

那么

$$
J(u,\lambda,\sigma) = \frac{1}{2}a(u,\lambda;u,\lambda) + b(u,\lambda,\sigma) - \frac{1}{2}c(\sigma,\sigma) - (f,u)_\Omega, \tag{2}
$$

其允许集 $H_r=\{(u,\lambda,\sigma)|(u,\lambda)\in\widetilde{H}_1, \sigma\in H_2$，且 $u|_\tau=P_0, \lambda|_\tau=\widetilde{P}_1\}$，其中 $\widetilde{P}_1$ 由 $\tau$ 上的切向导数 $\partial P/\partial S$ 及法向导数 $P_1$ 决定.

求泛函(2)在 $H_r$ 上的稳定点问题等价于求解以下变分方程组

$$
\begin{cases}
a(u,\lambda;v,\mu) + b(v,\mu,\sigma) = (f,v)_\Omega, \\
c(\sigma,\varphi) - b(u,\lambda,\varphi) = 0, \\
\forall\ (v,\mu)\in H_1, \forall\ \varphi\in H_2.
\end{cases}
\tag{3}
$$

引理1　设 $u^*$(1)的解，在每一单元 $\Omega_e$ 上令 $\lambda^*=\nabla u^*$，$\sigma^*=\Delta u^*$，那么$(u^*,\lambda^*,\sigma^*)$一定是

泛函式(2)在 $H_t$ 上的稳定点,即 $(u^*,\lambda^*,\sigma^*)$ 一定满足变分方程组(3).

**证明** $\forall\ (v,\mu)\in H_1,\forall\ \varphi\in H_2$,在每个单元 $\Omega_e$ 上两次利用格林公式,有

$$(\Delta u^*,\mu_{j,j})_{\Omega_e}-(\Delta u^*_{1j},v_{1j}-\mu_j)_{\Omega_e}$$
$$=(\Delta^2u^*,v)_{\Omega_e}+\int_{\partial\Omega_e}\Delta u^*\mu_jn_jds-\int_{\partial\Omega_e}\Delta u^*_{1j}vn_jds.$$

再利用边界条件 $v|_\Gamma=0,\mu|_\Gamma=0$,可得

$$\sum_e\int_{\partial\Omega_e}\Delta u^*\mu_jn_jds=\int_\Gamma\Delta u^*\mu_jn_jds=0,$$
$$\sum_e\int_{\partial\Omega_e}\Delta u^*_{1j}vn_jds=\int_\Gamma\Delta u^*_{1j}vn_jds=0,$$

即可证得引理1.

为了得到有限元解,取逼近空间 $\tilde{S}_1^h\subset\tilde{H}_1,S_2^h\subset H_2$,且 $\tilde{S}_1^h,S_2^h$ 均为有限维空间.令

$$S_1^h=\{(u^h,\lambda^h)\,|\,(u^h,\lambda^h)\in\tilde{S}_1^h,u^h|_\Gamma=0,\lambda^h|_\Gamma=0\}$$
$$S_t^h=\{(u^h,\lambda^h,\sigma^h)\,|\,(u^h,\lambda^h)\in\tilde{S}_1^h,\text{且 }u^h|_\Gamma=P_0,\lambda^h|_\Gamma=\tilde{P}_1;\sigma^h\in S_2^h\},$$

那么以下引理自然成立.

引理2 若 $(u,\lambda,\sigma)$ 和 $(u^h,\lambda^h,\sigma^h)$ 分别为泛函式(2)在 $H_t$ 和 $S_t^h$ 上的稳定点,则它们均满足 $S_t^h$ 上的变分方程组.

## 2 误差估计与条件数

引理3 双线性泛函 $a,b,c$ 有以下(1),(2)两个性质.

(1)$a$ 和 $c$ 分别在 $S_1^h$ 和 $S_2^h$ 上满足椭圆型条件,即存在正常数 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 使得 $a(u,\lambda;u,\lambda)\geqslant\alpha_1\|(u,\lambda)\|^2_{H_1},\forall\ (u,\lambda)\in S_1^h,c(\sigma,\sigma)\geqslant\alpha_2|\sigma|^2_{H_2},\forall\ \sigma\in S_2^h$.

