

负二项抽样下 $r/N(G)$ 系统可靠性
增长的 Bayes 估计

吴硕思 吴绍敏

(管理信息科学系)

摘要 本文讨论了在负二项抽样模型下, 部件可靠概率 p 带有验前负对数 Gamma 分布、验前 Beta 分布及其特殊情况验前 $U(0,1)$ 分布时, 对 $r/N(G)$ 系统的可靠性增长作出 Bayes 估计. 主要结果有定理1、2. 而几何抽样模型下的结论是本文的特例, 最后附有实例.

关键词 负二项抽样, 可靠性增长, Bayes 估计, 验前分布

0 引言

本文讨论的 $r/N(G)$ 系统是由 N 个相同的部件组成. 该系统可靠性的 Bayes 估计不仅与系统本身的结构有关, 同时还依赖部件的可靠度以及有关参数的验前分布.

为了改善系统的可靠性, 必须对部件进行测试. 但是在实际测试时, 由于许多客观条件的限制, 比如, 部件造价昂贵等原因, 所以只能对少量的部件进行测试. 而负二项抽样模型比较适合这种小抽样的问题. 所以可按负二项抽样模型对部件进行测试. 而负二项模型的特殊情况是几何模型. 例如, 对新型火炮进行“膛炸”测试. 假定每发射一次成功(不“膛炸”)的概率均为 p , 失败(“膛炸”)的概率为 $(1-p)$. 那么, (1) 如果只对一门火炮进行测试, 且发射 x 次成功, 第 $x+1$ 次失败, 失败后即停止测试. 则 x 是随机变量, 服从几何分布 $P(X=x)=p^x(1-p)$, ($x=0, 1, 2, \dots$). (2) 如果对 r 门同型号, 同批生产的火炮进行相同的“膛炸”测试. 对每门炮来说, 其成功或失败的概率都一样是 p 或 $(1-p)$, 假定第 i 门炮测试成功的次数为 x_i , 第 x_i+1 次失败. 则 x_i 服从几何分布 $P(X_i=x_i)=p^{x_i}(1-p)$, ($x_i=0, 1, 2, \dots$), $i=1, r$. 并且 X_1, \dots, X_r 相互独立. 则 r 门炮

测试成功的总次数 $X=\sum_{i=1}^r X_i$ 服从负二项分布 $P(X=k)=C_{r-1}^{k-1} p^k (1-p)^r$, ($k=0, 1, 2, \dots$).

现在回到一般的情况中来. 假设部件的测试分 n 个阶段进行. 第 i 阶段投入 r_i 个部件进行

• 本文1990-05-04收到.

测试. 且设这 r_i 个部件中第 l 个部件, 前 ξ_l 次测试成功, 第 ξ_l+1 次失败, 则 ξ_l 服从几何分布 $P(\xi_l = g_l) = p_i^{g_l}(1-p_i)$, ($g_l = 0, 1, 2, \dots$), $l = 1, r_i$, 且 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r_i}$ 相互独立. 从而这 r_i 个部件被测试成功的总次数为 $X_i = \sum_{l=1}^{r_i} \xi_l$ 服从负二项分布 $P(X_i = x_i) = C_{r_i+x_i-1}^{r_i-1} \cdot p_i^{x_i}(1-p_i)^{r_i}$; ($x_i = 0, 1, 2, \dots$), $i = 1, 2, \dots, n$. 这里的 p_i 是第 i 阶段测试时部件的可靠度. 由于每次测试后对部件进行改善, 所以可靠度 p_i 不断递增. 故可设

$$0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n < 1, \quad (1)$$

引入记号 $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $D_n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) | 0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n < 1\}$. 则在 P, r 固定下, X 的条件概率密度为

$$\begin{aligned} f(x|p, r) &= \prod_{i=1}^n f(x_i|p_i, r_i) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n C_{r_i+x_i-1}^{r_i-1} \right) \prod_{i=1}^n p_i^{x_i}(1-p_i)^{r_i}, \end{aligned} \quad (2)$$

r_i 为正整数, ($x_i = 0, 1, 2, \dots$), $i = 1, 2, \dots, n$, 且 X_1, \dots, X_n 相互独立. 而对于同部件组成的 $r/N(G)$ 系统, 其可靠度 R 为

$$R = \sum_{j=r}^N C_N^j p_j (1-p)^{N-j}, \quad (3)$$

从而第 i 阶段测试时的 R_i 为

$$R_i = \sum_{j=r}^N C_N^j p_i^j (1-p_i)^{N-j}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

