第 13 卷 第 3 期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 13 №. 3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992 年 7 月 (NATURAL SCIENCE) Jul. 1992

关于 $L_{r,\omega}$ 的敛散性定理*

蔡 火 萤

（管理信息科学系）

摘要 本文讨论了非负 Jacobi 矩阵 $\bar{B}$ 和 AOR 矩阵 $L_{r,\omega}(1\leqslant\omega\leqslant r<2)$，证明了它们同时敛散，揭示了 $\rho(\bar{B})$ 和 $\rho(L_{r,\omega})$ 之间的关系，并给出了估计谱半径 $\rho(L_{r,\omega})$ 的上下界的两组不等式。

关键词 收敛，发散，谱半径

0 引言

Jacobi，Gauss-Seidel，SOR 和 AOR 都是求解线性代数方程组：$x=Bx+C$ 的迭代法。关于这些迭代法的比较定理，最早是由 Stein 和 Rosenberg 给出的，他们在 1948 年分别得到：Jacobi 迭代矩阵 $B\geqslant 0$ 的谱半径 $\rho(B)$ 与 Gauss-Seidel 迭代矩阵 L_1 的谱半径 $\rho(L_1)$ 之间的关系，称之为 Stein-Rosenberg 定理[1]. 1980 年，王新民给出 Jacobi 迭代矩阵 B 的谱半径 $\rho(B)$ 与 SOR 迭代矩阵 $L_\omega(0<\omega\leqslant 1)$ 的谱半径 $\rho(L_\omega)$ 之间的关系式，并将 Stein-Rosenberg 定理作为它的特例[2]. 1983 年，阵培贤给出了 Jacobi 迭代矩阵 B 的谱半径 $\rho(B)$ 与 AOR 迭代矩阵 $L_{r,\omega}(0\leqslant r<\omega\leqslant 1)$ 的谱半径 $\rho(L_{r,\omega})$ 之间的关系，进一步推广了这些比较定理[3]. 本文讨论了 Jacobi 迭代矩阵 $B=L-u$，$L\geqslant 0,u\geqslant 0$ 的绝对值矩阵 $\bar{B}=L+u$ 与 AOR 矩阵 $L_{r,\omega}(1\leqslant\omega\leqslant r<2)$，证明了它们同时敛散，揭示了 $\rho(\bar{B})$ 与 $\rho(L_{r,\omega})$ 之间的关系，并给出了估计谱半径 $\rho(L_{r,\omega})$ 的上下界的两组不等式，得到另一类型的比较定理，当 $\omega=r$ 时，又得到 $\bar{B}$ 与 $L_\omega(1\leqslant\omega<2)$ 的相应比较定理.

1 定理证明

定理 1 设 $B=L-u(L\geqslant 0,u\geqslant 0$，分别上下严格三角阵)是一个 Jacobi 迭代矩阵，$L_{r,\omega}(1\leqslant\omega\leqslant r<2)$，是相应的 AOR 迭代矩阵，则有关系式

$$\rho\left(\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}L+u\right)=\frac{\lambda_{r,\omega}-\omega+1}{\omega},$$

* 本文 1990-01-09 收到.

其中 $\lambda_{r,\omega}=\rho(L_{r,\omega})$，$(1\leqslant\omega\leqslant r<2)$.

证明 $L_{r,\omega}=((I-rL)^{-1}[(1-\omega)I+(\omega-r)L-\omega u]=-(I-rL)^{-1}[(\omega-1)I+(r-\omega)L+\omega u]\overset{记}{=}-\bar{L}_{r,\omega}$. 此时，$\bar{L}_{r,\omega}$是一个非负矩阵，且有 $\lambda_{r,\omega}=\rho(L_{r,\omega})=\rho(\bar{L}_{r,\omega})$，由于非负矩阵以自己的谱半径作为自己的一个特征值，且存在着相应的非负特征向量 $x\geqslant 0$[1]，即有关系式 $\bar{L}_{r,\omega}x=\lambda_{r,\omega}X$，或者$[(\omega-1)I+(r-\omega)L+\omega u]x=\lambda_{r,\omega}(I-rL)x$，由此可以推知

$$\left(\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}L+u\right)x=\frac{\lambda_{r,\omega}-\omega+1}{\omega}x.$$

