第13卷 第1期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 13 No. 1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年1月 (NATURAL SCIENCE) Jan. 1992

结构动力分析一种简易的直接积分法

林 建 华

(土木工程系)

摘要 本文利用方块脉冲函数优良的运算性质,提出一种结构动力分析简易的直接积分法——方块脉冲函数法,具有无条件稳定的积分格式,并表明方法的可行和有效.

关键词 结构动力学,脉冲函数,数值计算

0 前言

任意荷载作用下结构体系的动力反应可以归结于求解型如

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{P\} \tag{1}$$

的二阶微分方程组.现有的数值逐步积分解法,如威尔逊 θ 法、纽马克 β 法或呼伯特法等,都在结构的动力分析中得到广泛的应用.评价任何一种直接积分法,除了考虑该方法的稳定性和精度要求之处,另一个主要因素是该方法的简易程度,因为它涉及到是否于被工程上所接受.基此目的,本文提出一种简易而新的结构体系动力分析的数值方法——应用方块脉冲函数优良运算性质[1]的方块脉冲函数法,方便地导出有限自由度体系在任意荷载作用下动力反应各时刻的位移、速度、加速度递推公式.该公式对于非等时间隔时段来说,同样不会增加计算的复杂性.此外,进一步从理论上证明了该方法为无条件稳定.最后通过数字算例,表明采用方块脉冲函数法,具有计算方便、适应性广、精度较好的优点,不失为一种简便而有效的直接求解结构动力反应的数值积分法.

1 方块脉冲函数

1.1 时间域上非等宽方块脉冲函数的定义和性质[1]

设在时间域 $[t_0,t_m]$ 上包含有 m 个不等宽的方块脉冲函数族,其矩阵表达式定义为

$$G(t)=[g_1(t),g_2(t),\cdots,g_m(t)]^T,\qquad t\in[t_0,t_m], \tag{2}$$

其中第 k 个元素定义为

* 本文1990-06-18收到.

$$g_k(t)=\begin{cases}1, t\in[t_{k-1},t_k],\\ 0,\ 其它,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots,m, \tag{3}$$

那么对一切 $t\in[t_0,t_m]$，非等宽方块脉冲函数族满足下面乘法公式

$$g_k(t)\cdot g_j(t)=\begin{cases}g_k(t), k=j,\\ 0, k\neq j,\end{cases}$$
$$G(t)\cdot G^T(t)=\mathrm{diag}[g_1(t),g_2(t),\cdots,g_m(t)]. \tag{4}$$

其中 diag[·]表示对角矩阵. 根据乘法公式不难证明，定义在时间域$[t_0,t_m]$上的不等宽方块脉冲函数族具有正交性. 即

$$\int_{t_0}^{t_m}g_k(t)\cdot g_j(t)dt=\begin{cases}t_k-t_{k-1}, & k=j,\\ 0, & k\neq j,\end{cases}$$
$$\int_{t_0}^{t_m}G(t)\cdot G^T(t)dt=\mathrm{diag}[\triangle t_1,\triangle t_2,\cdots,\triangle t_m], \tag{5}$$

其中 $\triangle t_k=t_k-t_{k-1}$, $k=1,2,\cdots,m$.

设方块脉冲函数在时间域$[t_0,t]$上的积分可近似用方块函数族本身近似展开，则有下面的积分公式

$$\int_{t_0}^{t}g_k(\tau)d\tau\cong\frac{\triangle t_k}{2}g_k(t)+\triangle t_k\sum_{i=k+1}^{m}g_i(t),$$
$$\int_{t_0}^{t}G(\tau)d\tau\cong P\cdot G(t), \tag{6}$$

其中 P 为上三角 m 阶方阵，其元素为

$$P_{ij}=\begin{cases}\triangle t_i, & j>i,\\ \frac{1}{2}\triangle t_i, & j=i,\\ 0, & j<i,\end{cases} \tag{7}$$

矩阵 P 称之为积分矩阵，它具有良好的运算性质，如 $P^2=P\cdot P$，仍为上三角 m 阶方阵，其元素

$$P'_{ij}=\begin{cases}\sum_{k=i+1}^{j-1}\triangle t_i\triangle t_k+\frac{1}{2}\triangle t_i(\triangle t_i+\triangle t_j), & j>i,\\ \frac{1}{4}\triangle t_i^2, & j=i,\\ 0, & j<i.\end{cases} \tag{8}$$

方阵 P^2 是一个非奇异阵，它存在 m 个不等于0的特征值，且这些值就等于其主对角线元素.