本文首先求得最后一个测试阶段中部件的可靠度 p_n 的 Bayes 估计 \hat{p}_n , 然后通过 \hat{p}_n 或利用中间结果, 即 p_n 条件密度求得最后测试阶段系统的可靠度 R_n 的 Bayes 估计 \hat{R}_n .

1 p_n 和 R_n 的 Bayes 估计

定理1 假设(i)式(1)、(2)成立; (ii)参数 p_i 的先验分布为负对数 Gamma 分布: $\pi(p_i) = L\Gamma(p_i | \alpha, \beta) = \beta^\alpha [\Gamma(\alpha)]^{-1} (-\ln p_i)^{\alpha-1} p_i^{\beta-1}$, α_i 为正整数, $\beta_i > 0$, $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. 则 p_n 的条件密度为

$$\begin{aligned} f(p_n|x, r) &= W_n^{-1} \left\{ \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{x_1-1} \dots \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{x_{n-1}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) \right. \\ &\quad \cdot \sum_{k_n=0}^{r_n} C_{r_n}^{k_n} (-1)^{k_n} [g_{(n)}^{(k_n)}]^{-1} L\Gamma(p_n | \alpha_n, g_{(n)}) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

而在二次损失下, 即 $L(\hat{p}_n, p_n) = (\hat{p}_n - p_n)^2$ 下, p_n 和 R_n 的 Bayes 估计分别为

$$\begin{aligned} \hat{p}_n &= W_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{x_1-1} \dots \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{x_{n-1}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) \\ &\quad \cdot \sum_{k_n=0}^{r_n} C_{r_n}^{k_n} (-1)^{k_n} [g_{(n)} + 1]^{-\alpha_n}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_n = & W_n^{-1} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{s_1-1} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{s_{n-1}-1} W(k_1, j_1, \cdots, k_{n-1}, j_{n-1}) \\ & \cdot \sum_{k_n=0}^{r_n} C_{k_n}^{j_n} (-1)^{k_n} \sum_{j_n=0}^{s_n} C_{j_n}^{k_n} \sum_{i=0}^{N-j_n} C_{N-j_n}^{i_n} (-1)^i [g_{(n)} + i + j]^{-s(n)}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} a_i(i) &= a_i + j_{i-1}, \quad j_{(0)} = 0, \\ k_i &= x_i + \beta_i, \quad g_{(i)} = g_{(i-1)} + k_i + j_i, \quad g_{(0)} = 0, \\ C_{k_i j_i}^{j_i} &= C_{k_i}^{j_i} (-1)^{k_i} g_{(i)}^{j_i - s(i)} \Gamma(a_i) [\Gamma(j_i + 1)]^{(-1)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ W(k_1, j_1, \cdots, k_{n-1}, j_{n-1}) &= \prod_{i=1}^{n-1} C_{k_i j_i}, \\ W_n &= \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{s_1-1} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{s_{n-1}-1} W(k_1, j_1, \cdots, k_{n-1}, j_{n-1}) \sum_{k_n=0}^{r_n} C_{k_n}^{j_n} (-1)^{k_n} g_{(n)}^{-s(n)} \\ &= [\Gamma(a_1)]^{-1} \int_0^1 \prod_{i=1}^n (-\ln p_i)^{s_i-1} (1-p_i)^{j_i} p_i^{k_i-1} dp_i. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

证明 由式(2)可得 p 的后验分布

$$\begin{aligned} f(p|x, r) &= \frac{\prod_{i=1}^n (1-p_i)^{s_i-1} (-\ln p_i)^{s_i-1}}{\int_0^1 \prod_{i=1}^n (1-p_i)^{s_i-1} (-\ln p_i)^{s_i-1} dp} \\ &= [W_n]^{-1} \prod_{i=1}^n (-\ln p_i)^{s_i-1} (1-p_i)^{j_i} p_i^{k_i-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

