第13卷 第2期
华侨大学学报自然科学版
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
(NATURAL SCIENCE)
Vol. 13 No. 2
1992年4月
Apr. 1992

非平方损失函数下加速寿命试验的Bayes估计*

陈 建 伟

(管理信息科学系)

摘要 本文在先验分布为指数Beta分布场合下,给出了恒定应力加速寿命试验参数在非平方损失函数下的Bayes估计,通过一个数值例子并叙述了使用这种方法的全过程.

关键词 加速寿命试验,贝叶斯估计,指数贝塔分布,非平方损失函数

0 前言

在指数分布场合下,Degroot讨论了加速寿命试验的Bayes估计,Zhang Hao在平方损失函数下讨论了两类加速寿命试验的Bayes估计.考虑到实际问题的需要,对损失函数应加上测度不变性的要求.本文取损失函数 $L(\bar{\lambda},\lambda)=\lambda^{l}(\bar{\lambda}-\lambda)^{2}(l<0)$,在失效率的先验分布为指数Beta分布情况下,基于定数右截尾数据,讨论了恒定应力加速寿命试验的各项可靠性指标的Bayes估计,并给出表达式,同时通过实例说明文中所给方法具有一定的实用价值.

1 参数的Bayes估计

在恒定应力加速寿命试验停止后,得到样品的失效时间,接着就要进行统计分析假定I,在正常应力水平 S_0 和加速应力水平 $S_1,S_2,\cdots,S_m$ 下,产品的寿命服从指数分布,即

$$F_i(t|\lambda_i)=1-e^{\lambda_i t},\qquad t\geqslant 0,\qquad i=\overline{0,m},$$

其中 $\lambda_i>0$ 是失效率,服从验前指数Beta分布,即

$$B(\lambda_i;\alpha_i,\beta_i)=\frac{1}{B(\alpha_i,\beta_i)}e^{-\alpha_i\lambda_i}(1-e^{-\lambda_i})^{\beta_i-1},\alpha_i>0\qquad \beta_i\text{为正整数},\qquad i=\overline{1,m},$$

假定Ⅱ,产品的平均寿命 $Q=1/\lambda$ 与所加应力水平具有 $\ln Q=a+b\varnothing(S)$ 的关系,其中 a 与 b 是未

本文1990-01-18收到.

* 福建省科研基金资助的项目.

知常数，$\varnothing(S)$是S的已知函数.

记　$M(n,r)$表示容量为n，截尾数为r的定数右截尾试验；$M\{(n_1,r_1),\cdots,(n_k,r_m)\}$则表示每组容量分别为$n_i$，$(i=\overline{1,m})$且在加速应力$S_i$，$(i=\overline{1,m})$下的定数右截尾恒定应力加速寿命试验，截尾数分别为$r_1,\cdots,r_m$.

定理　设$t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_r$为试验$M(n,r)$下的一个样本，若$r+l+1>0$，损失函数$L(\tilde{\lambda},\lambda)=\lambda^l(\tilde{\lambda}-\lambda)^2$，$-2\leqslant l\leqslant 0$，则$\lambda$的 Bayes 估计为

$$\tilde{\lambda}=(l+r+1)A_{r+l+1}/A_{r+l},$$

其中

$$A_{r+i}=\sum_{j=0}^{\beta-1}(-1)^j\binom{\beta-1}{j}\Big/(u+\alpha+j)^{r+1+i};\qquad i=l,l+1,$$

$$u=t_1+t_2+\cdots+t_r+(n-r)t_r.$$

证明　由假定I得

$$f(t_1,\cdots,t_r/\lambda)=\frac{n!}{(n-r)!}\lambda^r e^{-\lambda u},$$

所以

$$f(t_1,\cdots,t_r;\lambda)=f(t_1,\cdots,t_r/\lambda)B(\lambda;\alpha,\beta)=\frac{n!}{(n-r)!}\lambda^r e^{-\lambda u}\frac{1}{B(\alpha,\beta)}e^{-\alpha\lambda}(1-e^{-\lambda})^{\beta-1}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!B(\alpha,\beta)}\lambda^r e^{-(u+\alpha)\lambda}(1-e^{-\lambda})^{\beta-1},$$

$$g(t_1,\cdots,t_r)=\int_0^\infty f(t_1,\cdots,t_r;\lambda)d\lambda=\frac{n!}{(n-r)!B(\alpha,\beta)}\int_0^\infty\lambda^r e^{-(u+\alpha)\lambda}(1-e^{-\lambda})^{\beta-1}d\lambda,$$

因而λ的后验密度为

$$h(\lambda/t_1,\cdots,t_r)=\frac{f(t_1,\cdots,t_r;\lambda)}{g(t_1,\cdots,t_r)}=\frac{\lambda^r e^{-(u+\alpha)\lambda}(1-e^{-\lambda})^{\beta-1}}{\int_0^\infty\lambda^r e^{-(u+\alpha)\lambda}(1-e^{-\lambda})^{\beta-1}d\lambda}.$$

