

# 圆柱体坯料超塑性压缩变形力的新计算公式

张锦云 姚祖斌

(精密机械工程系)

**摘要** 本文在主应力法的基础上,考虑变形的不均匀性因素,推导出新的圆柱体坯料超塑性压缩载荷计算公式,与原公式相比,其计算值更接近实值。

**关键词** 超塑性压缩,变形力,不均匀性

## 0 前言

文献[1]采用主应力法推导圆柱体坯料超塑性压缩变形力计算公式,为了解题之便,其中对金属的超塑性流动作如下假设:(1)金属在上下刚性平板之间压缩时,是轴对称地均匀流动,变形后仍然保持为圆柱体,没有鼓形;(2)圆柱体坯料与平板接触的摩擦剪切应力为常数;(3)在沿金属流动方向的中性面高度上,应力是均匀分布的,且为主应力。实际上,圆柱体经超塑性压缩成形后,存在着鼓度,由剪应力互等定理可知,存在着径向剪应力 $\tau_r$ ,则必然在与径向相垂直的轴向上有一剪应力 $\tau_z$ 与之相等,因此径向应力不可能为主应力。据此,作者试图把变形不均匀性因素考虑进去,推导出新的载荷计算公式。

## 1 金属超塑性变形的基本假设

在求金属的超塑性压缩变形力时,类似于一般金属塑性变形,可作如下一些基本假设:(1)金属材料是各向同性的;(2)超塑性变形时材料是不可压缩的,即 $\dot{\epsilon}_s = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_3 = 0$ ;(3)材料不发生加工硬化,弹性变形很小,可以忽略,塑性变形符合 *Mises* 屈服准则;(4)应变速率与所加的静水压力无关。

根据上述假设,超塑性状态下的金属在多向受力的情况下,其应力和应变速率的关系可用如下方程式表达为

$$\sigma_s = \left[ \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

• 本文1990-10-15收到。

$$= [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

$$\dot{\epsilon}_e = \left[ \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \right]^{\frac{1}{2}} \\ = \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} [\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_3^2 + 2(\dot{\epsilon}_{12}^2 + \dot{\epsilon}_{23}^2 + \dot{\epsilon}_{31}^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

式中,  $\sigma_e$  为等效应力;  $\dot{\epsilon}_e$  为等效应变速率;  $\sigma_{ij}$  为应力张量;  $S_{ij}$  为应力偏张量;  $\dot{\epsilon}_{ij}$  为应变速率张量.

## 2 圆柱体坯料在超塑性压缩状态下变形力新公式的推导

### 2.1 利用体积不变条件

$$\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z = 0, \quad (3)$$

式中  $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\epsilon}_z$  分别为径向、周向、轴向应变速率. 径向和周向应变速率可分别表示为

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{du_r}{dr}; \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{u_\theta}{r}, \quad (4)$$

式中,  $r$  为径向半径值;  $u_r$  为沿径向位移速度分量. 把式(4)代入式(3), 得

$$\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} = -\dot{\epsilon}_z,$$

或

$$\frac{d(r u_r)}{r dr} = -\dot{\epsilon}_z. \quad (5)$$

上模板以  $(-V)$  速度下压, 试样每瞬时的应变为

$$d\dot{\epsilon}_z = dh/h \quad (h: \text{瞬时高度}),$$

轴向应变速率为

$$\dot{\epsilon}_z = d\dot{\epsilon}_z/dt = -v/h, \quad (6)$$

考虑到变形的不均匀性, 设

$$\dot{\epsilon}_z = -v/h + c(z - h/2) \quad (7)$$

其中,  $c$  为待定系数,  $0 \leq z \leq h/2$ . 设方程(5)的解为  $u_r = f_1 r z + f_2 r$ , 得

$$f_1 z + f_2 = -\frac{\dot{\epsilon}_z}{2} = \frac{v}{2h} - \frac{c}{2} \left( z - \frac{h}{2} \right),$$

所以

$$f_1 = -\frac{c}{2}, \quad f_2 = \frac{v}{2h} + \frac{ch}{4},$$

$$u_r = -\frac{c}{2} r z + \left( \frac{v}{2h} + \frac{ch}{4} \right) r,$$

各应变分量如下

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= -cz/2 + v/2h + ch/4, \\ \dot{\epsilon}_\theta &= -cz/2 + v/2h + ch/4, \\ \dot{\epsilon}_z &= -v/h + c(z - h/2), \\ \dot{\epsilon}_{rz} &= -cr/2. \end{aligned} \quad (8)$$