(2)$a,b,c$ 分别在 $H_1\times H_1,H_1\times H_2,H_2\times H_2$ 上满足有界性条件,即存在正常数 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 使得

$$\begin{cases}a(u,\lambda;v,\mu)\leqslant\beta_1\|(u,\lambda)\|_{H_1}\cdot\|(v,\mu)\|_{H_1},\\ \qquad\forall\ (u,\lambda),(v,\mu)\in H_1,\end{cases}$$
$$\begin{cases}b(u,\lambda,\sigma)\leqslant\beta_2\|(u,\lambda)\|_{H_1}\cdot|\sigma|_{H_2},\\ \qquad\forall\ (u,\lambda)\in H_1,\forall\ \sigma\in H_2,\end{cases}$$
$$\begin{cases}c(\sigma,\varphi)\leqslant\beta_3|\sigma|_{H_2}\cdot|\varphi|_{H_2},\\ \qquad\forall\ \sigma,\varphi\in H_2.\end{cases}$$

**证明** 先验证性质(1).$\forall\ (u,\lambda)\in S_1^h,\sigma\in S_2^h$,有以下两个逆估计不等式

$$(\Delta u-\lambda_{j,j},\Delta u-\lambda_{j,j})_{\Omega_e}\leqslant C_1|\Omega_e|^{-1}(u_{1j}-\lambda_j,u_{1j}-\lambda_j)_{\Omega_e},\tag{4}$$
$$(\sigma_{1j},\sigma_{1j})_{\Omega_e}\leqslant C_2|\Omega_e|^{-1}(\sigma,\sigma)_{\Omega_e}.\tag{5}$$

其中 $C_1,C_2$ 均为与 $\Omega_e$ 无关的常数.取 $\alpha_0=\max[2,(K+C_1)/K]$, $\alpha_1=\alpha_0^{-1},\alpha_2=\frac{1}{2}(1+K^{-1}C_2)$,利用不等式(4)和(5),即证得性质(1).

多次利用 Cauchy-Schwarz 不等式,可得

$$a(u,\lambda;v,\mu)\leqslant\sum_e[(\Delta u,\Delta u)_{\Omega_e}^{1/2}\cdot(\Delta v,\Delta v)_{\Omega_e}^{1/2}$$
$$+K|\Omega_e|^{-1}(u_{1j}-\lambda_j,u_{1j}-\lambda_j)_{\Omega_e}^{1/2}\cdot(v_{1j}-\mu_j,v_{1j}-\mu_j)_{\Omega_e}^{1/2}]$$
$$\leqslant\sum_e[(\Delta v,\Delta v)_{\Omega_e}+K|\Omega_e|^{-1}(v_{1j}-\mu_j,v_{1j}-\mu_j)_{\Omega_e}]^{1/2}$$
$$\cdot[(\Delta u,\Delta u)_{\Omega_e}+K|\Omega_e|^{-1}(u_{1j}-\lambda_j,u_{1j}-\lambda_j)_{\Omega_e}]^{1/2}$$
$$\leqslant\|(u,\lambda)\|_{H_1}\cdot\|(v,\mu)\|_{H_1}.$$

同理可推得 $b(u,\lambda,\sigma)\leqslant\|u,\lambda)\|_{H_1}\cdot|\sigma|_{H_2}$，$C(\sigma,\varphi)\leqslant|\sigma|_{H_2}\cdot|\varphi|_{H_2}$两个不等式.

引理3证毕.

由引理3，可得到下述定理(证明见文[1]中的定理5).

**定理1**　泛函 $J(u,\lambda,\sigma)$ 在 $S_1^h$ 上有唯一的稳定点 $(u^h,\lambda^h,\sigma^h)$，且对任意 $(\tilde{u},\tilde{\lambda},\tilde{\sigma})\in S_1^h$，成立

$$\|(u^h-u,\lambda^h-\lambda)\|_{H_1}+|\sigma^h-\sigma|_{H_2}$$
$$\leqslant C\{\|(\tilde{u}-u,\tilde{\lambda}-\lambda\|_{H_1}+|\tilde{\sigma}-\sigma|_{H_2}\},$$

其中 $C$ 为常数，$(u,\lambda,\sigma)$ 为真解.

