

# 压杆非保守稳定问题的边界区域单元法

林 建 华

(土木工程系)

**摘要** 本文利用作者在文[1]中提出的边界区域单元法,求解非保守力作用下的压杆稳定问题,建立了求解 Beck 杆 Leipholz 杆临界荷载的统一计算程序,并给出了不同边界条件下的临界荷载。

**关键词** 边界区域单元法,稳定,非保守力

## 0 前言

经典的压杆稳定的欧拉理论实际上是建立在势能原理的基础上的,因此,对于非保守力这种无势力作用下的压杆稳定问题,欧拉理论是难以给出其正确解答的。例如,欧拉理论的 Beck 杆问题是不会丧失稳定的<sup>[2,3]</sup>。这一有趣的结论使得人们不得不放弃传统的欧拉理论而寻求新的稳定准则,因而产生了计算稳定问题临界荷载的动力准则<sup>[4]</sup>。由于一些非保守力作用下的临界荷载的精确解至今无法找到,因此,在具体运用这些动力准则时,只能寻找近似的数值解。例如,Leipholz 定义了亚能量,建立了拟变分原理,利用 Ritz 法和 Гаперкин 法得到了一些近似值<sup>[5]</sup>。文献[6]则基于 Leipholz 的拟广义变分原理,采用通常杆件的有限元法,求解 Beck 问题和 Leipholz 问题。Naschie<sup>[7]</sup>采用假定节点位置的有限元方法用保守系代替非保守系计算了 Leipholz 杆,结果并不令人满意。本文在作者提出的边界区域单元法的基础上<sup>[1]</sup>,对各种非保守力作用下的杆的稳定问题,采用统一的基本解,把微分方程转化为求解边界和域内点的积分方程。通过域内划分单元,把边界区域积分方程离散成以若干个边界点和域内点为基本未知量的线性方程组,使微分方程的特征值问题转化成线性方程组的特征值问题,建立了求解非保守稳定问题的边界区域单元法,并得到 Beck 杆,Leipholz 杆在不同边界条件下的临界荷载。理论和计算结果表明,本文的方法比起现有的其它方法,计算简单,编程容易,避免其它方法对不同问题需寻找不同的拟变分泛函进行变分近似解法的困难,并且可获得较好的结果。

## 1 杆的非保守稳定问题的积分方程

图1中,弹性杆 AB 的 A 端固定, B 端有一力 P 沿杆变形的切线方向,这就是 Beck 杆。其基

本文1990-06-18收到。

本方程为

$$\mu W_{xx} + \alpha W_{xxxx} + p W_{xx} = 0, \quad (1)$$

边界条件

$$W = W_x = 0, \quad x = 0, \quad W_{xx} = W_{xxx} = 0, \quad x = l.$$

若荷载  $p$  是沿杆轴切向均匀分布的(图2), 则杆就是文献上常称的 Leipholz 杆, 其基本方程为

$$\mu W_{xx} + \alpha W_{xxxx} + p(l-x)W_{xx} = 0, \quad (2)$$

边界条件

$$W = W_x = 0, \quad \text{固定端}, \quad W_{xx} = W_{xxx} = 0, \quad \text{简支端}, \quad W_{xx} = W_{xxx} = 0, \quad \text{自由端}.$$



图1 Beck 杆

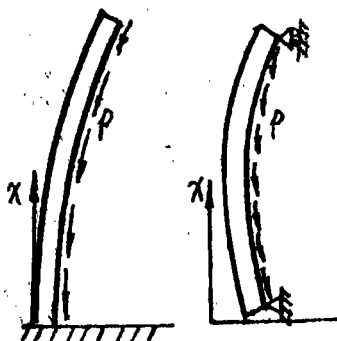


图2 Leipholz 杆

把 Beck 杆和 Leipholz 杆的基本方程写成统一型式:

$$\mu W_{xx} + \alpha W_{xxxx} + p(x)W_{xx} = 0, \quad (3)$$

其中  $W$  为杆的挠度,  $\mu$  为杆单位长度质量,  $\alpha$  为抗弯刚度. 而

$$P(x) = \begin{cases} p, & \text{Beck 杆,} \\ p(l-x), & \text{Leipholz 杆.} \end{cases}$$