则 p_n 的验分布为

$$\begin{aligned} f(p_n|x, r) &= [W_n]^{-1} (-\ln p_n)^{s_n-1} (1-p_n)^{j_n} p_n^{k_n-1} \int_0^{p_n} (-\ln p_{n-1})^{s_{n-1}-1} (1-p_{n-1})^{j_{n-1}} p_{n-1}^{k_{n-1}-1} dp_{n-1} \\ &\quad \cdots \int_0^{p_2} (-\ln p_2)^{s_2-1} (1-p_2)^{j_2} p_2^{k_2-1} dp_2 \int_0^{p_1} (-\ln p_1)^{s_1-1} (1-p_1)^{j_1} p_1^{k_1-1} dp_1. \end{aligned} \quad (10)$$

为了求解 $f(p_n|x, r)$, 先求其分子中的积分部分 I , 令

$$I = \int_0^{p_2} (-\ln p_{n-1})^{s_{n-1}-1} (1-p_{n-1})^{j_{n-1}} p_{n-1}^{k_{n-1}-1} dp_{n-1} \cdots \int_0^{p_2} (-\ln p_1)^{s_1-1} (1-p_1)^{j_1} p_1^{k_1-1} dp_1, \quad (11)$$

$$I_i = \int_0^{p_{i+1}} (-\ln p_i)^{s_i-1} (1-p_i)^{j_i} p_i^{k_i-1} I_{i-1} dp_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1, \quad I_0 = 1. \quad (12)$$

下面反复利用公式 $\int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha-1} dy = \Gamma(\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} e^{-x}$ 求解 I_i , 即

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{p_2} (-\ln p_1)^{s_1-1} (1-p_1)^{j_1} p_1^{k_1-1} dp_1 = \sum_{k_1=0}^{r_1} C_{k_1}^{j_1} (-1)^{k_1} \int_0^{p_2} (-\ln p_1)^{s_1-1} p_1^{k_1+j_1-1} dp_1 \\ &= \sum_{k_1=0}^{r_1} C_{k_1}^{j_1} (-1)^{k_1} \int_{-\ln p_2}^{+\infty} g_{(1)}^{-s_1} y^{s_1-1} e^{-y} dy \quad (\text{令 } y = -g_{(1)} \ln p_1) \\ &= \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{s_1-1} C_{k_1}^{j_1} (-1)^{k_1} g_{(1)}^{j_1-s_1} \Gamma(s_1) [\Gamma(j_1+1)]^{-1} (-\ln p_2)^{j_1} p_2^{k_1} \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(a_{(2)})} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} W(k_1, j_1) (-\ln p_2)^{k_1} p_2^{a_{(2)}-k_1} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{p_2} (-\ln p_2)^{a_{(2)}-k_1-1} (1-p_2)^{k_1} p_2^{a_{(2)}-k_1-1} I_1 dp_2 \\ &= \frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(a_{(2)})} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} W(k_1, j_1) \int_0^{p_2} (-\ln p_2)^{a_{(2)}-k_1-1} (1-p_2)^{k_1} p_2^{a_{(2)}-k_1-1} dp_2 \\ &= \frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(a_{(2)})} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} W(k_1, j_1) \sum_{k_2=0}^{r_2} C_{r_2}^{k_2} (-1)^{k_2} \int_0^{p_2} (-\ln p_2)^{a_{(2)}-k_1-1} p_2^{a_{(2)}-k_1-1} dp_2 \\ &= \frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(a_{(2)})} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} W(k_1, j_1) \sum_{k_2=0}^{r_2} C_{r_2}^{k_2} (-1)^{k_2} \int_{-g_{(2)} \ln p_2}^{+\infty} g_{(2)}^{-a_{(2)}} y^{a_{(2)}-1} e^{-y} dy \quad (\text{令 } y = -g_{(2)} \ln p_2) \\ &= \frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(a_{(2)})} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} W(k_1, j_1) \sum_{k_2=0}^{r_2} \sum_{k_2=0}^{a_{(2)}-1} C_{r_2}^{k_2} (-1)^{k_2} g_{(2)}^{a_{(2)}-k_2} \Gamma(a_{(2)}) [\Gamma(j_2+1)]^{-1} (-\ln p_2)^{j_2} P_{j_2}^{(a)} \\ &= \frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(a_{(3)})} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \sum_{k_2=0}^{r_2} \sum_{j_2=0}^{a_{(2)}-1} W(k_1, j_1, k_2, j_2) (-\ln p_2)^{k_2} P_{j_2}^{(a)} \quad (14) \end{aligned}$$