因为$\left(\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}L+u\right)$是一个非负矩阵，所以有关系式 $\rho\left(\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}L+u\right)\geqslant\frac{\lambda_{r,\omega}-\omega+1}{\omega}$，记 $a=\rho\left(\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}L+u\right)$，即 $a\omega+\omega-1\geqslant\lambda_{r,\omega}\geqslant 0$. 因为非负矩阵以自己的谱半径为一个特征值，且存在非负的相应特征向量 $y\geqslant 0$。即

$$\left(\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}L+u\right)y=ay,$$

由此推知，$[(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)L+\omega u]y=a\omega y$，进而有$[(\omega-1)I+(r-\omega)L+\omega u]y=[(a\omega+\omega-1)I-\lambda_{r,\omega}rL]y$，若 $a\omega+\omega-1>0$，则有

$$[(\omega-1)I+(r-\omega)L+\omega u]y=(a\omega+\omega-1)\left(I-\frac{\lambda_{r,\omega}}{a\omega+\omega-1}\cdot r\cdot L\right)y,$$

由于 L 是一个严格下三角阵，所以矩阵$\left(I-\frac{\lambda_{r,\omega}}{a\omega+\omega-1}\cdot r\cdot L\right)$非奇异，于是有关系式

$$\left(I-\frac{\lambda_{r,\omega}}{a\omega+\omega-1}\cdot r\cdot L\right)^{-1}[(\omega-1)I+(r-\omega)L+\omega u]y=(a\omega+\omega-1)y,$$

记 $G=\left(I-\frac{\lambda_{r,\omega}}{a\omega+\omega-1}\cdot r\cdot L\right)^{-1}[(\omega-1)I+(r-\omega)L+\omega u]\geqslant 0$，可知 $\rho(G)\geqslant a\omega+\omega-1\geqslant\lambda_{r,\omega}=\rho(L_{r,\omega})=\rho(\bar{L}_{r,\omega})$. 由于 $a\omega+\omega-1\geqslant\lambda_{r,\omega}$，所以$\frac{\lambda_{r,\omega}}{a\omega+\omega-1}\leqslant 1$，$\bar{L}_{r,\omega}\geqslant G\geqslant 0$，于是有 $\rho(G)\leqslant\rho(\bar{L}_{r,\omega})$[1]. 这就证明了 $a\omega+\omega-1=\lambda_{r,\omega}$，从而有

$$\rho\left(\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}L+u\right)=\frac{\lambda_{r,\omega}-\omega+1}{\omega},$$

若 $a\omega+\omega-1=0$ 时，有 $a=0$，$\omega=1$，$\lambda_{r,\omega}=0$ 命题仍成立。

推论 若 $\omega=r$，则有

$$\rho(\lambda_\omega L+u)=\frac{\lambda_\omega-\omega+1}{\omega},$$

其中 $\lambda\omega=\rho(L_\omega)$，$1\leqslant\omega<2$，$L_\omega=(I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I-\omega u]=-(I-\omega L)^{-1}[(\omega-1)I+\omega u]$.