1.2　时间域上的函数按方块脉冲函数展开

若函数 $P(t)$在$[t_0,t_m]$上绝对可积，则可用方块脉冲函数近似展开为

$$P(t)\cong\sum_{k=1}^{m}q_kg_k(t)=Q^TG(t), \tag{9}$$

其中 $Q^T=[q_1,q_2,\cdots,q_m]$，q_k 为 $P(t)$的第 k 个脉冲函数分量的系数. 由正交性容易证明

$$q_k=\frac{1}{\triangle t_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}P(t)dt, \tag{10}$$

特别地，当 $P(t)=C$(常数)，

$$P(t) = C \cdot E^T \cdot G(t), \tag{11}$$

E 为元素为1的单位列阵. 对于待求的函数 $\ddot{x}(t)$,同样可用方块脉冲函数展开为

$$\ddot{x}(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i g_i(t) = A^T G(t), \tag{12}$$

其中 $A^T = [a_1, a_2, \cdots, a_m]$ 为待求的未知系数列阵,利用积分公式(6),可得式(13),(14)

$$\dot{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \ddot{x}(\tau) d\tau + \dot{x}(t_0) = A^T PG(t) + \dot{x}(t_0) E^T G(t) \tag{13}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^{t} \dot{x}(\tau) d\tau + x(t_0) \\ &= A^T P^2 G(t) + \dot{x}(t_0) E^T PG(t) + x(t_0) E^T G(t). \end{aligned} \tag{14}$$

式(12)－(14)就是在时间域$[t_0, t]$上用脉冲函数展开的加速度、速度和位移. 把它们代入运动方程(1)中,就可以得到一组关于求解 A 中元素的线性方程组.

2 直接求解结构动力响应的方块脉冲函数法

对于任意荷载作用下 n 个自由度体系的运动方程为

$$M\{\ddot{x}\} + c\{\dot{x}\} + k\{x\} = \{p(t)\}, \tag{1}$$

初始条件为

$$\{\dot{x}\}_{t=0} = \{\dot{x}\}_0, \qquad \{x\}_{t=0} = \{x\}_0, \tag{15}$$

根据式(12)设

$$\{\ddot{x}\} = AG(t), \tag{16}$$

其中 A 为 $n \times m$ 的未知系数矩阵,由式(13),(14)可得

$$\{\dot{x}\} = APG(t) + \{\dot{x}\}_0 E^T G(t), \tag{17}$$

$$\{x\} = AP^2 G(t) + \{\dot{x}\}_0 E^T PG(t) + \{x\}_0 E^T G(t). \tag{18}$$

利用式(19),$\{P(t)\}$可展成

$$\{P(t)\} = QG(t), \tag{19}$$

其中$\{P(t)\} = [P_1(t), P_2(t), \cdots, P_n(t)]^T$,$Q$ 为 $n \times m$ 阶荷载系数矩阵,其元素 q_{ij}为

$$q_{ij} = \frac{1}{\Delta t_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} p_i(t) dt, \qquad i = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, m, \tag{20}$$

把式(16)－(19)代入式(1),可得$(M \cdot A + C \cdot A \cdot P + K \cdot A \cdot P \cdot P) G(t) = (Q - C\{\dot{x}\}_0 E^T - K\{\dot{x}\}_0 E^T P - K\{x\}_0 E^T) G(t)$,根据方块脉冲函数的正交性可以得到

$$M \cdot A + C \cdot A \cdot P + K \cdot A \cdot P \cdot P = Q - C\{\dot{x}\}_0 E^T - K\{\dot{x}\}_0 E^T P - K\{x\}_0 E^T \tag{21}$$

上式中实际上代表 $n \times m$ 个方程,求解并非易事. 但如利用积分矩阵 P 及 P^2是上三角阵的特点,则可得到简便的递推公式.