设  $W = e^{i\omega t} w(x)$ , 代入方程(3)由分离变量法可得:

$$w_{xxxx} = (\lambda/\alpha)w - (p(x)/\alpha)w_{xx}, \quad (4)$$

边界条件

$$\begin{cases} w = w_x = 0, & \text{固定端,} \\ w_{xx} = w = 0, & \text{简支端,} \\ w_{xx} = w_{xxx} = 0, & \text{自由端.} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $\lambda = \mu\omega^2$ . 方程(4)可通过引入基本解  $G(x, \zeta)$  转化为积分方程. 这里

$$G(x, \zeta) = \frac{l^3}{12\alpha} (2 + |\rho|^3 - 3|\rho|^2) \quad (6)$$

为下列方程

$$\frac{d^4 G}{dx^4} = \delta(x, \zeta) \quad (7)$$

的解,其中  $\rho = (x - \zeta)/l$ . 方程(4)两边同乘  $G(x, \zeta)$  并沿杆长积分,经分部积分四次后可得

$$-w(\zeta) = [Gw_m - \frac{dG}{dx}w_m + \frac{d^2G}{dx^2}w_m - \frac{d^3G}{dx^3}w + p(x)Gw_m - p'(x)Gw - p \frac{dG}{dx}w] \Big|_0^l - \int_0^l (\frac{\lambda}{\alpha}G - 2p'(x) \frac{dG}{dx} - p \frac{d^2G}{dx^2})w dx, \quad (8)$$

式(8)就是杆的非保守稳定问题的积分方程. 若将式(8)再对  $\zeta$  求导,即可得到转角的积分方程

$$-\theta(\zeta) = [G'w_m - \frac{dG'}{dx}w_m + \frac{d^2G'}{dx^2}w_m - \frac{d^3G'}{dx^3}w + p(x)G'w_m - p'(x)G'w - p \frac{dG'}{dx}w] \Big|_0^l - \int_0^l (\frac{\lambda}{\alpha}G' - 2p'(x) \frac{dG'}{dx} - p \frac{d^2G'}{dx^2})w dx. \quad (9)$$

记

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, \zeta) = \frac{dG}{dx} = \frac{l^2}{4\alpha} |\rho| (|\rho| - 2) \operatorname{sgn}(\rho), \\ E(x, \zeta) = -\alpha \frac{d^2G}{dx^2} = 0.5l(1 - |\rho|), \\ D(x, \zeta) = -\alpha \frac{d^3G}{dx^3} = -0.5 \operatorname{sgn}(\rho), \\ G'(x, \zeta) = \frac{dG}{d\zeta} = -\frac{l^2}{4\alpha} |\rho| (|\rho| - 2) \operatorname{sgn}(\rho), \\ F'(x, \zeta) = \alpha \frac{dG'}{dx} = 0.5l(1 - |\rho|), \\ E'(x, \zeta) = -\alpha \frac{d^2G'}{dx^2} = 0.5 \operatorname{sgn}(\rho), \\ D'(x, \zeta) = -\alpha \frac{d^3G'}{dx^3} = 0, \\ s(x) = -\alpha w_m, \\ m(x) = -\alpha w, \end{array} \right. \quad (10)$$

式中  $\operatorname{sgn}(\rho)$  为符号函数,

$$\operatorname{sgn}(\rho) = \begin{cases} -1, & \rho < 0, \\ 1, & \rho > 0. \end{cases}$$

由此可见,当  $\rho=0$  或  $x=\zeta$  时,  $F, D, G', E'$  是不确定的,即  $x=\zeta$  是一个奇异点. 把式(10)代入式(9),整理后写成矩阵形式为

$$\begin{aligned} & -\alpha \begin{Bmatrix} w(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -G(l, \zeta) & G(0, \zeta) & F(l, \zeta) & -F(0, \zeta) \\ -G'(l, \zeta) & G'(0, \zeta) & F'(l, \zeta) & -F'(0, \zeta) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s(l) \\ s(0) \\ m(l) \\ m(0) \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} -E(l, \zeta) + p(l)G(l, \zeta) & E(0, \zeta) - p(0)G(0, \zeta) \\ -E'(l, \zeta) + p(l)G'(l, \zeta) & E'(0, \zeta) - p(0)G'(0, \zeta) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} D(l, \zeta) - p'(l)G(l, \zeta) - p(l)F(l, \zeta) & -D(0, \zeta) + p'(0)G(0, \zeta) + p(0)F(0, \zeta) \\ D'(l, \zeta) - p'(l)G'(l, \zeta) - p(l)F'(l, \zeta) & -D'(0, \zeta) + p'(0)G'(0, \zeta) + p(0)F'(0, \zeta) \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} w(l) \\ w(0) \\ \theta(l) \\ \theta(0) \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} \int_0^l (\lambda(G(x, \zeta) - 2p'(x)F(x, \zeta) + \frac{P}{2}B(x, \zeta))w dx \\ \int_0^l (\lambda(G'(x, \zeta) - 2p'(x)F'(x, \zeta) + \frac{P}{2}B'(x, \zeta))w dx \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