定理 2 在定理 1 的条件下，有：(a)$\lambda_{r,\omega}\geqslant\omega-1$；(b)若 $\lambda_{r,\omega}=\omega-1$，$r\neq 1\Rightarrow\rho(\bar{B})=0$，$\bar{B}=L+u$；(c)若 $\omega-1<\lambda_{r,\omega}<\frac{2\omega}{r}-1$，$r\neq 1\Rightarrow 0<\rho(\bar{B})<1$；(d)若 $\lambda_{r,\omega}=\frac{2\omega}{r}-1$，$\Rightarrow\rho(\bar{B})=\frac{2}{r}-1$；(e)若 $\lambda_{r,\omega}<\frac{2\omega}{r}-1$，$\Rightarrow\lambda_{r,\omega}-\omega+1\leqslant\omega\rho(\bar{B})$，$\lambda_{r,\omega}-\omega+1\geqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)\rho(\bar{B})$；(f)若 $\lambda_{r,\omega}>\frac{2\omega}{r}-1\Rightarrow\lambda_{r,\omega}-\omega+1)\geqslant\omega\rho(\bar{B})$，$\lambda_{r,\omega}-\omega+1\leqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)\rho(\bar{B})$.

证明 以下分别进行(a)－(f)的证明.

(a)由定理 1 知，$\lambda_{r,\omega}-\omega+1)\geqslant 0$，由此推知 $\lambda_{r,\omega}\geqslant\omega-1$.

(b)在关系式 $\rho\left(\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}L+u\right)=\frac{\lambda_{r,\omega}-\omega+1}{\omega}$，中，令 $\lambda_{r,\omega}=\omega-1$，可得 $0=\rho((r-1)L+u)=(r-1)\cdot\rho\left(L+\frac{1}{r-1}u\right)\geqslant(r-1)\rho(\bar{B})\geqslant 0$，即 $\rho(\bar{B})=0$。

(c)由定理1知

$$\frac{\lambda_{r,\omega}-\omega+1}{\omega}=\rho\left(\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}L+u\right)$$

$$\leqslant\rho\left[\frac{(\frac{2\omega}{r}-1)r+r-\omega}{\omega}L+u\right]=\rho(\bar{B}),$$

所以 $\omega\rho(\bar{B})\geqslant\lambda_{r,\omega}-\omega+1>\omega-1-\omega+1=0$，即 $\rho(\bar{B})>0$. 又因 $[\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega]/\omega>[(\omega-1)\cdot r+r-\omega]/\omega=r-1\geqslant 0$，且 $[\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega]/\omega<[(\frac{2\omega}{r}-1)\cdot r+r-\omega]/\omega=1$，所以 $0<\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}<1$，于是有

$$\frac{\lambda_{r,\omega}-\omega+1}{\omega}=\rho\left(\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}L+u\right)$$

$$=\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}\rho\left(L+\frac{\omega}{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}u\right)$$

$$\geqslant\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}\rho(\bar{B}),$$

所以 $\rho(\bar{B})\leqslant\frac{\lambda_{r,\omega}+1-\omega}{(\lambda_{r,\omega}+1)r-\omega}<1$，$(r\neq 1)$，即

$$0<\rho(\bar{B})<1.$$

(d)在关系式中，$\frac{\lambda_{r,\omega}-\omega+1}{\omega}=\rho\left(\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}L+u\right)$，令 $\lambda_{r,\omega}=\frac{2\omega}{r}-1$，可得

$$\rho(\bar{B})=\frac{(\frac{2\omega}{r}-1)-\omega+1}{\omega}=\frac{2}{r}-1.$$

(e)因有 $\frac{\lambda_{r,\omega}-\omega+1}{\omega}=\rho\left(\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}L+u\right)\leqslant\rho\left[\frac{(\frac{2\omega}{r}-1)r+r-\omega}{\omega}L+u\right]=\rho(\bar{B})$，

所以有 $\lambda_{r,\omega}-\omega+1\leqslant\omega\rho(\bar{B})$. 又因

$$\frac{\lambda_{r,\omega}-\omega+1}{\omega}=\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}\rho\left(L+\frac{\omega}{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}u\right)$$

$$\geqslant\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}\rho(\bar{B}),$$

故有 $\lambda_{r,\omega}-\omega+1\geqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)\rho(\bar{B})$.

