第13卷 第2期 华侨大学学报自然科学版 Vol.13 №.2
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年4月 (NATURAL SCIENCE) Apr.1992

论 L_ω 敛散性的新定理

陈恒新

(管理信息科学系)

摘要 本文论证了关于 Jacobi 矩阵 $B=L-U$(L,U 是非负阵)的逐次松弛矩阵的敛散性依赖于矩阵 $L+U$. 并给出了估计松弛矩阵之谱半径上下界的不等式. 由此,还可证得对一般 Jacobi 矩阵 B 之松弛矩阵有:当 $|B|$ 的谱半径小于 1,则该松弛矩阵的谱半径小于 1(这里松弛因子是在 0 和大于 1 的数 C 之间).

关键词 松弛矩阵,收敛性,发散性

0 引言

文[1]作者论证了非负 Jacobi 矩阵 $B=L+U(L\geqslant0,U\geqslant0)$ 和逐次松弛矩阵 $L_\omega(0<\omega\leqslant1)$ 之间的敛散关系. 然而,对于 $B=L-U(L\geqslant0,U\geqslant0)$ 及一般的 Jacobi 矩阵 B,L_ω 的敛散性依赖于什么? 为此,本文论证了关于 Jacobi 矩阵 $B=L-U(L\geqslant0,U\geqslant0)$ 的逐次松弛矩阵 $L_\omega(1\leqslant\omega<2)$ 的敛散性依赖于 $\bar{B}=L+U$. 证明了:当 $\rho(\bar{B})=0$,则 $\rho(L_\omega)=\omega-1<1$;当 $0<\rho(\bar{B})<1$ 且 $1\leqslant\omega<2/(1+\rho(\bar{B}))$,则 $\rho(L_\omega)<1$;当 $0<\rho(\bar{B})<1$,但 $2/(1+\rho(\bar{B}))<\omega<2$ 或 $\omega=2/(1+\rho(\bar{B}))$,则 $\rho(L_\omega)>1$ 或 $\rho(L_\omega)=1$;当 $\rho(\bar{B})\geqslant1$ 则 $\rho(L_\omega)>1(1<\omega<2)$ 等一些关系式. 并且也给出了估计松弛矩阵谱半径 $\rho(L_\omega)$ 上下界的几组不等式. 而由此还证明了对于一般 Jacobi 矩阵 $B=L+U$(这里没有限制 L,U 是非负或非正阵)的松弛矩阵 L_ω 有:当 $\rho(\bar{B})=\rho(|L|+|U|)<1$,则 $\rho(L_\omega)<1(0<\omega<2/(1+\rho(\bar{B}))$,这里 $1<2/(1+\rho(\bar{B}))\leqslant2)$. 从而使得有关这一类问题的研究结果更为完善一些[2].

为叙述方便,规定:本文中,L_ω 总表示相应于 Jacobi 矩阵 B 的逐次松弛矩阵,L_ω^+ 为相应于 $|B|$ 的. 而 Jacobi 矩阵 $B=L-U$(或$=L+U$)中,L 为严格下三角阵(因非严格下三角阵 L 的 SOR 法是没有什么实际意义的);而 U 不必限定为严格上三角阵,这在理论上和实际应用中皆是有意义的.

比如可将 Jacobi 阵 B 的下三角部分中为负的元素取为 $-U$ 中之元,从而扩充了讨论范围. 且这在实际应用 SOR 法编程计算中亦无多少麻烦.

本文 1990-06-07 收到.

1 敛散性定理

定理 1 设 Jacobi 矩阵 $B=L-U$ 中 $L\geqslant 0, U\geqslant 0$，记 $\lambda=\rho(L_\omega)$，则对于松弛因子 $1\leqslant\omega<2$ 有谱半径 $\rho(\lambda L+U)=(\lambda+1-\omega)/\omega$；且当 $\lambda=0$ 时，有 $\omega=1$.