从式(11)中可见,右边第一、二项只和边界条件有关,而第三项是域内积分,内点位移  $w$  作为未知量出现在积分项内. 式(11)可以用来计算域内的任一点的位移和转角,当  $\zeta \rightarrow 0$ , 或  $\zeta \rightarrow l$  时,两个端点成了奇异点,此时可令  $\zeta = 0 + \varepsilon$ , 或  $\zeta = l - \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  为任意小正数,公式照样适用.

## 2 边界区域单元法

在文[1]中,作者提出了求解弹塑性、静动力学问题的边界区域单元法,基于该文的思路,对式(11)同样可以建立杆的非保守稳定问题的边界区域单元法. 将杆离散成  $n$  个单元,于是有  $n-1$  个域内节点和2个边界节点. 设各单元对挠度  $w$  取三次多项式插值. 即对第  $j$  个单元有

$$w(\eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\eta) w_i, \quad (12)$$

其中

$$N_1(\eta) = 1 - \frac{(1+\eta)^2(2-\eta)}{4}, \quad N_2(\eta) = \frac{(1-\eta)^2(1+\eta)l_j}{8},$$

$$N_3(\eta) = \frac{(1+\eta)^2(2-\eta)}{4}, \quad N_4(\eta) = \frac{(1+\eta)^2(1-\eta)l_j}{8},$$

$$w_i = (w_{j-1}, \theta_{j-1}, w_j, \theta_j)^T, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\eta \text{ 为局部坐标, } \eta \in [-1, 1].$$

把式(12)代入(11)的域内积分项,对每个单元进行高斯数值积分,并引入边界条件(5)可得

$$-a \begin{Bmatrix} w(\zeta) \\ \theta(\zeta) \end{Bmatrix} = [c(\zeta)] \{S_e\} + [B^*(\zeta, p)] \{S_n\} - \lambda [D(\zeta)] \{S_n\}, \quad (13)$$

式中  $[c(\zeta)]$  是式(11)中与未知边界力  $\{S_e\}$  相应的元素的  $2 \times 2$  阶方阵,  $[B^*(\zeta, p)]$  和  $[D(\zeta)]$  是和域内及边界未知节点广义位移  $\{S_n\}$  相应元素的  $2 \times 2n$  阶矩阵.

对于  $x=0$  端固支,  $x=l$  端自由的 Beck 杆或 Leipholz 杆,有

$$\begin{cases} \{S_e\} = \begin{Bmatrix} s(0) \\ m(0) \end{Bmatrix}, [c(\zeta)] = \begin{Bmatrix} G(0, \zeta) & -F(0, \zeta) \\ G'(0, \zeta) & -F'(0, \zeta) \end{Bmatrix}, \\ \{S_n\} = (w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, \dots, w_n, \theta_n)^T, \end{cases} \quad (14a)$$

$$\begin{cases} [B^*(\zeta, p)] = \begin{Bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* & \dots & B_{12n}^* \\ B_{21}^* & B_{22}^* & \dots & B_{22n}^* \end{Bmatrix}, \\ [D(\zeta)] = \begin{Bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{12n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{22n} \end{Bmatrix}, \end{cases} \quad (14b)$$