从而

$$E(\lambda^l/t_1,\cdots,t_r)=\frac{\int_0^\infty\lambda^{r+l}e^{-(u+\alpha)\lambda}(1-e^{-\lambda})^{\beta-1}d\lambda}{\int_0^\infty\lambda^r e^{-(u+\alpha)\lambda}(1-e^{-\lambda})^{\beta-1}d\lambda}.$$

其中

$$\text{分母}=\sum_{j=0}^{\beta-1}(-1)^j\binom{\beta-1}{j}\int_0^\infty\lambda^r e^{-(u+\alpha+j)}d\lambda$$

$$=\Gamma(r+1)\sum_{j=0}^{\beta-1}(-1)^j\binom{\beta-1}{j}\Big/(u+\alpha+j)^{r+1}\triangleq\Gamma(r+1)A_r,$$

$$\text{分子}=\Gamma(r+l+1)\sum_{j=0}^{\beta-1}(-1)^j\binom{\beta-1}{j}\Big/(u+\alpha+j)^{r+l+1}\triangleq\Gamma(r+l+1)A_{r+l},$$

故

$$E(\lambda^l/t_1,\cdots,t_r)=\frac{\Gamma(r+l+1)A_{r+l}}{\Gamma(r+1)A_r}.$$

由 $L(\tilde{\lambda},\lambda)$ 的表达式可知估计 $\tilde{\lambda}$ 的后验风险为

$$R(\tilde{\lambda}) = E(L(\tilde{\lambda},\lambda)) = \tilde{\lambda}^2 E(\lambda^l) - 2\tilde{\lambda}E(\lambda^{l+1}) + E(\lambda^{l+2}),$$

故 $R(\tilde{\lambda})$ 是关于 $\tilde{\lambda}$ 的抛物线函数,因 $E(\lambda^l)>0$,所以 $R(\tilde{\lambda})$ 必有唯一的最小值,其最小值点为

$$\tilde{\lambda} = \frac{E(\lambda^{l+1})}{E(\lambda^l)} = \frac{\Gamma(r+l+2)A_{r+l+1}}{\Gamma(r+1)A_r} \cdot \frac{\Gamma(r+1)A_r}{\Gamma(r+l+1)A_{r+l}},$$

$$= (r+l+1)A_{r+l+1}/A_{r+l},$$

故在损失函数为 $L(\tilde{\lambda},\lambda)=\lambda^l(\tilde{\lambda}-\lambda)^2$ 下,λ 的 Bayes 估计为

$$\tilde{\lambda} = (r+l+1)A_{r+l+1}/A_{r+l},$$

相应的最小后验风险为

$$R(\tilde{\lambda}) = \frac{E(\lambda^l)E(\lambda^{l+2}) - [E(\lambda^{l+1})]^2}{E(\lambda^l)}$$

$$= \frac{\Gamma(l+r+2)}{\Gamma(r+1)A_r}\left[(l+r+2)A_{r+l+2} - \frac{(r+l+1)A^2_{r+l+1}}{A_{r+l}}\right]$$

$$= \frac{(l+r)!}{r!A_r \cdot A_{r+l}}\left[\frac{(l+r+2)A_{r+l+2} \cdot A_{r+l}}{r+l+1} - A^2_{r+l+1}\right].$$

推论 1 当先验分布为不恰当的均匀分布 $U(0,\infty)$ 时,即 $\pi(\lambda)=e^{-\lambda}$ 的先验分布为 $U(0,1)$. 在损失函数为 $L(\tilde{\lambda},\lambda)=\lambda^l(\tilde{\lambda}-\lambda)^2$ 下,失效率 λ 的 Bayes 估计为

$$\tilde{\lambda} = l + r + 1,$$

最小后验风险为

$$R(\tilde{\lambda}) = \frac{(l+r)!}{r!(r+l+1)}.$$

推论 2 在试验 $M\{(n_1,r_1),\cdots,(n_m,r_m)\}$ 下,若 $\min\limits_{i=1,m}\{r_i+l+1\}>0$,则相应于损失函数 $L(\tilde{\lambda}_i,\lambda)=\lambda_i^l(\tilde{\lambda}_i-\lambda_i)^2$ 的 λ_i 的 Bayes 估计为

$$\tilde{\lambda}_i = (l+r_i+1)\frac{A_{r_i+l+1}}{A_{r_i+1}}, \qquad 0 \leqslant l \leqslant -2,$$

最小后验风险为

$$R(\tilde{\lambda}_i) = \frac{(l+r_i)!}{r_i!A_{r_i}A_{r_i+l}}\left[\frac{(l+r+2)A_{r_i+l+2}A_{r_i+l}}{r_i+l+1} - A^2_{r_i+l+1}\right],$$