### 2.2 利用物理方程

根据圣维南应力-应变速率方程

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3\dot{\epsilon}_e}{2\sigma_e} S_{ij} \quad (9)$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= (3/2) \frac{\dot{\epsilon}_e}{\sigma_e} S_r, \\ \dot{\epsilon}_\theta &= (3/2) \frac{\dot{\epsilon}_e}{\sigma_e} S_\theta, \\ \dot{\epsilon}_z &= (3/2) \frac{\dot{\epsilon}_e}{\sigma_e} S_z, \\ r_{rz} &= 3 \frac{\dot{\epsilon}_e}{\sigma_e} S_{rz}, \end{aligned} \quad (10)$$

式中,  $S_r, S_\theta, S_z, S_{rz}$  为应力偏量. 因为  $\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_\theta$ , 所以  $S_r = S_\theta$ , 则

$$\sigma_r = \sigma_\theta. \quad (11)$$

### 2.3 利用边界条件

在端面上所受的力为  $p$ , 即

$$\sigma_z|_{z=h/2} = -p, \quad (12)$$

假设整个端面均为制动区, 则有

$$\sigma_{rz}|_{z=h/2} = -\tau_e, \quad (13)$$

式中,  $\tau_e$  为材料剪切屈服极限. 利用式(1), 计算  $\sigma_e$  得

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2(\sigma_r + p)^2 + 6\tau_e^2} = \sqrt{(\sigma_r + p)^2 + 3\tau_e^2}, \quad (14)$$

利用式(2), 计算  $\dot{\epsilon}_e$

$$\dot{\epsilon}_e = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{2(\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta)^2 + \frac{3}{2}\dot{\epsilon}_z^2} = \sqrt{\left(\frac{v}{h}\right)^2 + \frac{(\sigma r)^2}{12}}. \quad (15)$$

### 2.4 利用平衡方程

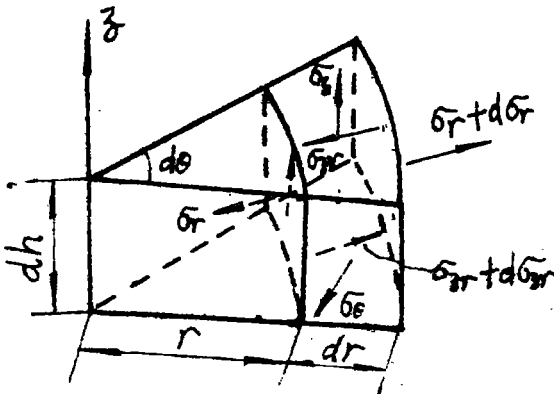


图1 微分体在圆柱坐标中各应力分量示意图

如图1所示, 沿径向平衡有  $(r + dr) d\theta dh (\sigma_r + d\sigma_r) - r d\theta dh \sigma_r + r d\theta dr d\sigma_{\theta r} - 2\sigma_{\theta r} dr dh \sin \frac{d\theta}{2} = 0$ , 即

$$\begin{aligned} r d\sigma_r + \sigma_r dr - \sigma_{\theta r} dr \\ + r dr \frac{d\sigma_{\theta r}}{dh} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

假设剪应力沿轴向呈线性分布, 即

$$\frac{d\sigma_{\theta r}}{dh} = -\frac{2\tau_e}{h}, \quad (17)$$

把式(7)代入方程(16),得 $(\sigma_r - \sigma_\theta - \frac{2\tau_s}{h}r)dr + r d\sigma_r = 0, \frac{2\tau_s}{h}rdr = r d\sigma_r$ ,积分,得

$$\sigma_r = \frac{2\tau_s}{h}r + c'. \quad (18)$$

由于最外缘处径向应力为零,即 $\sigma_r|_{r=R}=0$ ,所以

$$c' = -\frac{2\tau_s}{h}R, \quad (19)$$

把式(19)代入式(18),得

$$\sigma_r = 2 \cdot \frac{\tau_s}{h}(r - R). \quad (20)$$

## 2.5 利用超塑性状态方程

超塑性状态方程为

$$\sigma_s = K\dot{\epsilon}_s^m, \quad (21)$$

式中, $K$ 为材料系数; $m$ 为应变速率敏感性系数.由式(10)得

$$S_s = \frac{2}{3} \frac{\sigma_s}{\dot{\epsilon}_s} \dot{\epsilon}_s = \frac{2}{3} K \dot{\epsilon}_s^{m-1} \dot{\epsilon}_s, \quad (22)$$

$$S_s = \frac{2}{3} (\sigma_s - \sigma_r), \quad (23)$$

$$\dot{\epsilon}_s|_{s=\frac{h}{2}} = -\frac{v}{h}, \quad \sigma_s|_{s=\frac{h}{2}} = -p, \quad (24)$$