其中

$$\begin{cases}
B_{1,1j-1}^* = \sum_{i=1}^{NG} (2p'(x_i^j)F(x_i^j, \zeta) - p(x_i^j)E(x_i^j, \zeta))N_3(\eta_h) \frac{l_j}{2}\bar{w}_h \\
\quad + \sum_{i=1}^{NG} (2p'(x_i^{j+1})F(x_i^{j+1}, \zeta) - p(x_i^{j+1})E(x_i^{j+1}, \zeta))N_1(\eta_h) \frac{l_{j+1}}{2}\bar{w}_h, \\
B_{1,2j}^* = \sum_{i=1}^{NG} (2p'(x_i^j)F(x_i^j, \zeta) - p(x_i^j)E(x_i^j, \zeta))N_4(\eta_h) \frac{l_j}{2}\bar{w}_h \\
\quad + \sum_{i=1}^{NG} (2p'(x_i^{j+1})F(x_i^{j+1}, \zeta) - p(x_i^{j+1})E(x_i^{j+1}, \zeta))N_2(\eta_h) \frac{l_{j+1}}{2}\bar{w}_h, \\
B_{1,2n-1}^* = \sum_{i=1}^{NG} (2p'(x_i^1)F(x_i^1, \zeta) - p(x_i^1)E(x_i^1, \zeta))N_3(\eta_h) \frac{l_1}{2}\bar{w}_h \\
\quad + D(l, \zeta) - p'(l)G(l, \zeta) - p(l)F(l, \zeta), \\
B_{1,1n-1}^* = \sum_{i=1}^{NG} (2p'(x_i^1)F(x_i^1, \zeta) - p(x_i^1)E(x_i^1, \zeta))N_4(\eta_h) \frac{l_1}{2}\bar{w}_h \\
\quad - E(l, \zeta) + p(l)G(l, \zeta), \\
D_{1,1j-1} = \sum_{i=1}^{NG} (G(x_i^j, \zeta)N_3(\eta_h) \frac{l_j}{2} + G(x_i^{j+1}, \zeta)N_1(\eta_h) \frac{l_{j+1}}{2})\bar{w}_h, \\
D_{1,2j} = \sum_{i=1}^{NG} (G(x_i^j, \zeta)N_4(\eta_h) \frac{l_j}{2} + G(x_i^{j+1}, \zeta)N_2(\eta_h) \frac{l_{j+1}}{2})\bar{w}_h, \\
D_{1,2n-1} = \sum_{i=1}^{NG} (G(x_i^1, \zeta)N_3(\eta_h) \frac{l_1}{2})\bar{w}_h, \\
D_{1,1n} = \sum_{i=1}^{NG} (G(x_i^1, \zeta)N_4(\eta_h) \frac{l_1}{2})\bar{w}_h, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1).
\end{cases} \quad (14c)$$

$$\begin{cases}
D_{1,1j-1} = \sum_{i=1}^{NG} (G(x_i^j, \zeta)N_3(\eta_h) \frac{l_j}{2} + G(x_i^{j+1}, \zeta)N_1(\eta_h) \frac{l_{j+1}}{2})\bar{w}_h, \\
D_{1,2j} = \sum_{i=1}^{NG} (G(x_i^j, \zeta)N_4(\eta_h) \frac{l_j}{2} + G(x_i^{j+1}, \zeta)N_2(\eta_h) \frac{l_{j+1}}{2})\bar{w}_h, \\
D_{1,2n-1} = \sum_{i=1}^{NG} (G(x_i^1, \zeta)N_3(\eta_h) \frac{l_1}{2})\bar{w}_h, \\
D_{1,1n} = \sum_{i=1}^{NG} (G(x_i^1, \zeta)N_4(\eta_h) \frac{l_1}{2})\bar{w}_h, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1).
\end{cases} \quad (14d)$$

$B_{1,j}^*, D_{1,j}$  ( $j=1, 2, \dots, 2n$ ) 的值可通过替换上式中的  $F(x, \zeta), G(x, \zeta), D(x, \zeta), E(x, \zeta)$  为  $F'(x, \zeta), G'(x, \zeta), D'(x, \zeta), E'(x, \zeta)$  得到. 在式(14)中,  $NG$  为高斯积分点个数,  $\eta_h$  为高斯积分点坐标,  $\bar{w}_h$  为相应的加权系数,  $x_i^j$  表示第  $j$  个单元第  $i$  个高斯积分点的总体坐标, 它与局部坐标的关系为

$$x_i^j = x_{j-1} + \frac{x_j - x_{j-1}}{2}(1 + \eta_h).$$

对于两端简支的 Leipholz 杆

$$\begin{cases}
\{S_r\} = \begin{Bmatrix} s(l) \\ s(0) \end{Bmatrix}, \quad [c(\zeta)] = \begin{Bmatrix} -G(l, \zeta), & G(0, \zeta) \\ -G'(l, \zeta), & G'(0, \zeta) \end{Bmatrix}, \\
\{S_n\} = (\theta_0, w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, \dots, w_{n-1}, \theta_{n-1}, \theta_n)^T,
\end{cases} \quad (15a)$$