证明 因为 $L_\omega=(I-\omega L)^{-1}((1-\omega)I-\omega U)=-(I-\omega L)^{-1}((\omega-1)I+\omega U)\overset{记}{=}-\bar{L}_\omega$，则 $\lambda=\rho(L_\omega)=\rho(-\bar{L}_\omega)=\rho(\bar{L}_\omega)$. 由于 $\rho(\omega L)=0<1$，所以 $(I-\omega L)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(\omega L)^k\geqslant 0$，又 $((\omega-1)I+\omega U)\geqslant 0$. 所以

$$\bar{L}_\omega=(I-\omega L)^{-1}((\omega-1)I+\omega U)=\sum_{k=0}^{\infty}(\omega L)^k((\omega-1)I+\omega U)\geqslant 0, \tag{1}$$

于是存在特征向量 $x_0\geqslant 0$，使 $\bar{L}_\omega x_0=\lambda x_0$，即

$$(I-\omega L)^{-1}((\omega-1)I+\omega U)x_0=\lambda x_0,$$
$$((\omega-1)I+\omega U)x_0=\lambda x_0-\omega\lambda L x_0,$$
$$\omega\lambda L x_0+\omega U x_0=\lambda x_0-(\omega-1)x_0,$$

得

$$(\lambda L+U)x_0=(\lambda+1-\omega)/\omega x_0.$$

所以，$x_0\geqslant 0$ 亦为非负矩阵 $\lambda L+U$ 的特征向量，则其相应特征值 $(\lambda+1-\omega)/\omega\geqslant 0$，因而 $\rho(\lambda L+U)\geqslant(\lambda+1-\omega)/\omega$. 现证 $\rho(\lambda L+U)=(\lambda+1-\omega)/\omega$. 反证，设 $\rho(\lambda L+U)=(1+\Delta)(\lambda+1-\omega)/\omega$，其中 $\Delta>0$. 则存在向量 $Y\geqslant 0$，使

$$(\lambda L+U)Y=(1+\Delta)(\lambda+1-\omega)/\omega Y,$$

则

$$\left(\lambda\frac{L}{1+\Delta}+\frac{U}{1+\Delta}\right)Y=(\lambda+1-\omega)/\omega Y,$$

于是

$$\left(I-\omega\frac{L}{1+\Delta}\right)^{-1}\left((\omega-1)I+\omega\frac{U}{1+\Delta}\right)Y=\lambda Y.$$

令

$$L'_\Delta=\left(I-\omega\frac{L}{1+\Delta}\right)^{-1}\left((\omega-1)I+\omega\frac{U}{1+\Delta}\right),$$

即 λ 为 L'_Δ 之特征值，于是必有

$$\rho(L'_\Delta)\geqslant\lambda=\rho(\bar{L}_\omega).$$

因

$$L'_\Delta=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\omega\frac{L}{1+\Delta}\right)^k\left((\omega-1)I+\omega\frac{U}{1+\Delta}\right), \tag{2}$$

比较式(1)，(2)二式可知 $0\leqslant L'_\Delta\leqslant\bar{L}_\omega$，显然，对于非主对角线上的非零元素，右边不等号严格成立. 又由式(1)，(2)有

$$\bar{L}_\omega=(\omega-1)I+\omega U+\omega(\omega-1)L+\omega^2 LU+\sum_{k=2}^{\infty}(\omega L)^k((\omega-1)I+\omega U), \tag{3}$$

$$L'_{\Delta}=(\omega-1)I+\omega\frac{U}{1+\Delta}+\omega(\omega-1)\frac{L}{1+\Delta}+\omega^2\frac{LU}{(1+\Delta)^2}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\omega\frac{L}{1+\Delta}\right)^k\left((\omega-1)I+\omega\frac{U}{1+\Delta}\right), \tag{4}$$

令

$$P_{\omega}=\bar{L}_{\omega}-(\omega-1)I, \tag{5}$$

$$P'_{\Delta}=L'_{\Delta}-(\omega-1)I, \tag{6}$$

记 $\bar{B}=L+U$，则 $\bar{B}\geqslant 0$. 由式(3)—(6)可知

$$P_{\omega}>P'_{\Delta}>\min\{\omega,\omega(\omega-1)\}\frac{\bar{B}}{1+\Delta}$$