(f)因 $\frac{\lambda_{r,\omega}-\omega+1}{\omega}=\rho\left(\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}L+u\right)\geqslant\rho(\bar{B})$，所以 $\lambda_{r,\omega}-\omega+1\geqslant\omega\rho(\bar{B})$. 又

$$\frac{\lambda_{r,\omega}-\omega+1}{\omega}=\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}\rho\left(L+\frac{\omega}{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}u\right)$$

$$\leqslant\frac{\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega}{\omega}\rho(\bar{B}),$$

所以 $\lambda_{r,\omega}-\omega+1\leqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)\rho(\bar{B})$.

推论 当 $r=\omega$ 时，有(a′) $\lambda_\omega\geqslant\omega-1$；(b′)若 $\lambda_\omega=\omega-1,\omega\neq1\Rightarrow\rho(\bar{B})=0$；(c′)若 $\omega-1<\lambda_\omega<1\Rightarrow0<\rho(\bar{B})<1$；(d′)若 $\lambda_\omega=1\Rightarrow\rho(\bar{B})=\frac{2-\omega}{\omega}$；(e′)若 $\lambda_\omega<1\Rightarrow\lambda_\omega-\omega+1\leqslant\omega\rho(\bar{B})$ 且 $\lambda_\omega-\omega+1\geqslant\lambda_\omega\omega\cdot\rho(\bar{B})$；(f′)若 $\lambda_\omega>1\Rightarrow\lambda_\omega-\omega+1\geqslant\omega\rho(\bar{B})$，且 $\lambda_\omega-\omega+1\leqslant\lambda_\omega\omega\cdot\rho(\bar{B})$. 其中，$\lambda_\omega=\rho(L_\omega)$，$L_\omega=(I-\omega L)^{-1}[(1-\omega)I-\omega U]$，$1\leqslant\omega<2$.

定理 3 在定理 2 条件下，有：(1) $\rho(\bar{B})=0\Leftrightarrow\lambda_{r,\omega}=\omega-1$，$(\Rightarrow,r\neq1)$；(2) $\rho(\bar{B})=\frac{2}{r}-1\Leftrightarrow\lambda_{r,\omega}=\frac{2\omega}{r}-1$，$(\Rightarrow,r\neq1)$；(3)若 $0<\rho(\bar{B})<1,1\leqslant\omega\leqslant r<\frac{2}{1+\rho(\bar{B})},\Rightarrow\lambda_{r,\omega}<\frac{2\omega}{r}-1$；(4)若 $0<\rho(\bar{B})<1,\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}<\omega\leqslant r<2,\Rightarrow\lambda_{r,\omega}>=\frac{2\omega}{r}-1$；(5)若 $\rho(\bar{B})\geqslant1,1<\omega\leqslant r<2,\Rightarrow\lambda_{r,\omega}>\frac{2\omega}{r}-1$；(6)若 $0<\rho(\bar{B})<1,1\leqslant\omega\leqslant r<\frac{2}{1+\rho(\bar{B})},\Rightarrow\frac{(\omega-1)+(r-\omega)\rho(\bar{B})}{1-r\rho(\bar{B})}\leqslant\lambda_{r,\omega}\leqslant(\omega-1)+\omega\rho(\bar{B})$；(7)若 $0<\rho(\bar{B})<1,\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}<\omega\leqslant r<2$，(或 $\rho(\bar{B})\geqslant1,1<\omega\leqslant r<2$)，$r<\rho^{-1}(\bar{B}),\Rightarrow(\omega-1)+\omega\rho(\bar{B})\leqslant\lambda_{r,\omega}\leqslant\frac{(\omega-1)+r-\omega)\rho(\bar{B})}{1-r\rho(\bar{B})}$.