**定理2**　设真解 $u\in H^{k_0}(\Omega)$，在每一单元 $\Omega_e$ 上，$\tilde{u}$ 和 $\tilde{\lambda}$ 分别采用 $k_1$ 阶和 $k_2$ 阶插值多项式，而 $\tilde{\sigma}$ 采用 $k_3$ 阶插值多项式，则有能量模估计

$$\|(u^h-u,\lambda^h-\lambda)\|_{H_1}+|\sigma^h-\sigma|_{H_2}\leqslant C'h^l\|u\|_{k_0,\Omega},$$

其中 $C'$ 为常数，$l=\min(k_0-2,k_1-1,k_2,k_3+1)$.

**证明**　据有限元空间的插值理论，以下三个不等式成立

$$(\Delta\tilde{u}-\Delta u,\Delta\tilde{u}-\Delta u)_{\Omega_e}\leqslant|\tilde{u}-u|_{2,\Omega_e}^2\leqslant c_1|\Omega_e|^{\alpha_1}\|u\|_{k_0,\Omega_e}^2,\tag{6}$$

$$(\tilde{u}_{\cdot j}-\tilde{\lambda}_j,\tilde{u}_{\cdot j}-\tilde{\lambda}_j)_{\Omega_e}\leqslant 2(\tilde{\lambda}_j-\Delta u,\tilde{\lambda}_j-\Delta u)_{\Omega_e}+2(\tilde{u}_{1j}-\Delta u,\tilde{u}_{1j}-\Delta u)_{\Omega_e}$$
$$\leqslant c_2|\Omega_e|^{\alpha_2}\|u\|_{k_0,\Omega_e}^2,\tag{7}$$

$$(\tilde{\sigma}-\sigma,\tilde{\sigma}-\sigma)_{\Omega_e}\leqslant c_3|\Omega_e|^{\alpha_3}\|u\|_{k_0,\Omega_e}^2.\tag{8}$$

其中，$c_1,c_2,c_3$ 均为常数，$\alpha_1=\min(k_0-2,k_1-1)$，$\alpha_2=\min(k_0-1,k_1,k_2+1)$，$\alpha_3=\min(k_0-2,k_3+1)$. 再利用有限元空间的逆估计不等式(4)，易得

$$\|\tilde{u}-u,\tilde{\lambda}-\lambda\|_{H_1}+|\tilde{\sigma}-\sigma|_{H_2}\leqslant Ch^l\|u\|_{k_0,\Omega},$$

其中 $c$ 为常数，$l=\min(k_0-2,k_1-1,k_2,k_3+1)$. 再由定理1，即证明了定理2.

据文[1]中的定理6及本文定理2，立即得到以下 $l_2$ 模估计定理.

**定理3**　设真解 $u\in H^{k_0}(\Omega)$，在每一单元 $\Omega_e$ 上，$\tilde{u},\tilde{\lambda},\tilde{\sigma}$ 分别采用 $k_1$ 阶、$k_2$ 阶、$k_3$ 阶插值多项式，那么 $\|u^h-u\|_{0,\Omega}\leqslant c_0h^{2l}\|u\|_{k_0,\Omega}$，其中 $c_0$ 为常数，$l$ 的定义与上面相同.

为了估计条件数. 假定 $p_0=p_1=0$(条件数的估计与给定的边值无关).

**定理4**　假定在每一单元 $\Omega_e$ 上，$\lambda_j^h$ 取做 $u_{1j}^h$ 的插值函数，那么对任意 $(u^h,\lambda^h)\in S_1^h$，$\mathrm{cond}(\max\limits_{\sigma^h\in S_2^h}J(u^h,\lambda^h,\sigma^h))\leqslant ch^{-4}$.

**证明**　利用有限元空间的逆估计，易得

$$\|u^h,\lambda^h)\|_{H_1}\leqslant ch^{-4}\sum_e(u^h,u^h)_{\Omega_e}.\tag{9}$$

另一方面，要证明

$$\sum_{e}(u^h,u^h)_{\Omega_e} \leqslant c' \| u^h,\lambda^h) \|^2_{H_1}. \tag{10}$$

其中 $c,c'$ 均为常数. 考虑

$$\begin{cases}\Delta^2\omega = u^h, & \text{在 } \Omega \text{ 上},\\ \omega = 0, & \text{在 } \Gamma \text{ 上},\\ \partial\omega/\partial n = 0, & \text{在 } \Gamma \text{ 上}.\end{cases} \tag{11}$$