在所有非零元素处都成立. 于是存在 $\varepsilon>0$，使得 $P_{\omega}-P'_{\Delta}\geqslant\varepsilon P_{\omega}$，即 $(1-\varepsilon)P_{\omega}\geqslant P'_{\Delta}$，于是可得

$$(1-\varepsilon)\rho(P_{\omega})=\rho((1-\varepsilon)P_{\omega})\geqslant\rho(P'_{\Delta}).$$

若 $\rho(P_{\omega})>0$，则有 $\rho(P_{\omega})>\rho(P'_{\Delta})$，又由式(5)、(6)及前面推断 $(\lambda+1-\omega)/\omega\geqslant 0$ 知

$$\rho(P_{\omega})=\rho(\bar{L}_{\omega})-(\omega-1), \tag{7}$$

$$\rho(P'_{\Delta})=\rho(L'_{\Delta})-(\omega-1),$$

即得 $\rho(\bar{L}_{\omega})>\rho(P'_{\Delta})$ 与前面的推断 $\rho(\bar{L}_{\omega})\leqslant\rho(P'_{\Delta})$ 矛盾，故

$$\rho(\lambda L+U)=(\lambda+1-\omega)/\omega.$$

若 $\rho(P_{\omega})=0$，则由式(7)知 $\lambda=\rho(\bar{L}_{\omega})=\omega-1$，于是 $(\lambda+1-\omega)/\omega=(\omega-1+1-\omega)/\omega=0$. 而由式(3)和(5)有 $P_{\omega}\geqslant\min\{\omega,\omega(\omega-1)\}\bar{B}$，可知 $\rho(\bar{B})=0$. 又因 $\lambda L+U\leqslant(1+\lambda)(L+U)=(1+\lambda)\bar{B}$，则 $\rho(\lambda L+U)\leqslant(1+\lambda)\rho(\bar{B})=0$，即 $\rho(\lambda L+U)=0$. 故 $\rho(\lambda L+U)=(\lambda+1-\omega)/\omega$ 仍成立. 另外，当 $\lambda=0$ 时，有 $0\leqslant\rho(0\cdot L+U)=(1-\omega)/\omega\leqslant 0$，所以得 $\omega=1$. 证毕.

引理1 对矩阵 $\bar{B}=L+U$，$L\geqslant 0$，$U\geqslant 0$，设 $m(h)=\rho(hL+U)$，$n(h)=\rho(L+hU)$，其中 h 为非负实数，则 $m(h)$，$n(h)$ 为 h 的增函数.

证明 因对任意实数 $h_2\geqslant h_1\geqslant 0$，有 $0\leqslant h_1L+U\leqslant h_2L+U$，$0\leqslant L+h_1U\leqslant L+h_2U$，因此 $\rho(h_1L+U)\leqslant\rho(h_2L+U)$，$\rho(L+h_1U)\leqslant\rho(L+h_2U)$，即 $m(h_1)\leqslant m(h_2)$，$n(h_1)\leqslant n(h_2)$. 故 $m(h)$ 和 $n(h)$ 为增函数. 证毕.

引理2 设 Jacobi 阵 $B=L-U$ 中 $L\geqslant 0$，$U\geqslant 0$. 记 $\bar{B}=|B|=L+U$，则对于 $1\leqslant\omega\leqslant 2$ 有

i) 当 $\lambda=\rho(L_{\omega})<1$ 时有

$$\lambda+1-\omega\leqslant\omega\rho(\bar{B}), \tag{8}$$

$$\lambda\omega\rho(\bar{B})\leqslant\lambda+1-\omega,\quad \lambda\neq 0. \tag{9}$$

ii) 当 $\lambda=\rho(L_{\omega})>1$ 时有

$$\lambda+1-\omega\geqslant\omega\rho(\bar{B}), \tag{10}$$

$$\lambda\omega\rho(\bar{B})\geqslant\lambda+1-\omega. \tag{11}$$

iii) 当 $\lambda=\rho(L_{\omega})=1$ 时，有 $\rho(\bar{B})=(2-\omega)/\omega$.