证明 下面分别进行(1)—(7)的证明。

(1)充分性，由定理 2(b)知，命题成立. 必要性，今用反证法，如果 $\lambda_{r,\omega}\neq\omega-1$，由定理 2(a)知，$\lambda_{r,\omega}>\omega-1$，现在分以下三种情况讨论，若 $\lambda_{r,\omega}>\frac{2\omega}{r}-1>\omega-1$，由定理 2(f)知，$\lambda_{r,\omega}-\omega+1\leqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)\rho(\bar{B})$，但 $\rho(\bar{B})=0$，所以 $\lambda_{r,\omega}-\omega+1\leqslant0,\omega-1\geqslant\lambda_{r,\omega}>\frac{2\omega}{r}-1,\Rightarrow r>2$，矛盾，若 $\lambda_{r,\omega}=\frac{2\omega}{r}-1$，由定理 2(d)知，$\rho(\bar{B})=\frac{2}{r}-1$，又 $\rho(\bar{B})=0,\Rightarrow r=2$，矛盾(因 $1\leqslant\omega\leqslant r<2$)，若 $\lambda_{r,\omega}<\frac{2\omega}{r}-1$ 即 $\omega-1<\lambda_{r,\omega}<\frac{2\omega}{r}-1$，由定理 2(c)知，$0<\rho(\bar{B})<1$，这与 $\rho(\bar{B})=0$，矛盾，所以 $\lambda_{r,\omega}=\omega-1$.

(2)充分性，由定理 2(d)知，命题成立. 必要性，今用反证法，若 $\lambda_{r,\omega}>\frac{2\omega}{r}-1$，由定理 2(f)知，$\lambda_{r,\omega}-\omega+1\leqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)\rho(\bar{B})$，但 $\rho(\bar{B})=\frac{2}{r}-1,\Rightarrow\lambda_{r,\omega}-\omega+1\leqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)\rho(\bar{B})=(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)(\frac{2}{r}-1)=2\lambda_{r,\omega}+2-\frac{2\omega}{r}-\lambda_{r,\omega}r-r+\omega,\Rightarrow\lambda_{r,\omega}(r-1)\leqslant2\omega-1+2-\frac{2\omega}{r}-r\Rightarrow2\omega+1-\frac{2\omega}{r}-r\geqslant(r-1)\lambda_{r,\omega}>(r-1)(\frac{2\omega}{r}-1)=2\omega-r-\frac{2\omega}{r}+1,\Rightarrow2\omega+1-\frac{2\omega}{r}-r>2\omega-\frac{2\omega}{r}-r+1$，矛盾，若 $\lambda_{r,\omega}<\frac{2\omega}{r}-1$，由定理 2(e)知，$\lambda_{r,\omega}-\omega+1\geqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)\rho(\bar{B})$，又 $\rho(\bar{B})=\frac{2}{r}-1\Rightarrow\lambda_{r,\omega}-\omega+1\geqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)(\frac{2}{r}-1)=2\lambda_{r,\omega}+2-\frac{2\omega}{r}-\lambda_{r,\omega}\cdot r-r+\omega,\Rightarrow\lambda_{r,\omega}(r-1)\geqslant2\omega+1-\frac{2\omega}{r}-r,\Rightarrow2\omega+1-\frac{2\omega}{r}-r\leqslant(r-1)\lambda_{r,\omega}<(r-1)(\frac{2\omega}{r}-1)=2\omega+1-\frac{2\omega}{r}-r$，矛盾. 所以，$\lambda_{r,\omega}=\frac{2\omega}{r}-1$.

(3)今用反证法，若 $\lambda_{r,\omega}=\frac{2\omega}{r}-1$，由定理 2(d)知，$\rho(\bar{B})=\frac{2}{r}-1$，由此推知 $r=\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}$，这与已知条件 $r<\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}$ 矛盾. 若 $\lambda_{r,\omega}>\frac{2\omega}{r}-1$，由定理 2(f)，知，$\lambda_{r,\omega}-\omega+1\leqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)\rho$