把式(23)、(24)代入式(22)得,

$$\begin{aligned} p &= -\sigma_r + K[(\frac{v}{h})^2 + \frac{(cr)^2}{12}]^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{v}{h} \\ &= \frac{2\tau_s}{h}(R-r) + K[(\frac{v}{h})^2 + \frac{(cr)^2}{12}]^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{v}{h}. \end{aligned} \quad (25)$$

试样表面的总压力为

$$\begin{aligned} P &= \int_0^R \int_0^{2\pi} p r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^R \{ \frac{2\tau_s}{h}(R-r) + K[(\frac{v}{h})^2 + \frac{(cr)^2}{12}]^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{v}{h} \} r dr \\ &= 2\pi \{ \frac{\tau_s R^3}{3h} + \frac{12Kv}{hc^2(m+1)} \{ [(\frac{v}{h})^2 + \frac{(cr)^2}{12}]^{\frac{m+1}{2}} - (\frac{v}{h})^{m+1} \} \}, \end{aligned}$$

把 $\tau_s = (P/\pi R^2)f$ 代入上式,得

$$P = \frac{72K\pi \{ [(\frac{v}{h})^2 + \frac{c^2 R^2}{12}]^{\frac{m+1}{2}} \cdot \frac{v}{h} - (\frac{v}{h})^{m+1} \}}{c^2(m+1)(3 - \frac{2fR}{h})}, \quad (26)$$

经曲线拟合,得 $c = 8 \times 10^{-4} \sqrt[3]{f(1-m)}$ .

## 3 分析讨论

### 3.1 端面轴向应力比较

主应力法得出

$$p_{\pm} = -\sigma_r + K(v/h)^m, \tag{27}$$

其中,两种方法得出的  $\sigma_r$  相同.

$$\begin{aligned} p_{\pm} - p &= K(\frac{v}{h})^m - K\frac{v}{h}[(\frac{v}{h})^2 + \frac{c^2R^2}{12}]^{\frac{m-1}{2}} \\ &= K(\frac{v}{h})^m[1 - (\frac{v}{h})^{1-m}(\frac{v^2}{h^2} + \frac{c^2R^2}{12})^{\frac{m-1}{2}}] \\ &= K(\frac{v}{h})^m\{1 - [\frac{1}{1 + \frac{1}{12}(\frac{crh}{v})^2}]^{\frac{1-m}{2}}\}. \\ 1 + \frac{1}{12}(\frac{crh}{v})^2 &> 1, \quad \frac{1-m}{2} > 0, \end{aligned} \tag{28}$$

所以  $p_{\pm} - p > 0$ , 即  $p_{\pm} > p$ .

用主应力法算出的载荷与用上限法算出的载荷相等,因此,用主应力法计算出的载荷应该比实际载荷大. 确定合适的参数  $C$  可以使载荷值得到修正.

3.2 两种计算方法的实际比较

主应力法的计算公式为

$$P = \pi R^2 \cdot K(v/h)^m / (1 - 2fR/3h). \tag{29}$$

两种方法的计算结果与实验值的比较见表1,表2或图2,图3(试样尺寸  $\varnothing 8 \times 8, K=100, m=0.37$ ).

表1 A 润滑剂 ( $f=0.06$ ),  $475^{\circ}\text{C}$ ,  $v=0.00455\text{mm/s}$   
条件下两种计算结果与实验值的比较(t)

| 行程(mm) | 新 公 式 |       | 主 应 力 法 |      | 实 验 结 果 |
|--------|-------|-------|---------|------|---------|
|        | 计 算 值 | 误 差   | 计 算 值   | 误 差  |         |
| 0.76   | 0.35  | -0.01 | 0.37    | 0.01 | 0.36    |
| 1.45   | 0.40  | 0.04  | 0.43    | 0.07 | 0.36    |
| 2.64   | 0.53  | 0.09  | 0.58    | 0.14 | 0.44    |
| 3.61   | 0.71  | 0.11  | 0.80    | 0.20 | 0.60    |
| 4.40   | 0.95  | 0.10  | 1.11    | 0.26 | 0.85    |
| 5.06   | 1.29  | -0.14 | 1.61    | 0.18 | 1.43    |