其中函数 $A_{r_i+k}(k=0,l,l+1,l+2)$ 记为

$$A_{r_i+k} = \sum_{j=0}^{\beta_i-1}(-1)_j\binom{\beta_i-1}{j}\Big/(u_i+\alpha_i+j)^{r_i+l+k},$$

$$u_i = t_1 + \cdots + t_{r_i} + (n_i - r_i)t_{r_i}.$$

由假定 I 得

$$\ln(1/\lambda_i) = a + b\varnothing(S_i), \qquad i = \overline{1,m},$$

利用推论得到的数组 $(\tilde{\lambda}_1,S_1),\cdots,(\tilde{\lambda}_m,S_m)$,可得未知参数 a 和 b 的最小二乘估计

$$\hat{a} = \bar{e} - \bar{c}\hat{b}, \qquad \hat{b} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m}[\varnothing(S_i) - \bar{c}][-\ln\tilde{\lambda}_i - \bar{e}]}{\sum\limits_{j=1}^{m}[\varnothing(S_i) - \bar{c}]^2},$$

其中

$$\bar{c}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\varnothing(S_i),\quad \bar{e}=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\ln\hat{\lambda}_i$$

由此应用恒定应力加速寿命所得数据，再由式(4)，(5)可得在正常应力 S_0 下 λ_0 的估计

$$\hat{\lambda}_0=\exp\{-[\hat{a}+\hat{b}\varnothing(S_0)]\}.$$

2 各项可靠性指标的估计及实例分析

应用定理及推论的结论，可得部件所有的可靠性指标的估计：(1)平均寿命 $\hat{\theta}=1/\lambda_0$；(2)加速系数 $\hat{\tau}_{s_i-s_0}=\hat{\lambda}_i/\lambda_0,(i=\overline{1,m})$；(3)可靠度 $\hat{R}(t)=e^{-\hat{\lambda}_0 t}$；(4)可靠寿命 $\hat{t}(p)=-(1/\lambda_0)\ln p$，($p$ 为给定值).

下面举实例说明上述方法的实际计算意义.

设某型号钽电解电容器在适当的温度下的寿命近似服从指数分布，现对其进行恒定应力无替换定数右截尾加速寿命试验，取绝对温度作为应力水平，有关测试的数据如表 1 所示.

表 1 各种应力水平下电容器的试验结果*

应力水平 $S(k)$	投入测试容量	截尾数	试验结果(h)
$S_1=358$	$n_1=60$	$r_1=26$	$u_1=165337.67$
$S_2=398$	$n_2=60$	$r_2=33$	$u_2=20236.1$
$S_3=423$	$n_3=20$	$r_3=12$	$u_3=2185.32$
$S_4=448$	$n_4=20$	$r_4=14$	$u_4=1287.2$

* 其中正常应力 $S_0=323$.

选取 λ_i 的先验分布为不恰当均匀分布 $U(0,\infty)$，即 $\alpha_i=0,\beta_i=1(i=\overline{1,4})$. $\varphi(S)$ 与 S 的函数关系为 $\varphi(S_i)=3/2S_i,(i=\overline{1,4})$.

对二组 l 的值，分别利用式(3)，(4)，(5)计算参数和加速系数的估计值，由计算机程序计算得结果如表 2.

表 2 参数和加速系数的估计值

参 数	$\hat{Q}_0$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\tau}_{s_1-s_0}$	$\hat{\tau}_{s_2-s_0}$	$\hat{\tau}_{s_3-s_0}$	$\hat{\tau}_{s_4-s_0}$
$l=0$ 相应的估计值	11285.4	−25.151	7621.83	5.247	59.456	259.21	519.18
$l=-2$ 相应的估计值	12531.6	−25.4198	7725.5	7.154	63.235	261.10	551.45

在实际应用中可针对不同的要求适当地选取损失函数，以便使估计尽可能地满意. 注意到此时的损失函数具有测度不变性，因而更具有实际意义. 先验分布中的参数估计可按文[4]的方法利用边缘分布来确定.

参 考 文 献

[1] Degroot, M. H. and Gool, P. K., *Naval Research Logistic Quartarly*, 26, (1979), 223—236.

[2] Chen Ping, *Mathematical Statistics and Applied Probability*, 3, 4(1988), 353—358.

[3] Wu Shaomin, *JOHU Natural Science*, 19, 3(1988), 293—300.

Bayes Parammetric Estimate in Accelerated Life Testing under Nonquadratic Loss Function

Chen Jianwei

(*Department of Management Information Science*)

Abstract This paper deals with Bayes estimate of the parammeters in constant stress accelerated life testing on the occasion of exponential distribution. Assuming a priori distribution to be exponential beta-distribution, Bayes parammetric estimate in constant stress accelerated life testing is given under non-quadratic loss function. The whole process of applying the method is exemplified numerically.

Key words accelerated life test, Bayes estimations, exponential beta-distribution, nonquadratic loss function