证明 由定理1和引理1知 $m(\lambda)=\rho(\lambda L+U)=(\lambda+1-\omega)/\omega$，$m(h)$，$n(h)$ 为增函数.

i) 当 $\lambda=\rho(L_{\omega})<1$ 时，$(\lambda+1-\omega)/\omega=m(\lambda)\leqslant m(1)=\rho(L+U)=\rho(\bar{B})$，所以有 $\lambda+1-\omega\leqslant\omega\rho(\bar{B})$. 又因当 $\lambda\neq 0$ 时，$(\lambda+1-\omega)/(\lambda\omega)=(1/\lambda)\rho(\lambda L+U)=\rho(L+(1/\lambda)U)=n(1/\lambda)\geqslant n(1)=\rho(L+U)=\rho(\bar{B})$，所以有 $\lambda\omega\rho(\bar{B})\leqslant\lambda+1-\omega$.

同理可证 ii).

iii) 当 $\lambda=\rho(L_\omega)=1$ 时，有 $\rho(L+U)=(1+1-\omega)/\omega=(2-\omega)/\omega$，所以得 $\rho(\bar{B})=(2-\omega)/\omega$. 证毕.

定理 2　设 Jacobi 阵 $B=L-U$ 中 $L\geqslant 0, U\geqslant 0$，松弛因子 $1\leqslant\omega<2$. 记 $\bar{B}=|B|=L+U$，则有

i) $\rho(\bar{B})=0\Leftrightarrow\rho(L_\omega)=\omega-1$（对 $\Leftarrow$，$\omega\neq 1$）.

ii) $\rho(L_\omega)=1\Leftrightarrow\rho(\bar{B})=(2-\omega)/\omega$（对 $\Leftarrow$，$\omega\neq 1$）.（$\Leftarrow$ 即 $0<\rho(\bar{B})<1$，$\omega=2/(1+\rho(\bar{B}))$，则 $\rho(L_\omega)=1$）.

iii) $0<\rho(\bar{B})<1$，且 $1\leqslant\omega<2/(1+\rho(\bar{B}))\Rightarrow\rho(L_\omega)<1$.

iv) $0<\rho(\bar{B})<1$ 但 $2/(1+\rho(\bar{B}))<\omega<2\Rightarrow\rho(L_\omega)>1$.

v) $0<\rho(L_\omega)<1\,(1<\omega<2)\Rightarrow\rho(\bar{B})<1$.

vi) $\rho(\bar{B})\geqslant 1\Rightarrow\rho(L_\omega)>1\,(1<\omega<2)$.

vii) $\rho(L_\omega)|_{\omega=1}>1\Rightarrow\rho(\bar{B})\geqslant 1$.

证明　i) 当 $\rho(\bar{B})=0$ 时，反证，若 $\lambda=\rho(L_\omega)>1$，由引理 2 ii) 之式(11)有 $\lambda+1-\omega\leqslant 0$，得 $\lambda\leqslant\omega-1<1$，矛盾；若 $\rho(L_\omega)=1$，由引理 2 iii) 有 $\rho(\bar{B})=(2-\omega)/\omega>0$，矛盾. 所以 $\lambda=\rho(L_\omega)<1$. 由引理 2 i) 式(8)和(9)有 $\lambda+1-\omega\leqslant 0$ 和 $\lambda+1-\omega\geqslant 0$，因此 $\omega-1\leqslant\lambda\leqslant\omega-1$，即得 $\rho(L_\omega)=\omega-1$. 当 $\lambda=\rho(L_\omega)=\omega-1\neq 0$ 时，因 $\lambda=\omega-1<1$，由引理 2 i) 便得 $0=\lambda+1-\omega\leqslant\omega\rho(\bar{B})\leqslant(\lambda+1-\omega)/\lambda=0$，所以 $\rho(\bar{B})=0$.

