第13卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 13 No. 3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年7月 (NATURAL SCIENCE) Jul. 1992

关于 H. Silverman 猜想的反例*

黄 心 中

(管理信息科学系)

摘要 H. Silverman 考虑了 Szegö 定理的一般情形，提出下列猜想：设 $f(z)$ 是单位圆 $U=\{|z|<1\}$ 内的解析、单叶凸函数，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $f(z)$ 在 $z=0$ 的 Talor 展式的系数序列，$a_0=0, a_1=1$，若 $\{a_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ 是 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的任一子序列（有限或无限），则由 $\{a_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ 所组成的 Talor 展式在 $\{|z|<\frac{1}{4}\}$ 内为凸像，在 $\{|z|<\frac{1}{2}\}$ 内为星像. 本文指出该猜想不成立.

关键词 星像函数，凸像函数，系数序列

0 引言

记 S^* 为在单位圆 $\{|z|<1\}$ 内的解析，具有 Talor 展式 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ 且星像的函数全体. k 是 S^* 中凸函数的子集. Goodman 和 Schoenbery[1] 简洁地证明了下列 Szegö[2] 定理.

定理 A 设 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in k$，则 $f_n(z)=z+\sum_{k=2}^{n}a_kz^k$ 在 $|z|<\frac{1}{4}$ 内为凸的，其中 $\frac{1}{4}$ 不能易以更大的数且对一切 n 成立.

H. Silverman[3] 又证明了

定理 B 设 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in k$，则 $f_n(z)=z+\sum_{k=2}^{n}a_kz^k$ 在 $|z|<(\frac{1}{2n})^{\frac{1}{n}}$ 内为星像.

特别地，他得到了

推论 A 设 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in k$. 则 $f_n(z)=z+\sum_{k=2}^{n}a_kz^k$ 在 $|z|<\frac{1}{2}$ 内为星像.

介于上述两定理，H. Silverman 考虑 Szegö 定理的一般情形，提出下列猜想[3]：设 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in k$，设 $\{a_{n_j}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任一子序列（有限或无限）则 $f_j(z)=z+\sum_{j=1}^{\infty}a_{n_j}z^{n_j}$ 在 $|z|<\frac{1}{4}$ 内为凸

* 本文 1990-10-11 收到.

像，在$|z|<\frac{1}{2}$内为星像.

本文将找出反例指出无论$\{a_{n_j}\}$是$\{a_n\}$有限或无限子序例，H. Silverman 的猜想都不真.

1 具体的例子

取$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}z^k\in k$，$g(z)=z+\sum_{j=1}^{\infty}z^{2j}$，这时$a_n=1$，$n=2,3,\cdots$，$a_{n_j}=a_{2j}$，$j=1,2,3,\cdots$. 有

$$1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}=1+\frac{z\sum_{k=1}^{\infty}2k(2k-1)z^{2k-2}}{1+\sum_{k=1}^{\infty}2kz^{2k-1}}=\frac{1+\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^2z^{2k-1}}{1+\sum_{k=1}^{\infty}2kz^{2k-1}}$$

$$=\frac{1+4z\dfrac{1+z^2}{(1-z^2)^3}}{1+\dfrac{2z}{(1-z^2)^2}}. \tag{1}$$

在式(1)中取$z=-0.2095$，有

$$1+\frac{zg''(z)}{g'(z)}\bigg|_{z=-0.2095}=-1.5974\times10^{-3}<0.$$

所以$g(z)=z+\sum_{j=1}^{\infty}z^{2j}$不能在$|z|<0.2095$内为凸像. 类似地

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}=\frac{1+\sum_{j=1}^{\infty}2jz^{2j-1}}{1+\sum_{j=1}^{\infty}z^{2j-1}}=\frac{1+\dfrac{2z}{(1-z^2)^2}}{1+\dfrac{z}{1-z^2}}, \tag{2}$$

若在式(2)中取$z=-0.3718$，则有$\frac{zg'(z)}{g(z)}\Big|=-2.277\times10^{-3}<0$，所以$g(z)=z+\sum_{j=1}^{\infty}z^{2j}$不能在$|z|<0.3718$内为星像。

在有限的情形，例子如下

$f(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}z^k\in k$，$g(z)=z+z^2+z^4$. 在这情形下，容易证明$g(z)=z+z^2+z^4$不能在$|z|<0.212$内为凸像，在$|z|<0.386$为星像.

以上例子说明 H. Silverman 的上述猜想不真.

参 考 文 献

〔1〕 Goodman, A. W. & Schoenbery, I. J., *J. Analyse Math.*, 44(1984/85), 200—204.

〔2〕 Szegö, G., *Math. Ann.*, 100(1928), 188—211.

〔3〕 Silverman, H., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 104(1988), 1191—1196.

Counter Examples to H. Silverman's Conjecture

Huang Xinzhong

(*Department of Management Information Science*)

Abstract Taking account of the generality of Szegö theorem, H. Silverman put forward the following conjecture: Suppose the function f(z) is analytic, univalent and convex in the unit disk $U=\{|z|<1\}$; $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ is the coefficient sequence of Talor expansion of f(z) at $Z=0$, $a_0=0$, $a_1=1$; and $\{a_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ is any finite or infinite subsequence of $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, then the Talor expansion composed by $\{a_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ is convex in $\{|z|<\frac{1}{4}\}$ and starlike in $\{|z|<\frac{1}{2}\}$. The author points out the inconsistency of H. Silverman's conjecture by giving two counter examples.

Key words starlike function, convex function, coefficient sequence