把未知系数矩阵 A 的每一列元素记为$\{a_i\}$. 荷载系数矩阵 Q 的每一列元素记为$\{q_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 这是$\{a_i\}$,$\{q_i\}$分别为 $n \times 1$列阵. 利用式(7),(8)可把方程(21)直接转化为对每一列未知元素的求解,即有

$$(M + \frac{\Delta t_1}{2} C + \frac{\Delta t_1^2}{4} K)\{a_1\} = \{q_1\} - K\frac{\Delta t_1}{2}\{\dot{x}\}_0 - C\{\dot{x}\}_0 - K\{x\}_0, \tag{22}$$

$$(M+\frac{\triangle t_i}{2}C+\frac{\triangle t_i^2}{4}K)\{a_i\}=\{q_i\}-C\{\dot{x}\}_0-K\{\dot{x}\}_0(\sum_{k=1}^{i-1}\triangle t_k+\frac{\triangle t_i}{2})-K\sum_{j=1}^{i-1}p_{ji}\{a_j\}$$
$$-C\sum_{j=1}^{i-1}\triangle t_j\{a_j\}, \qquad i=2,\cdots,m. \tag{23}$$

求得了各时段的$\{a_i\}$，不难导出速度和位移相对应的值. 由式(17)，(18)，记

$$\begin{aligned}\{\dot{x}\}&=(AP+\{\dot{x}\}_0E^T)G(t)=VG(t),\\ \{x\}&=(AP^2+\{\dot{x}\}_0E^TP+\{x\}_0E^T)G(t)=DG(t).\end{aligned} \tag{24}$$

设$\{v_i\}$，$\{d_i\}$分别为V，D中第i列元素，则有

$$\{v_1\}=\frac{\triangle t_1}{2}\{a_1\}+\{\dot{x}\}_0. \tag{25}$$

$$\{v_i\}=\sum_{k=1}^{i-1}\triangle t_k\{a_k\}+\frac{\triangle t_i}{2}\{a_i\}+\{\dot{x}\}_0, \qquad i=2,3,\cdots,m \tag{26}$$

$$\{d_1\}=\frac{\triangle t_1^2}{4}\{a_1\}+\frac{\triangle t_1}{2}\{\dot{x}_0\}+\{x\}_0. \tag{27}$$

$$\{d_i\}=\sum_{j=1}^{i-1}p_{ji}\{a_j\}+\frac{\triangle t_i^2}{4}\{a_i\}+\{\dot{x}\}_0(\sum_{k=1}^{i-1}\triangle t_k+\frac{\triangle t_i}{2})+\{x\}_0, \quad i=2,3,\cdots,m \tag{28}$$

这里$\{a_i\}$，$\{v_i\}$，$\{d_i\}$实际上代表了结构体系的加速度、速度、位移在i时段$[t_{i-1},t_i]$上取常数的值. 将$i+1$时段的各值减i时段相应的值，就可以导出它们的递推公式如下