ii) 由引理 2 iii) 便得 $\rho(L_\omega)=1\Rightarrow\rho(\bar{B})=(2-\omega)/\omega$. 当 $\rho(\bar{B})=(2-\omega)/\omega$ 且 $\omega\neq 1$. 反证，若 $\lambda=\rho(L_\omega)=0$，由定理 1 知 $\omega=1$ 与假设矛盾；若 $0<\lambda=\rho(L_\omega)<1$，由引理 2 i) 之式(9)有 $\lambda+1-\omega\leqslant\lambda\omega\rho(\bar{B})=\lambda\omega(2-\omega)/\omega=\lambda(2-\omega)$，推出 $\lambda(\omega-1)\geqslant\omega-1$，得 $\lambda\geqslant 1$，矛盾；若 $\lambda=\rho(L_\omega)>1$，由引理 2 ii) 之式(11)有 $\lambda+1-\omega\leqslant\lambda\omega\rho(\bar{B})=\lambda\omega(2-\omega)/\omega=\lambda(2-\omega)$. 推出 $\lambda(\omega-1)\leqslant\omega-1$，得 $\lambda\leqslant 1$，矛盾. 所以 $\rho(L_\omega)=1$.

iii) 当 $0<\rho(\bar{B})<1$ 且 $1\leqslant\omega<2/(1+\rho(\bar{B}))$ 时. 反证，若 $\rho(L_\omega)=1$，由 ii) 知 $\rho(\bar{B})=(2-\omega)/\omega$. 可得 $\omega=2/(1+\rho(\bar{B}))$，矛盾；若 $\lambda=\rho(L_\omega)>1$. 由引理 2 ii) 之式(11)得 $\lambda(1-\omega\rho(\bar{B}))\leqslant\omega-1$，由于 $1-\omega\rho(\bar{B})>1-(2/(1+\rho(\bar{B})))\rho(\bar{B})=(1-\rho(\bar{B}))/(1+\rho(\bar{B}))>0$，因此有 $(1-\omega\rho(\bar{B}))<\lambda(1-\omega\rho(\bar{B}))\leqslant\omega-1$，可得 $\omega>2/(1+\rho(\bar{B}))$，矛盾. 所以 $\rho(L_\omega)<1$.

iv) 当 $0<\rho(\bar{B})<1$ 且 $2/(1+\rho(\bar{B}))<\omega<2$ 时，反证，类似 iii) 证知若 $\rho(L_\omega)=1$ 可得 $\omega=2/(1+\rho(\bar{B}))$，矛盾；若 $\lambda=\rho(L_\omega)<1$，由引理 2 i) 之式(9)知

$$\lambda+1-\omega\geqslant\lambda\omega\rho(\bar{B}).$$
$$\lambda+1\geqslant\omega(\lambda\rho(\bar{B})+1)>(2/(1+\rho(\bar{B})))(\lambda\rho(\bar{B})+1),$$
$$(\lambda+1)(1+\rho(\bar{B}))>2\lambda\rho(\bar{B})+2,$$
$$\lambda+\lambda\rho(\bar{B})+1+\rho(\bar{B})>2\lambda\rho(\bar{B})+2,$$
$$\lambda(1-\rho(\bar{B}))>(1-\rho(\bar{B})),$$

得 $\lambda>1$ 与假设 $\lambda<1$ 矛盾. 所以 $\rho(L_\omega)>1$.

v) 当 $0<\lambda=\rho(L_\omega)<1\,(1<\omega<2)$ 时，由引理 2 i) 之式(9)有 $\rho(\bar{B})\leqslant(\lambda+1-\omega)/(\lambda\omega)$，因 $1<\omega<2$，于是有 $\lambda+1<(\lambda+1)\omega$，推出 $\lambda+1-\omega<\lambda\omega$，得 $(\lambda+1-\omega)/(\lambda\omega)<1$，即 $\rho(\bar{B})<1$.

iv) 当 $\rho(\bar{B})\geqslant 1$ 时，对于 $1<\omega<2$，若 $\rho(L_\omega)=1$ 由 ii) 知 $\rho(\bar{B})=(2-\omega)/\omega<1$，矛盾；若 $\rho(L_\omega)<1$，因 $\omega\neq 1$，由定理 1 知 $\lambda=\rho(L_\omega)>0$，再由 v) 可知 $\rho(\bar{B})<1$，矛盾. 所以 $\rho(L_\omega)>1$.

vii)当 $\lambda=\rho(L_\omega)|_{\omega=1}>1$ 时，由引理 2 ii)之式(11)便得 $\rho(\bar{B})\geqslant(\lambda+1-\omega)/(\lambda\omega)=(\lambda+1-1)/\lambda=\lambda/\lambda=1$. 证毕.

