第13卷 第1期　华侨大学学报自然科学版　Vol. 13 No. 1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年1月　(NATURAL SCIENCE)　Jan. 1992

弹性介质中直杆临界荷载 P_{cr} 的加权余量解

杜　耀　星

（土木工程系）

摘要　本文利用加权余量法推导出位于弹性介质中的直杆，承受轴向荷载而发生弹性失稳时，临界荷载 P_{cr} 的计算式.

关键词　弹性介质，直杆，弹性失稳，临界荷载，加权余量法

0　前言

建筑结构中的中心受压杆、中心受压柱，当其发生弹性失稳时，除了杆端受到约束外，杆和柱的周围，一般地说都与大气接触，即所谓的无弹性介质存在，这类压杆的稳定计算，是大家较为熟悉的. 此外，工程中还会遇到另外一种类型的压杆，它是位于弹性介质中. 例如在桩基工程中，直接打到基岩上的钢桩和钢筋混凝土桩，桩的周围就是地基，它就是位于弹性介质中的压杆. 这种杆件当它发生屈曲时，弹性介质就会引起反力而反作用于压杆上. 弹性介质的反力 $q(x)$ 并非均匀分布，一般地说 $q(x)$ 与杆件的挠度有关. 我们在下面的推导中将假设弹性介质反力 $q(x)$ 与杆件的挠度成正比.

可以推想得到，位于弹性介质中的压杆，其弹性失稳时的临界荷载会比无弹性介质中的压杆要大. 求解这各类型杆的稳定问题，可以用一般解微分方程的办法，也可以用能量法，本文介绍一种简捷的方法——加权余量法来求解，而所得的结果与能量解完全一致. 加权余量法根据所取的权函数不同而分为子域法、配点法、最小二乘法、伽辽金法和矩法，本文是利用加权余量法中的矩法，关于加权余量法的计算原理可参阅参考文献[1]，[2].

1　杆件挠曲线近似微分方程的推导

长度为 l 的直杆 AB，假定两端铰支，当它在临界荷载 P_{cr} 作用下而处于微弯状态，如图1所示. 在推导出挠曲线近似微分方程之前必须先知道弹性介质的反力 $q(x)$，进而再求出任意截面上的弯矩 $M(x)$，然后利用材料力学中弯曲基本方程式，立即可以得出杆件挠曲线近似微分方

* 本文1990－09－04收到.

程式.

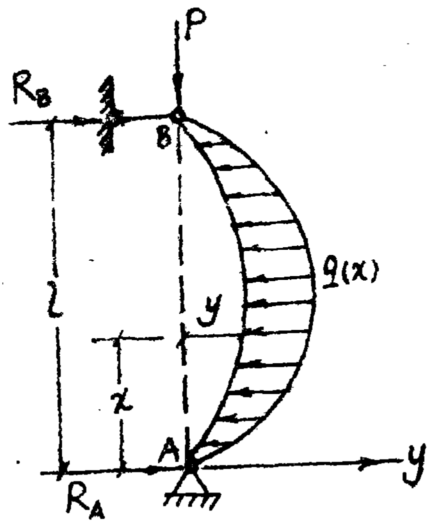

图1　弹性介质中压杆的临界状态

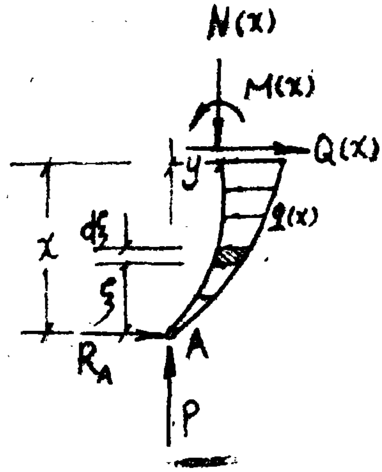

图2　压杆的分离体图

1.1　关于弹性介质的反力 $q(x)$

如前所述,假定弹性介质的反力 $q(x)$ 与 AB 杆的挠度 y 成正比,即

$$q(x)=\beta y, \tag{1}$$

式中 β 为弹性介质的反力系数,其因次为力除以长度的平方.对于两端为铰支的压杆,其弹性曲线可以表示为正弦曲线,即

$$y=a_m\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right), \tag{2}$$

所以弹性介质的反力可改写为

$$q(x)=\beta a_m\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right), \tag{3}$$

式中 a_m 为待定常数,m 为杆件弯曲时,半波的个数.考虑杆 AB 的平衡,由 $\sum y=0$, $\sum M_B=0$ 可得

$$\begin{aligned}R_A&=\frac{1}{2}\int_0^{l/m}q(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{l/m}\beta a_m\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx=-\frac{\beta a_m l}{2m\pi}\left[\cos\frac{m\pi x}{l}\right]_0^{l/m}\\&=\frac{a_m\beta l}{m\pi},\qquad(m=1,2,3,\cdots\cdots).\end{aligned} \tag{4}$$