$$\begin{cases}\{a_1\}=(M+\frac{\triangle t_1}{2}C+\frac{\triangle t_1^2}{4}K)^{-1}(\{q_1\}-\frac{\triangle t_1}{2}K\{\dot{x}\}_0-C\{\dot{x}\}_0-K\{x\}_0),\\ \{a_i\}=(M+\frac{\triangle t_i}{2}C+\frac{\triangle t_i^2}{4}K)^{-1}[\{q_i\}-C(\{v_{i-1}\}+\frac{\triangle t_{i-1}}{2}\{a_{i-1}\})\\ \qquad -K(\{d_{i-1}\}+\frac{\triangle t_{i-1}+\triangle t_i}{2}\{v_{i-1}\}+\frac{\triangle t_{i-1}+\triangle t_i}{4}\{a_{i-1}\})].\end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases}\{v_1\}=\frac{\triangle t_1}{2}\{a_1\}+\{\dot{x}\}_0,\\ \{v_i\}=\{v_{i-1}\}+\frac{1}{2}(\triangle t_{i-1}\{a_{i-1}\}+\triangle t_i\{a_i\}).\end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases}\{d_1\}=\frac{\triangle t_1^2}{4}\{a_1\}+\frac{\triangle t_1}{2}\{\dot{x}_0\}+\{x\}_0,\\ \{d_i\}=\{d_{i-1}\}+\frac{1}{2}(\triangle t_i\{v_i\}+\triangle t_{i-1}\{v_{i-1}\}), \qquad i=2,3,\cdots,m.\end{cases} \tag{33}$$

当已知前一步的$\{a_{i-1}\}$，$\{v_{i-1}\}$，$\{d_{i-1}\}$的值. 就可以用式(31)－(33)计算得到当前的$\{a_i\}$，$\{v_i\}$，$\{d_i\}$值. 照此下去，直到所需要的时刻为止. 上面的递推公式并无要求各时段为等时间隔. 因此，对于荷载梯度变化较大的时段，可以采用较小的时间间隔(脉冲宽度)，以求获得较精确的数值解. 对于等时间隔，只需令$\triangle t_k=\triangle t, k=1,2,\cdots$，上面递推公式一样适用.

为了求得加速度、速度、位移各量在各时刻t_i的值，最简单的是假设在时段$[t_{i-1},t_i]$上的值$\{a_i\}$，$\{v_i\}$，$\{d_i\}$，是各量在该时段初始时刻t_{i-1}与t_i之和的平均值(图1)，即有

$$2r_i=f(t_i)+f(t_{i-1}), \qquad 或\ f(t_i)=2r_i-f(t_{i-1}). \tag{34}$$

上式中r_i可代表$\{a_i\}$，$\{v_i\}$或$\{d_i\}$，而$f(t)$则可代表$\{\ddot{x}\}$，$\{\dot{x}\}$或$\{x\}$. 这样，不难得到各时刻的$\{\ddot{x}\}$，

$\{\dot{x}\}$，$\{x\}$值为

$$
\begin{aligned}
\{\ddot{x}_i\} &= 2\sum_{k=1}^{i}(-1)^{i-k}\{a\}_k + (-1)^i\{\ddot{x}\}_0,\\
\{\dot{x}_i\} &= 2\sum_{k=1}^{i}(-1)^{i-k}\{v\}_k + (-1)^i\{\dot{x}\}_0,\\
\{x_i\} &= 2\sum_{k=1}^{i}(-1)^{i-k}\{d\}_k + (-1)^i\{x\}_0.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

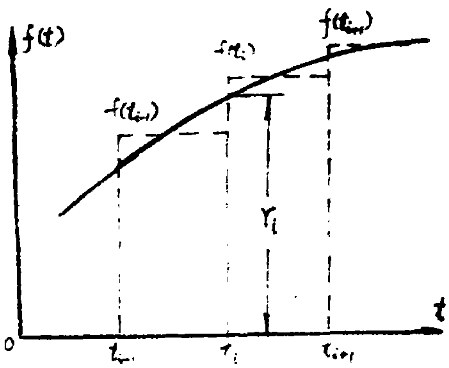

图1　函数在 t_i 时刻值 r_i 的近似表示

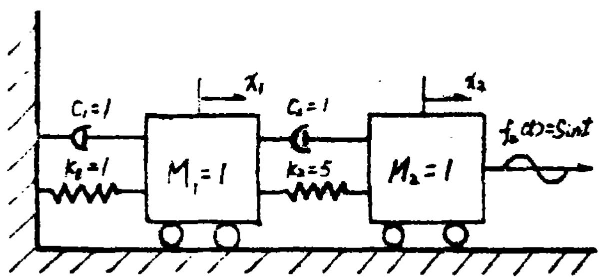

图2　有阻尼两自由度系统的强迫振动

方程(21)的求解也可以通过寻求积分矩阵 P 的 m 个线性无关的特征向量简化方程实现，由于其特征值就等于 P 矩阵的对角元素，要求得 m 个线性无关的特征向量是不困难的，但这得到的结果和上述的直接展开法是一样的，在此不再细述.