由引理 2 和定理 2 即得关于谱半径上下界的定理.

定理 3 设 Jacobi 阵 $B=L-U$ 中 $L\geqslant0,U\geqslant0$，松弛因子 $1\leqslant\omega<2$. 记 $\bar{B}=|B|=L+U$，则有

i)当 $\rho(\bar{B})<1$ 且 $1\leqslant\omega<2/(1+\rho(\bar{B}))$ 时，$(\omega-1)/(1-\omega\rho(\bar{B}))\leqslant\rho(L_\omega)\leqslant\omega(\rho(\bar{B})+1)-1$.

ii)当 $\rho(\bar{B})\geqslant1$ 且 $1<\omega<2$ 时，或 $0<\rho(\bar{B})<1$ 且 $2/(1+\rho(\bar{B}))\leqslant\omega<2$ 时，$\omega(1+\rho(\bar{B}))-1\leqslant\rho(L_\omega)$.

iii)当 $0<\rho(\bar{B})<1$ 且 $2/(1+\rho(\bar{B}))\leqslant\omega<1/\rho(\bar{B})$ 时，$\omega(1+\rho(\bar{B}))-1\leqslant\rho(L_\omega)\leqslant(\omega-1)/(1-\omega\rho(\bar{B}))$.

定理4 对于一般的Jacobi矩阵$B=L+U$，记$\bar{B}=|B|=|L|+|U|$，若$\rho(\bar{B})<1$，则有$\rho(L_\omega)<1(0<\omega<2/(1+\rho(\bar{B}))$，这里 $1<2/(1+\rho(\bar{B}))\leqslant2)$.

证明 对于 $B=L+U$ 有

$$L_\omega=(I-\omega L)^{-1}((1-\omega)I+\omega U), \tag{12}$$

而对于$|B|=|L|+|U|$有

$$L_\omega^+=(I-\omega|L|)^{-1}((1-\omega)I+\omega|U|). \tag{13}$$

记 $B=(b_{ij})$，则 $|B|=(|b_{ij}|)$，$L_\omega=(l_{ij})$，$L_\omega^+=(l_{ij}^+)$，$(I)_{ij}=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$，$U=(u_{ij})$.

1)当$0<\omega\leqslant1$时，因$|L|\geqslant0$，$|U|\geqslant0$，类似引理1中证明易知$L_\omega^+\geqslant0$. 由式(13)有$L_\omega^+=\omega|L|L_\omega^++(1-\omega)I+_\omega|U|$，于是有

$$l_{ij}^+=\omega\sum_{s=1}^{i-1}|b_{is}|l_{sj}^++(1-\omega)(I)_{ij}+\omega|u_{ij}|,\quad i,j=1,2,\cdots,n. \tag{14}$$

类似地由式(12)有

$$l_{ij}=\omega\sum_{s=1}^{i-1}b_{is}l_{sj}+(1-\omega)(I)_{ij}+\omega u_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,n. \tag{15}$$

于是

$$|l_{ij}|\leqslant\omega\sum_{s=1}^{i-1}|b_{is}||l_{sj}|+(1-\omega)(I)_{ij}+\omega|u_{ij}|,\quad i,j=1,2,\cdots,n. \tag{16}$$