$$\begin{cases}
B_{11}^* = \sum_{i=1}^{NG} (2p'(x_i^1)F(x_i^1, \zeta) - p(x_i^1)E(x_i^1, \zeta))N_2(\eta_h) \frac{l_1}{2}\bar{w}_h \\
\quad - E(0, \zeta) + p(0)G(0, \zeta), \\
B_{1j}^* = B_{1,j-1}^*, \quad \bar{B}_{1,j-1}^* \text{ 为式(14c) 中的值,} \\
B_{1,2n}^* = \bar{B}_{1,2n}^*,
\end{cases} \quad (15b)$$

$$\begin{cases} D_{11} = \sum_{i=1}^{n_0} (G(x_i^1, \zeta) N_2(\eta_h) \frac{l_i}{2} \bar{w}_1, \\ D_{1j} = \bar{D}_{1,j-1}, \quad \bar{D}_{1,j-1} \text{ 为式(14d) 中的值,} \\ D_{1,2n} = \bar{D}_{1,2n}, \quad (j = 2, 3, \dots, 2n-1), \end{cases} \quad (15c)$$

$B_{2j}^0 (j=1, 2, \dots, 2n)$  的求法同前述的一样. 方程(13)共含有  $2n$  个未知广义位移和 2 个未知广义力, 但当  $\zeta$  遍取  $n+1$  个节点, 由式(13)可列出  $2n+2$  个齐次线性方程

$$[C(\zeta_j)]\{S_e\} + [B(\zeta_j, p)]\{S_e\} - \lambda[D(\zeta_j)]\{S_e\} = 0. \quad (16)$$

注意到广义未知力  $\{S_e\}$  的系数并没含有特征值  $\lambda$ , 为了把式(16)转化成标准特征值问题, 必须作进一步变化. 设  $\zeta = l - \varepsilon$ , 由式(16)得  $[C(l - \varepsilon)]_{2 \times 2}\{S_e\} + [B(l - \varepsilon, p)]_{2 \times 2}\{S_e\} - \lambda[\bar{D}(l - \varepsilon)]_{2 \times 2}\{S_e\} = 0$ , 简写成

$$[C]\{S_e\} + [B(p)]\{S_e\} - \lambda[D]\{S_e\} = 0, \quad (17)$$

由上式可得

$$\{S_e\} = \lambda[C]^{-1}[D]\{S_e\} - [C]^{-1}[B(p)]\{S_e\}, \quad (18)$$

当  $\zeta$  遍取  $\zeta = x_j (j=0, 1, \dots, n-1)$ ,  $x_0 = 0 + \varepsilon$ , 有

$$[C(x_j)]_{2 \times 2}\{S_e\} + [B(x_j, p)]_{2 \times 2}\{S_e\} - \lambda[D(x_j)]_{2 \times 2}\{S_e\} = 0,$$

或简写成

$$[C]\{S_e\} + [B(p)]\{S_e\} - \lambda[D]\{S_e\} = 0, \quad (19)$$

把式(18)代入(19)可得

$$([C][C]^{-1}[B(p)] - \lambda([C][C]^{-1}[D] - [D]))\{S_e\} = 0, \quad (20)$$

最后可转化成标准特征值问题

$$([K] - \lambda)\{S_e\} = 0 \quad (21)$$

式中  $[K] = ([C][C]^{-1}[B(p)] - [B(p)])^{-1}([C][C]^{-1}[D] - [D])$ . 显然实矩阵  $[K]$  不可能是一个对称阵, 因而其特征值  $\lambda$  不一定总具有实数值, 当  $\lambda$  为零或者复数值时, 最小的  $p$  值就是所要求的临界荷载.