3　方法的稳定性

为了说明脉冲函数法积分格式的稳定性，考察单自由度，等时间隔的情况. 在时间 $t=t_{i+1}$ 时，应有

$$\ddot{x}_{i+1} + 2\zeta p\dot{x}_{i+1} + p^2x_{i+1} = f_{i+1}, \tag{36}$$

式中，p 为固有频率；ζ 为相对阻尼系数. 根据式(34)，(35)有

$$a_{i+1} + 2\zeta pv_{i+1} + p^2d_{i+1} = (f_{i+1} + f_i)/2, \tag{37}$$

利用 a_i，v_i 和 d_i 的递推关系，可得

$$a_{i+1} = ba_i - ca_{i-1} + (f_{i+1} - f_{i-1} - f_i + f_{i-2})/[2(1 + \zeta p\triangle t + p^2\triangle t^2/4)], \tag{38}$$

其中

$$
\begin{aligned}
b &= (2 - p^2\triangle t^2/2)/(1 + \zeta p\triangle t + p^2\triangle t^2/4),\\
c &= (1 - \zeta p\triangle t + p^2\triangle t^2/4)/(1 + \zeta p\triangle t + p^2\triangle t^2/4),
\end{aligned}
\tag{39}
$$

谱半径方程则为

$$\rho(\lambda) = \lambda^2 - b^2 + c = 0. \tag{40}$$

作单位圆变换，设 $\lambda=\frac{1+z}{1-z}$，将方程(40)从 λ 平面变换到 z 平面得：

$$a_0 z^2 + b_0 z + c_0 = 0, \tag{41}$$

其中

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 + b + c = 4/(1 + \zeta p\Delta t + p^2\Delta t^2/4) > 0, \\ b_0 &= 2 - 2c = (4\zeta p\Delta t)/(1 + \zeta p\Delta t + p^2\Delta t^2/4) \geqslant 0, \\ c_0 &= 1 - b + c = (p^2\Delta t^2)/(1 + \zeta p\Delta t + p^2\Delta t^2/4) > 0. \end{aligned} \tag{42}$$

由于上列系数全部大于或等于零，故由罗斯—霍尔维茨判据[2]，即 Z 的实部 $R_e Z \leqslant 0$，从而保证了谱半径 $|\lambda|<1$，因此，本方法是无条件稳定的.

4　数值算例

为了考察方法的精度和有效性，在此选择响应有精确解的系统作为算例. 如图2所示的有阻尼两自由度系统，在简谐力作用下系统的运动方程为

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix} + \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{Bmatrix} + \begin{pmatrix}6 & -5\\ -5 & 5\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ \sin t\end{Bmatrix}. \tag{43}$$

初始条件

$$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix}-\dfrac{7}{15}\\ -\dfrac{3}{5}\end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix}-\dfrac{3}{5}\\ -\dfrac{8}{15}\end{Bmatrix}, \tag{44}$$

精确解为

$$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix} = -\frac{1}{15}\begin{Bmatrix}9\\ 8\end{Bmatrix}\sin t - \frac{1}{15}\begin{Bmatrix}7\\ 9\end{Bmatrix}\cos t. \tag{45}$$