由式(14)有 $l_{1j}^+=(1-\omega)(I)_{1j}+\omega|u_{1j}|$，$j=1,2,\cdots,n$，由式(16)有 $|l_{1j}|\leqslant(1-\omega)(I)_{1j}+\omega|u_{1j}|$，$j=1,2,\cdots,n$ 比较以上二式可知 $|l_{1j}|\leqslant l_{1j}^+$，$j=1,2,\cdots,n$. 归纳假设对于 $i\leqslant k-1$ 成立

$$|l_{ij}|\leqslant l_{ij}^+,\quad i=1,2,\cdots,k-1,j=1,2,\cdots,n. \tag{17}$$

对于 $i=k$，由式(14)和(16)有 $l_{kj}^+=\omega\sum_{s=1}^{k-1}|b_{ks}|l_{sj}^++(1-\omega)(I)_{kj}+\omega|u_{kj}|$，$j=1,2,\cdots,n$，$|l_{kj}|\leqslant\omega\sum_{s=1}^{k-1}|b_{ks}||l_{sj}|+(1-\omega)(I)_{kj}+\omega|u_{kj}|$，$j=1,2,\cdots,n$. 利用(17)式并比较以上二式可知 $|l_{kj}|\leqslant l_{kj}^+$，$j=1,2,\cdots,n$. 因此有 $|l_{ij}|\leqslant l_{ij}^+$，$i,j=1,2,\cdots,n$，即 $|L_\omega|\leqslant L_\omega^+$. 因此 $\rho(L_\omega)\leqslant\rho(L_\omega^+)$. 又因已知 $\rho(\bar{B})<1$，由文[1]定理 2 知 $\rho(L_\omega^+)<1$. 所以得 $\rho(L_\omega)\leqslant\rho(L_\omega^+)<1$.

2)当$1<\omega<2/(1+\rho(\bar{B}))$时，因$\rho(\bar{B})=\rho(|L|+|U|)<1$，由定理2知对于$B^*=|L|-|U|$之逐次松弛矩阵$L_\omega^*$有$\rho(L_\omega^*)<1$，而$L_\omega^*=(I-\omega|L|)^{-1}((1-\omega)I-\omega|U|)=-(I-$

$\omega|L|)^{-1}((\omega-1)I+\omega|U|)\overset{\text{记}}{=}-\bar{L}_\omega$ 则 $\rho(\bar{L}_\omega)=\rho(-L_\omega^*)=\rho(L_\omega^*)<1$. 由定理 1 证明易知 $\bar{L}_\omega=(I-\omega|L|)^{-1}((\omega-1)I+\omega|U|)\geqslant 0$, 推得

$$\bar{L}_\omega = \omega|L|\bar{L}_\omega + (\omega-1)I + \omega|U|.$$

记 $\bar{L}_\omega=(\bar{l}_{ij})$，于是有

$$\bar{l}_{ij} = \omega\sum_{s=1}^{i-1}|b_{is}|\bar{l}_{sj} + (\omega-1)(I)_{ij} + \omega|u_{ij}|, \quad i,j=1,2,\cdots,n. \tag{18}$$

对于 L_ω，由式(12)，(15)有

$$|l_{ij}| \leqslant \omega\sum_{s=1}^{i-1}|b_{is}||l_{sj}| + (\omega-1)(I)_{ij} + \omega|u_{ij}|, \quad i,j=1,2,\cdots,n. \tag{19}$$

这样得到了完全类似式(14)，(16)的二个式子，依照上面证法，由(18)，(19)二式可推出 $|l_{ij}|\leqslant\bar{l}_{ij}, i,j=1,2,\cdots,n$，即 $|L_\omega|\leqslant\bar{L}_\omega$. 所以 $\rho(L_\omega)\leqslant\rho(\bar{L}_\omega)<1$. 证毕.

参　考　文　献

〔1〕王新民，关于 L_ω 敛散性的定理，计算数学，2，1(1980).

〔2〕瓦格，矩阵迭代分析，上海科技出版社，(1966).

On the New Theorem of the Convergence and Divergence of L_ω

Chen Hengxin

(Department of Management Information Science)

Abstract　For the successive relaxation matrix of Jacobi matrix $B=L-U$ (L,U are nonegative matrices), this paper demonstrates that its convergence and divergence depend upon matrix $L+U$, and gives the inequalities for estimating upper and lower bounds of spectral radius in relaxation matrix. For the successive relaxation matrix of common Jacobi matrix B, this paper demonstrates that in case the spectral radius of $|B|$ is less than 1, that of relaxation matrix will also be less than 1. Here the relaxation factor is in the range of 0 and C, a number greater than 1.

Key words　relaxation matrix, convergence, divergence