### 3 程序的实施和数值算例

根据上述建立的杆的非保守稳定问题的边界区域单元法, 编制了求解确定临界荷载的计算程序. 由于相应于确定临界荷载的动力准则的特征方程(21)涉及到两个特征值  $p$  和  $\lambda$ , 这使得临界荷载的确定困难了许多. 程序的具体处理步骤: (1)把杆离散成  $n$  个单元, 设初值  $P_1 = P_0$ ,  $P_0 = 0$ ; (2)取临界荷载  $p_1 = (P_1 + P_0)/2$ , 判断. 如果  $|p_{i+1} - p_i|/P_1$  小于给定误差, 计算结束. 此时  $P_1$  为所求临界荷载, 否则进行下一步计算; (3)计算  $[B(p_1)]$ ,  $[B(p_1)]$  和  $[K]$ , 利用求一般实矩阵的 QR 法求其全部特征值; (4)(a)若特征值均为实数值, 则置  $P_1 = P_i$ , 重复 2, 继续寻求较大的临界荷载; (b)若特征值出现零或复数值, 则置  $P_1 = P_i$ , 重复 2, 继续寻求较小的临界荷载.

上述过程, 实际上是利用二分法逼近特征值恰为零或复数值时的最小临界荷载. 本文分别就 Beck 杆和 Leipholz 杆(二种不同边界条件)的临界荷载进行计算, 并同前人的结果比较列于表 1—3.

表1 Beck 杆(一端固支,一端自由)

本 文		(单位 $\frac{\alpha\pi^2}{P}$ )			文献[8]	精确解[9]
2单元	3单元	4单元	5单元	>6单元	8单元	
2.198	2.123	2.059	2.022	2.019(收敛)	2.03	2.008

表2 Leipholz 杆(两端绞支)

本 文		(单位 $\frac{\alpha\pi^2}{P}$ )			文献[6]	文献[5]
2单元	3单元	4单元	5单元	>6单元	8单元	Ritz 法
2.071	1.941	1.845	1.829	1.828(收敛)	1.834	1.921

表3 Leipholz 杆(一端固支,一端自由)

(单位  $\alpha\pi^2/P$ )

单元数	2	3	4	5	6	7
本 文	4.040	3.863	3.804	3.803	3.803	3.803
文献[6]	4.063	3.881	3.830	3.830	3.830	3.830
文献[7]	2.594	4.058	5.227	5.422	5.522	5.589
Leipholz(Ritz 法) <sup>(5)</sup>				4.058		

从上列表中可以看出,本文得到的临界荷载是收敛的,一般取6—7个单元就可得到收敛解,和精确解的误差(仅对有精确解的 Beck 杆)比其它方法小.本文的结果和用有限元法得到的结果<sup>(6,7)</sup>较为接近.而文献[7]的有限元解是有问题的.

## 4 结论

本文从计算稳定问题临界荷载的动力准则出发,给出了非保守力作用下压杆稳定问题的边界区域单元解法.理论和算例表明,该方法行之有效的,对于非保守力作用下的各种压杆,都可以采用统一的基本解.比起现有的有限元法需寻找不同的泛函进行拟变分计算方便了许多.在文[1]和本文的基础上,对于板在非保守力作用下的稳定问题的二维情况,也可以构造同样的边界区域单元法计算格式.

## 参 考 文 献

- [1] 林建华,弹塑性静动力学的边界区域单元法,华侨大学学报(自然科学版),3(1989).
- [2] 阿·鲁·尔然尼曾(王惠德等译),弹性体系的平衡稳定,人民教育出版社,(1960).
- [3] 陈 森、杜耀星,材料力学答疑,福建人民出版社,(1986).
- [4] Ziegler, H., *Advance Applied Mechanics*, 4, (1956), 136—150.
- [5] Leipholz, H., *Direct Variational Method and Eigenvalue Problems in Engineering*, Noordhoff, (1977).
- [6] 张其浩、单文秀,非保守稳定问题的有限元法,上海力学,3(1981).
- [7] Naschie, N. S., Atehl S. al., *JSV*, 64, 3(1979), 84—97.
- [8] Mpte, C. D., *Proc. ASCE*, 97, EM3(1971), 212—236.
- [9] Timoshenko, S. P., Gere, J. M., *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill 2ed, (1961).

## Border Zone Element Method for Solving the Stability of Compression Member Subjected to Non-Conservative Forces

Lin Jianhua

*(Department of Civil Engineering)*

**Abstract** For solving the stability of compression member subjected to non-conservative forces, this paper makes use of border zone element method presented by the author in literature[1]. An unified program is formed for computing critical load of Beck bar and Leipholz bar, and the critical loads under boundary condition are also given.

**Key words** border zone element method, stability, non-conservative force