$(\bar{B})\Rightarrow\lambda_{r,\omega}(1-r\rho(\bar{B}))\leqslant\omega-1+(r-\omega)\rho(\bar{B})$，因为 $1-r\rho(\bar{B})>1-\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}\rho(\bar{B})=\frac{1-\rho(\bar{B})}{1+\rho(\bar{B})}>0$，所以$(\omega-1)+(r-\omega)\rho(\bar{B})\geqslant(1-r\rho(\bar{B}))\lambda_{r,\omega}>(1-r\rho(\bar{B}))(\frac{2\omega}{r}-1)=\frac{2\omega}{r}-1-2\omega\rho(\bar{B})+r\rho(\bar{B})$，$\Rightarrow\omega-1+r\rho(\bar{B})-\omega\rho(\bar{B})>\frac{2\omega}{r}-1-2\omega\rho(\bar{B})+r\rho(\bar{B})$，$\Rightarrow\rho(\bar{B})>\frac{2}{r}-1$，$\Rightarrow r>\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}$，这与已知条件矛盾，故 $\lambda_{r,\omega}<\frac{2\omega}{r}-1$.

(4)今用反证法，若 $\lambda_{r,\omega}=\frac{2\omega}{r}-1$，由定理 2(d)知，$\rho(\bar{B})=\frac{2}{r}-$ ，$\Rightarrow r=\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}$，这与 $r>\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}$矛盾，若 $\lambda_{r,\omega}<\frac{2\omega}{r}-1$，由定理 2(e)知，$\lambda_{r,\omega}-\omega+1\geqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)\rho(\bar{B})\Rightarrow\lambda_{r,\omega}(1-r\rho(\bar{B}))\geqslant(\omega-1)+(r-\omega)\rho(\bar{B})>0$. 所以 $1-r\rho(\bar{B})>0$. $\Rightarrow(\omega-1)+(r-\omega)\rho(\bar{B})\leqslant\lambda_{r,\omega}(1-r\rho(\bar{B}))<(1-r\rho(\bar{B}))[\frac{2\omega}{r}-1]$，$\Rightarrow\rho(\bar{B})<\frac{2}{r}-1$，$\Rightarrow r<\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}$，这与 $r>\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}$矛盾，所以 $\lambda_{r,\omega}>\frac{2\omega}{r}-1$.

(5)证明，今用反证法，若 $\lambda_{r,\omega}=\frac{2\omega}{r}-1$，由定理 2(d)知，$\rho(\bar{B})\frac{2}{r}-1$，$\Rightarrow\frac{2}{r}-1=\rho(\bar{B})\geqslant1$，$\Rightarrow r\leqslant1$，这与 $r>1$ 矛盾，若 $\lambda_{r,\omega}<\frac{2\omega}{r}-1$，由定理 2(e)知，$\lambda_{r,\omega}-\omega+1\geqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)\rho(\bar{B})\geqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)$，$\Rightarrow1\geqslant r$，这与 $r>1$ 矛盾，故 $\lambda_{r,\omega}>\frac{2}{\omega}-1$.

(6)由定理 3(3)知，$\lambda_{r,\omega}<\frac{2\omega}{r}-1$，由定理 2(e)知，$\lambda_{r,\omega}-\omega+1\leqslant\omega\rho(\bar{B})$，$\lambda_{r,\omega}-\omega+1\geqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)\rho(\bar{B})$，$\Rightarrow\lambda_{r,\omega}\leqslant\omega-1+\omega\rho(\bar{B})$，及 $\lambda_{r,\omega}(1-r\rho(\bar{B}))\geqslant(\omega-1)+(r-\omega)\rho(\bar{B})$，因 $r<\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}$，$\Rightarrow r+r\rho(\bar{B})<2$，$\Rightarrow r-1<1-r\rho(\bar{B})$，所以 $1-r\rho(\bar{B})>0$，$\Rightarrow\lambda_{r,\omega}\geqslant\frac{(\omega-1)+(r-\omega)\rho(\bar{B})}{1-r\rho(\bar{B})}$，故

$$\frac{(\omega-1)+(r-\omega)\rho(\bar{B})}{1-r\rho(\bar{B})}\leqslant\lambda_{r,\omega}\leqslant(\omega-1)+\omega\rho(\bar{B}).$$