如此等等并依次类推便可求得 I

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{p_n} (-\ln p_{n-1})^{a_{(n)}-k_{n-1}-1} (1-p_{n-1})^{k_{n-1}} p_{n-1}^{a_{(n)}-k_{n-1}-1} I_{n-2} dp_{n-1} \\ &= \frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(a_{(n)})} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{a_{(n-1)}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) (-\ln p_n)^{k_{n-1}} P_{j_{n-1}}^{(a_{(n-1)})}, \quad (15) \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} f(p_n | x, r) &= [W']^{-1} (-\ln p_n)^{a_{(n)}-1} (1-p_n)^{r_n} P_{r_n}^{(a_{(n)})} \cdot I \\ &= [W']^{-1} \frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(a_{(n)})} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{a_{(n-1)}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) \\ &\quad \cdot (-\ln p_n)^{a_{(n)}-1} (1-p_n)^{r_n} p_n^{a_{(n)}-r_n-1} \\ &= [W']^{-1} \frac{\Gamma(a_1)}{\Gamma(a_{(n)})} \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{a_{(n-1)}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) \\ &\quad \cdot \sum_{k_n=0}^{r_n} C_{r_n}^{k_n} (-1)^{k_n} (-\ln p_n)^{a_{(n)}-1} p_n^{a_{(n)}-1} \\ &= [W']^{-1} \Gamma(a_1) \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{a_{(n-1)}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) \\ &\quad \cdot \sum_{k_n=0}^{r_n} C_{r_n}^{k_n} (-1)^{k_n} [g_{(n)}^{a_{(n)}}]^{-1} L\Gamma(p_n | a_{(n)}, g_{(n)}), \quad (16) \end{aligned}$$

由于 $\int_0^1 f(p_n | x, r) dp_n = 1$, 故有

$$W'_{(n)} = \Gamma(a_1) \sum_{k_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{a_1-1} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{a_{(n-1)}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) \sum_{k_n=0}^{r_n} C_{r_n}^{k_n} (-1)^{k_n} g_{(n)}^{-a_{(n)}} = P(a_1) W_n, \quad (17)$$

则在二次损失下, p_* 和 R_* 的 Bayes 估计的

$$\begin{aligned}\hat{p}_* &= E(p_* | x) = \int_0^1 p_* f(p_* | x, r) dp_* \\&= [W_*]^{-1} \frac{\Gamma(a_*)}{\Gamma(a_*)} \sum_{i_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{s_1-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{s_{n-1}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) \\&\quad \cdot \sum_{i_n=0}^{r_n} C_{i_n}^* (-1)^{i_n} \int_0^1 (-\ln p_*)^{a_*-1} p_*^{i_n} dp_* \\&= [W_*]^{-1} \sum_{i_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{s_1-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{s_{n-1}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) \sum_{i_n=0}^{r_n} C_{i_n}^* (-1)^{i_n} [g_{(a)} + 1]^{-a_*}, \\ \hat{R}_* &= E(R_* | x) = \int_0^1 R_* f(p_* | x, r) dp_* = \int_0^1 \sum_{j=r}^N C_h p_*^j (1-p_*)^{N-j} f(p_* | x, r) dp_* \\&= [W_*]^{-1} \sum_{i_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{s_1-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{s_{n-1}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) \sum_{i_n=0}^{r_n} C_{i_n}^* (-1)^{i_n} \\&\quad \cdot \sum_{j=r}^N C_h^* \int_0^1 (-\ln p_*)^{a_*-1} (1-p_*)^{N-j} p_*^{i_n+j} dp_* \\&= [W_*]^{-1} \sum_{i_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{s_1-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{s_{n-1}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) \sum_{i_n=0}^{r_n} C_{i_n}^* (-1)^{i_n} \\&\quad \cdot \sum_{j=r}^N C_h^* \sum_{i=0}^{N-j} C_{N-j-i}^* (-1)^i \int_0^1 (-\ln p_*)^{a_*-1} p_*^{i_n+i+j} dp_* \\&= [W_*]^{-1} \sum_{i_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{s_1-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{s_{n-1}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) \sum_{i_n=0}^{r_n} C_{i_n}^* (-1)^{i_n} \\&\quad \cdot \sum_{j=r}^N C_h^* \sum_{i=0}^{N-j} C_{N-j-i}^* (-1)^i [g_{(a)} + i + j]^{-a_*}.\end{aligned}$$