采用脉冲函数法进行数值分析，时间间隔取为等时间隔，按递推公式(31)—(33)逐步求解后，每时刻的位移值按公式(35)计算，表1，2

表1　位移值 x_1

t	精确解	$\Delta t=\pi/10$	$\Delta t=\pi/20$	$\Delta t=\pi/40$	$\Delta t=\pi/60$
0.6283	−0.7302	−0.7311	−0.7313	−0.7308	−0.7306
1.2566	−0.7148	−0.7311	−0.7217	−0.7178	−0.7168
1.8850	−0.4264	−0.4543	−0.4377	−0.4313	−0.4294
2.5133	0.0249	−0.0043	0.0128	0.0196	0.0215
3.1416	0.4667	0.4441	0.4573	0.4626	0.4641
3.7699	0.7302	0.7239	0.7277	0.7292	0.7296
4.3982	0.7148	0.7323	0.7223	0.7182	0.7170
5.0266	0.4264	0.4673	0.4436	0.4341	0.4313
5.6549	−0.0249	0.0305	−0.0017	−0.0146	−0.0183
6.2832	−0.4667	−0.4120	−0.4440	−0.4567	−0.4603

表2　位移值 x_2

t	精确解	$\Delta t=\pi/10$	$\Delta t=\pi/20$	$\Delta t=\pi/40$	$\Delta t=\pi/60$
0.628	−0.7989	−0.7968	−0.7980	−0.7985	−0.7987
1.2566	−0.6926	−0.6883	−0.6913	−0.6922	−0.6924
1.8850	−0.3218	−0.3296	−0.3259	−0.3238	−0.3231

表2(续)

t	精确解	$\triangle t=\pi/10$	$\triangle t=\pi/20$	$\triangle t=\pi/40$	$\triangle t=\pi/60$
2.5133	0.1719	−0.1419	0.0591	0.1663	0.1684
3.1416	0.6000	0.5561	0.5821	0.5923	0.5951
3.7699	0.7989	0.7601	0.7836	0.7225	0.7949
4.3982	0.6926	0.6789	0.6882	0.6910	0.6917
5.0266	0.3218	0.3457	0.3330	0.3271	0.3252
5.6549	−0.1719	−0.1120	−0.1462	−0.1604	−0.1646
6.2832	−0.6000	−0.5206	−0.5670	−0.5855	−0.5908

分别给出了$\triangle t=\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{20},\frac{\pi}{40},\frac{\pi}{60}$时接本文方法计算的数值解和精确解的比较. 对于$t=3.7699$时的峰值,$x_1$的相对误差分别是0.9%,0.3%,0.1%,0.08%,x_2的相对误差分别是4.8%,1.9%,0.8%,0.5%. 由此可见,本方法具有较好的精度,并且,精度可随着$\triangle t$的减小而提高.

5 结论

(1)本文提出的结构体系动力反应的直接积分法——脉冲函数法具有原理简单、计算容易、适用性强、精度较好等优点、并且具有无条件稳定的积分格式. 其计算精度可随脉冲宽度的减小提高. (2)本文的递推公式并不局限于等时间隔,对于荷载梯度变化较大(如冲击力等)的地方,可采用较小的脉冲宽度(时间间隔),计算上并无增加其复杂性. (3)方块脉冲函数法同样适用于结构体系的非线性动力反应计算. 当采用二维或更高维的脉冲函数,则本方法可推广到求解无限自由度体系(如梁或板)的动力反应问题.

参考文献

〔1〕林建华,方块脉冲函数在一般型泛函变分近似解法中的应用,华侨大学学报(自然科学版),1(1990).
〔2〕Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, (1959).
〔3〕郑兆昌主编,机械振动(中册),机械工业出版社,(1986).

Block-Pulse Function Method as a Simple and Direct Integral Method for the Dynamic Analysis of Structures

Lin Jianhua

(*Department of Civil Engineering*)

Abstract For the dynamic analysis of structures, this paper presents block—pulse function method by making use of the excellent operation characteristic. This is a simple and direct integral method with unconditional stable integral format. It is demonstrated by numerical examples to a feasible ans effective method.

Key words structural dynamics, pulse function, numerical computation