(7)证明：由定理 3(4)(或定理 3(5))知，$\lambda_{r,\omega}>\frac{2\omega}{r}-1$，由定理 2(f)知，$\lambda_{r,\omega}-\omega+1\geqslant\omega\rho(\bar{B})$，$\lambda_{r,\omega}-\omega+1\leqslant(\lambda_{r,\omega}\cdot r+r-\omega)\rho(\bar{B})$，$\Rightarrow\lambda_{r,\omega}\geqslant(\omega-1)+\omega\rho(\bar{B})$，及 $\lambda_{r,\omega}(1-r\rho(\bar{B}))\leqslant(\omega-1)+(r-\omega)\rho(\bar{B})$，又 $r<\rho^{-1}(\bar{B})$，$\Rightarrow\lambda_{r,\omega}\leqslant\frac{(\omega-1)+(r-\omega)\rho(\bar{B})}{1-r\rho(\bar{B})}$，所以

$$(\omega-1)+\omega\rho(\bar{B})\leqslant\lambda_{r,\omega}\leqslant\frac{(\omega-1)+(r-\omega)\rho(\bar{B})}{1-r\rho(\bar{B})}.$$

推论 当 $r=\omega$ 时，有：(1′)$\rho(\bar{B})=0\Leftrightarrow\lambda_{\omega}=\omega-1(\Leftarrow\omega\neq1)$；(2′)$\rho(\bar{B})=\frac{2-\omega}{\omega}\Leftrightarrow\lambda_{\omega}=1$，$(\Rightarrow\omega\neq1)$；(3′)$0<\rho(\bar{B})<1$，$1\leqslant\omega<\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}$，$\Rightarrow\lambda_{\omega}<1$；(4′)$0<\rho(\bar{B})<1$，$\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}<\omega<2\Rightarrow\lambda_{\omega}>1$；(5′)若 $\rho(\bar{B})\geqslant1$，$1<\omega<2$，$\Rightarrow\lambda_{\omega}>1$；(6′)若 $0<\rho(\bar{B})<1$，$1\leqslant\omega<\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}$，$\Rightarrow\frac{\omega-1}{1-r\rho(\bar{B})}\leqslant\lambda_{r,\omega}\leqslant(\omega-1)+\omega\rho(\bar{B})$；(7′)若 $0<\rho(\bar{B})<1$，$\frac{2}{1+\rho(\bar{B})}<\omega<2$(或 $\rho(\bar{B})\geqslant1$，$1<\omega<2$)，$r<\rho^{-1}(\bar{B})$，$\Rightarrow$

$$(\omega-1)+\omega\rho(\bar{B})\leqslant\lambda_{\omega}\leqslant\frac{\omega-1}{1-r\rho(\bar{B})}.$$

参 考 文 献

[1] Varga, R. S., *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall Inc., (1962).
[2] 王新民，关于 L_{ω} 敛散性定理，计算数学，2，1(1980).
[3] 陈培贤，*AOR* 方法的收敛性，计算数学，1(1983)，66—71.

Convergence Theorem and Divergence Theorem of the Matrices $L_{r,w}$

Cai Huoying

(*Department of Management Information Science*)

Abstract In this paper, the author dealt with the nonnegative Jacobi matrices ($\bar{B}$) *and AOR matrices* $L_{r,w}$ ($1\leqslant w\leqslant r<2$). *Their simultaneous convergence and divergence were demonstrated; the relation between* $\rho(\bar{B})$ *and* $\rho(L_{r,w})$ *was revealed; and two groups of inequalities for estimating upper and lower bounds of spectral radius* $\rho(L_{r,w})$ *were given.*

key words convergence, divergence, spectral radius