设 $\omega^*$ 为式(11)的解,在每一单元 $\Omega_e$ 上,令 $\lambda^* = \nabla\omega^*$, $\sigma^* = \Delta\omega^*$. 则 $(\omega^*,\lambda^*,\sigma^*)$ 满足方程组

$$\begin{cases}a(\omega^*,\lambda^*;v,\mu) + b(v,\mu,\sigma^*) = (u^h,v)_\Omega,\\ c(\sigma^*,\varphi) - b(u^*,\lambda^*,\varphi) = 0.\end{cases}$$

特取 $v=u^h, u=\lambda^h$,则

$$\begin{aligned}(u^h,u^h)_\Omega &= a(\omega^*,\lambda^*;u^h,\lambda^h) + b(u^h,\lambda^h,\sigma^*)\\ &\leqslant \|(\omega^*,\lambda^*)\|_{H_1}\cdot\|(u^h,\lambda^h)\|_{H_1} + 2\|(u^h,\lambda^h)\|_{H_1}\cdot|\sigma^*|_{H_2}\\ &\leqslant 2\|(u^h,\lambda^h)\|_{H_1}\cdot\{\|(\omega^*,\lambda^*)\|_{H_1} + |\sigma^*|_{H_2}\}.\end{aligned}$$

假定 $\Omega$ 为凸的多角域,据微分方程中的理论知 $\omega^*\in H^3(\Omega)$,且 $\|\omega^*\|_{3,\Omega}\leqslant c\|u^h\|_{0,\Omega}$,可推得式(10)成立. 综合式(9)与(10),即有 $\mathrm{cond}(\|u^h,\lambda^h)\|^2_{H_1} = 0(h^{-4})$,
再据文[1]中的定理 7,可证得定理 4.

## 3 一个特殊单元

在每个 $\Omega_e$ 上,位移函数 $u(x_1,x_2)$ 取为十个自由度的完全三次插值多项式.

$$\begin{aligned}u(x_1,x_2) &= a_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + 2c_{12}x_1x_2\\ &\quad + d_1x_1^3 + d_2x_2^3 + d_{12}x_1^2x_2 + d_{21}x_1x_2^2.\end{aligned}$$

单元 $\Omega_e$ 的每个顶点给三个自由度 $(u,\partial u/\partial x_1,\partial u/\partial x_2)$. 且在 $\Omega_e$ 的重心上,给一个自由度 $(u)$.

在每个单元 $\Omega_e$ 上,取 $\lambda_j$ 为三自由度的线性插值函数,三角形的每个顶点给一个自由度 $(\partial u/\partial x_j, j=1,2)$;而应力函数 $\sigma$ 在每单元 $\Omega_e$ 上取为常数. 若 $(u,\lambda,\sigma)$ 的插值函数空间按以上办法构造,那么会得到这样的事实:这里的 $\lambda_j$ 不是独立变量,因此泛函 $J(u,\lambda,\sigma)$ 实质上可看作是有两个变量 $(u,\sigma)$. 相应取真解空间 $\hat{H}_1: u\in H^2(\Omega)$,在每一 $\Omega_e$ 上,取 $\lambda_j = \partial u/\partial x_j (j=1,2)$;$\hat{H}_2$ 与往前定义的 $H_2$ 一样,那么 $S_1^h \not\subset \hat{H}_1$, $S_2^h \subset \hat{H}_2$. 在有限元空间 $S_1^h$ 中,$\lambda_j^h$ 是有在顶点上与 $\nabla u_j$ 相等. 令 $\hat{H}_1 = S_1^h \oplus \hat{H}_1$,其中"$\oplus$"表示直接和.

应该注意到,$S_1^h$ 和 $\hat{H}_1$ 都是往前定义的 $H_1$ 的子空间,故 $\hat{H}_1\subset H_1$,并可得到类似于往前的结论:真解 $(u,\lambda,\sigma)$ 仍一样满足泛函 $J(u,\lambda,\sigma)$ 在 $S^h$ 上的变分方程;$a,c$ 分别在 $S_1^h, S_2^h$ 上满足椭圆型条件;$a,b,c$ 分别在 $\hat{H}_1\times\hat{H}_1$, $\hat{H}_1\times H_2$, $H_2\times H_2$ 上满足有界性条件.

由定理 1 及定理 2,立即有以下推论 1,2.

**推论 1** $J(u,\lambda,\sigma)$ 在 $S^h$ 上的稳定点 $(u^h,\lambda^h,\sigma^h)$ 存在唯一,且有估计 $\|(u^h-u,\lambda^h-\lambda)\|_{H_1} + |\sigma^h-\sigma|_{H_2}\leqslant ch\|u\|_{3,\Omega}$,其中 $c$ 为常数.