1.2　关于杆件任意横截面上的弯矩 $M(x)$

在距 A 端为 x 处用水平截面假想地截开,弃除上面部分,保留下面部分,如图2所示.考虑留下部分的平衡可得

$$M(x)=py-R_Ax+\int_0^x q(x)(x-\zeta)d\zeta=py-\frac{a_m\beta l}{m\pi}x+\frac{1}{2}\beta x^2y. \tag{5}$$

1.3　建立杆件挠曲线的近似微分方程

由材料力学可得

$$EIy'' = -M(x), \tag{6}$$

将式(5)代入式(6),则得杆件弯曲时挠曲线的近似微分方程为

$$y'' + \frac{2p+\beta x^2}{2EI}y - \frac{\beta a_m l}{m\pi EI}x = 0, \tag{7}$$

式中 EI 为杆件的抗弯刚度.

2　用加权余量法求临界荷载 p_{cr}

式(7)就是利用加权余量法求解 p_{cr}的控制方程.在使用本方法时,应先选定杆件挠曲线形状的试函数,选取式(2)为试函数

$$y = a_m\sin(\frac{m\pi x}{l}), \tag{2}$$

则有

$$y'' = -a_m(\frac{m\pi}{l})^2\sin(\frac{m\pi x}{l}). \tag{8}$$

由于所选取的试函数式(2)满足杆件的边界条件(并非一定必要),$x=0$和 $x=l$ 时,$y=0$所以将式(2)、(8)代入式(7)则得余量 R_L 为

$$R_L = -a_m(\frac{m\pi}{l})^2\sin(\frac{m\pi}{l}x) + \frac{2p+\beta x^2}{2EI}a_m\sin(\frac{m\pi x}{l}) - \frac{a_m\beta lx}{m\pi EI}. \tag{9}$$

利用加权余量法中的矩法,并取权函数为1,即所谓取零次矩 $W_i=N_i=1$,于是得加权余量的积分为

$$\int_v W_iR_L dv = \int_0^l 1[-a_m(\frac{m\pi}{l})^2\sin(\frac{m\pi}{l}x) + \frac{2p+\beta x^2}{2EI}a_m\sin(\frac{m\pi}{l}x) - \frac{a_m\beta lx}{m\pi EI}]dx$$
$$= a_m[\frac{2pl}{m\pi EI} - \frac{2m\pi}{l} - \frac{2\beta l^3}{m^3\pi^3EI}],$$

为了消除余量,令加权余量积分等于零,即

$$a_m[\frac{2pl}{m\pi EI} - \frac{2m\pi}{l} - \frac{2\beta l^3}{m^3\pi^3EI}] = 0,$$

因为 $a_m\neq0$,所以必是

$$[\frac{2pl}{m\pi EI} - \frac{2m\pi}{l} - \frac{2\beta l^3}{m^3\pi^3EI}] = 0.$$

最后得弹性介质中直杆临界荷载 p_{cr}的计算式为

$$p_{cr} = \frac{\pi^2EI}{l^2}[m^2 + \frac{\beta l^4}{m^2\pi^4EI}]. \tag{10}$$

3　讨论

式(10)中,m 为杆件弯曲时半波的个数,它是1,2,3,…的正整数,其值与弹性介质反力系数 β 有关.如果杆件是位于无弹性介质之中,此时 $\beta=0$,则 m 应取为1,在这种情况下,式(10)

就成为中心受压直杆临界荷载的欧拉公式.

根据临界荷载的含义，m 的取值原则是应当使按式(10)所求得的临界荷载为最小. 对于极为柔软的弹性介质，此时 β 很小，而 m 仍必须取等于1. 由分析可知，如果 $\beta<\frac{4\pi^4 EI}{l^4}$ 时，应当取 $m=1$；$\beta>\frac{4\pi^4 EI}{l^4}$ 时，应当取 $m=2$. 如果 β 很大，则半波个数 m 可能增大至3，4，…等，此时应当分别以 $m=3,4,5$ 等正整数代入式(10)计算出二至三个 p_{cr}，然后取其中较小者即为所求的临界荷载值.

参　考　文　献

[1] 徐文焕、陈虬，加权余量法在结构分析中的应用，中国铁道出版社，(1985)，5－26.

[2] 杜耀星，圆环圆拱承受均匀径向荷载时弹性失稳的加权余量解，华侨大学学报(自然科学版)，4(1990)，371－376.

[3] 湖南大学结构理论教研组，结构力学(下册)，人民教育出版社，694－696.

[4] Timoshenko, S. P., *Mechanic of Materials*, Van Nostrand Reinhold, (1972), 222－225.

Weighted Residual Solution for the Critical Load P_{cr} of a Straight Bar in an Elastic Medium

Du Yaoxing

(*Dept. of Civil Engineering*)

Abstract　With respect to a straight bar subjected an axial load in an elastic medium, this paper makes use of the method of weighted residual to derive a formula for calculating its critical load p_{cr} from then the elastic instability occurs.

Key words　elastic medium, straight bar, elastic instability, critical load, method of weighted residuals