表2 D 润滑剂 ( $f=0.026$ ),  $475^{\circ}\text{C}$ ,  $v=0.00374\text{mm/s}$   
条件下,两种计算结果与实验值的比较(t)

| 行程(mm) | 新 公 式 |       | 主 应 力 法 |       | 实 验 结 果 |
|--------|-------|-------|---------|-------|---------|
|        | 计 算 值 | 误 差   | 计 算 值   | 误 差   |         |
| 0.76   | 0.33  | -0.10 | 0.34    | -0.09 | 0.43    |
| 1.48   | 0.38  | -0.02 | 0.40    | 0.00  | 0.40    |
| 2.61   | 0.50  | 0.04  | 0.53    | 0.07  | 0.46    |
| 3.57   | 0.67  | 0.09  | 0.70    | 0.12  | 0.58    |
| 4.36   | 0.88  | 0.06  | 0.95    | 0.13  | 0.82    |
| 5.01   | 1.18  | -0.02 | 1.29    | 0.09  | 1.20    |

由表1可知,新公式计算值误差的平方和为0.0515,主应力法计算值误差的平方和为0.1646,后者大于前者,故新公式的计算值较为接近实值. 由表2可知,新公式计算值误差的平方和为0.0241,主应力法计算值误差的平方和为0.0524,同理可得出上述结论.

行程较大时,主应力法计算值与实值有较大的差距.由式(29)可知,当  $R/h=3/2f$  时,计算载荷为无穷大.如无润滑时,  $f=0.5$ ,则  $R/h=3$  时,计算载荷值就可达到无穷大.当  $R/h>3/2f$  时,计算载荷将出现负值;当  $R/h$  值在  $3/2f$  附近时,计算载荷的绝对值非常之大.因此,主应力法公式比较适用于小摩擦系数的载荷计算,且变形量不宜太大,由式(26)可看出,新公式的分子有差项,因此  $R/h$  值就可以比较大.如在表2的条件下,当行程为7.15mm时,新公式的计算值为9.86t,主应力法的计算值为49.57t,实验结果为9.51t.

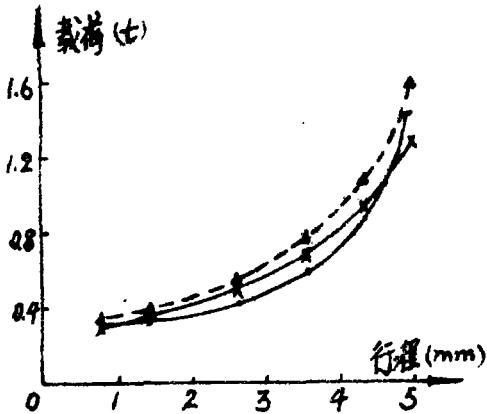


图2 表1条件下三种曲线的比较

△—主应力法曲线; ×—新公式曲线; —实验曲线

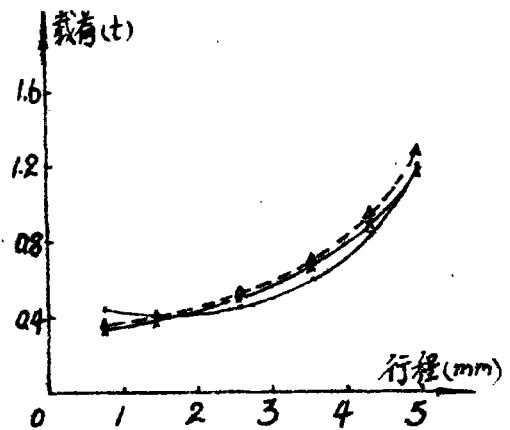


图3 表2条件下三种曲线的比较

△—主应力法曲线; ×—新公式曲线; —实验曲线

#### 4 结论

新公式溶进了变形不均匀因素,故其计算值更为接近实值.主应力法公式计算值不如新公式计算值准确,且其适用范围受较大的限制,比较适用于摩擦系数较小,变形量不太大的情况下的计算.新公式的适用范围比较大.

#### 参 考 文 献

- (1) 张程勇,超塑性状态下压缩金属圆柱体坯料变形力的计算,热加工工艺,3(1985).
- (2) 徐秉业等,塑性理论简明教程,清华大学出版社,(1981).

### A New Formula for Computing the Strain Forces of Cylinder Blank under Superplastic Compression

Zhang Jinyun Yao Zubin

(Department of Precision Mechanical Engineering)

**Abstract** For computing the superplastic compressive load, a new formula is derived by taking into account the inhomogeneity as a contributing factor of deformation, and based on the method of principle stress. As compared with the original formula, the new formula provides a calculated value even more close to the real value.

**Key words** superplastic compression, strain forces, inhomogeneity