设 $f\in H^{-1}(\Omega)$,在 $H_0^2(\Omega)H^0(\Omega)$ 上求解

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\Delta\omega,\Delta v) + \dfrac{1}{2}(z,\Delta v)_\Omega = (f,v)_\Omega,\\ (\Delta\omega,\varphi)_\Omega - (z,\varphi)_\Omega = 0,\\ \forall\, v\in H_0^2(\Omega), \forall\,\varphi\in H^0(\Omega),\end{cases} \tag{12}$$

由微分方程中的理论知：式(12)存在唯一解$(\omega,2)$，在每一$\Omega_e$上，取$q_i=\partial\omega/\partial x_i(i=1,2)$. 则$(\omega,q,z)$满足.

$$\begin{cases} a(\omega,q;v,\mu)+b(v,\mu,z)=(f,v)_\Omega, \\ c(z,\varphi)-b(\omega,q;\varphi)=0, \\ \forall\ (v,\mu)\in \dot{H}_1,\forall\ \varphi\in H_2, \end{cases}$$

从而文[1]中定理6的估计或(3、11)仍成立. 即可推出$(f,u^h-u)_\Omega\leqslant c'h^2\|u\|_{3,\Omega}\cdot\|f\|_{-1,\Omega}$，其中$c'$为常数.

推论2　$\|u-u^h\|_{1,\Omega}\leqslant c'h^2\|u\|_{3,\Omega}$.

证明　$\|u-u^h\|_{1,\Omega}=\sup\limits_{f\in u^{-1}(\Omega)}(f,u-u^h)/\|f\|_{-1,\Omega}\cdot\leqslant c'h^2\|u\|_{3,\Omega}$.

推论2得证.

为了计算单刚，求$\max\limits_{\sigma\in s_2^e}J_{\Omega_e}(u,\lambda,\sigma)$得到

$$\sigma=\iint\limits_{\Omega_e}(2\lambda_{j,j}-\Delta u)dx_1dx_2/|\Omega_e|.$$

现把所求得的$\sigma$代回$J_{\Omega_e}$的表达式，则得

$$J_{\Omega_e}(u,\lambda,\sigma)=\frac{1}{4}(\Delta u,\Delta u)_{\Omega_e}+\frac{1}{4}|\Omega|^{-1}\{\iint\limits_{\Omega_e}(2\lambda_{j,j}-\Delta u)dx\}^2$$

$$+\frac{1}{2}k|\Omega_e|^{-1}(u_{1j}-\lambda_j,u_{1j}-\lambda_j)_{\Omega_e}-(f,u)_{\Omega_e}, \tag{13}$$

其中$\lambda_j$取为$u_{1j}$的线性插值多项式$(j=1,2)$.

结论从插式(13)看出，单刚$J_{\Omega_e}$的计算是简单的. 可见，旧的十自由度的三角形单元一般是不收敛的，而新的三角形单元是收剑的，并且如果$\Omega$区域为凸多角域时，则其收敛阶是不可改进的，即与五次多项式的协调元有相同的收敛阶.

本文在梁国平老师的指导下完成，特此表示衷心感谢.

## 参　考　文　献


〔1〕梁国平、傅子智，混合杂交罚函数有限元方法及其应用，应用数学与力学 5,3(1984).

〔2〕Babuska, I. and zl'aml, M., *SIAM J. Numer. Anal.*, 10, 5(1973).

〔3〕Fix, G. J., Liang, G. and Lee, D. N., *Comp. & Maths. with Appls.*, 8, 5(1982), 393-349.

〔4〕Brezzi, F., *RAIRO Numer. Anal.*, 8R2(1974).

〔5〕Ciarlet, P. G., *The Finite Element Method for Elliptic problems*, North Holland Publisher, (1979).

# A Nonconforming Finite Element Solution of the Biharmonic Equation

Huang Shenghao

(*Department of Management Information Science*)

**Abstract** A nonconforming finite element method is given for handling of biharmonic equation with non - zero boundary value . This new method is prived to be convergent , and identical with conforming element in accuracy and conldition number. A triangular element with ten degrees of freedom is specifically constructed by applying this method and its error estimate is given.

**Key words** biharmonic equation, finite, element, convergence, precision