至此定理1证毕.

或者,也可将 p_* 直接代入 $R_* = \sum_{j=r}^N C_h p_*^j (1-p_*)^{N-j}$ 来求得

$$\hat{R}_* = \sum_{j=r}^N C_h \hat{p}_*^j (1-\hat{p}_*)^{N-j}. \quad (18)$$

系1 当 $r=1$ 时,便得并联系统的 R_* 的 Bayes 估计

$$\begin{aligned}\hat{R}_* &= [W_*]^{-1} \sum_{i_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{s_1-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{s_{n-1}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) \\&\quad \cdot \sum_{i_n=0}^{r_n} C_{i_n}^* (-1)^{i_n} \sum_{j=1}^N C_h^* \sum_{i=0}^{N-j} C_{N-j-i}^* (-1)^i [g_{(a)} + i + j]^{-a_*}.\end{aligned} \quad (19)$$

而当 $r=N$ 时,便得串联系统的 R_* 的 Bayes 估计为

$$\hat{R}_* = [W_*]^{-1} \sum_{i_1=0}^{r_1} \sum_{j_1=0}^{s_1-1} \cdots \sum_{i_{n-1}=0}^{r_{n-1}} \sum_{j_{n-1}=0}^{s_{n-1}-1} W(k_1, j_1, \dots, k_{n-1}, j_{n-1}) \sum_{i_n=0}^{r_n} C_{i_n}^* (-1)^{i_n} [g_{(a)} + N]^{-a_*}. \quad (20)$$

系2 若令定理1中的条件(ii)中的 $\alpha_i = \beta_i = 1$, 则 $\pi(p_i) = 1$ 是验前 $U(0, 1)$ 分布. 所以, 当 $\alpha_i = \beta_i = 1$ 时定理1的结果变为验前 $U(0, 1)$ 分布下的 Bayes 估计.

系3 当 $r_i = 1$ 时, 定理1、系1和系2的结论变成几何抽样模型下的结论.

定理2 假设(i)式(1)、(2)成立;(ii)参数 p_i 的验前分布是 Beta 分布: $\pi(p_i) = B(p_i | a_i, b_i) = [B(a_i, b_i)]^{-1} p_i^{a_i-1} (1-p_i)^{b_i-1}$, a_i, b_i 为正整数, $i = 1, 2, \dots, n$, 则 p_i 的条件密度为

$$f(p_i | x, r) = W_i^{-1} \left\{ \sum_{h_1=f_1}^{f_1} \cdots \sum_{h_{n-1}=f_{n-1}}^{f_{n-1}} W(h_1, \dots, h_{n-1}) B(f_i, g_{n-1} + v_i - h_{n-1}) \right. \\ \left. \cdot B(p_i | f_i, g_{n-1} + v_i - h_{n-1}) \right\}, \quad (21)$$

而在二次损失下, p_i 和 R_i 的 Bayes 估计分别为

$$\hat{p}_i = W_i^{-1} \left\{ \sum_{h_1=f_1}^{f_1} \cdots \sum_{h_{n-1}=f_{n-1}}^{f_{n-1}} W(h_1, \dots, h_{n-1}) B(f_i + 1, g_{n-1} + v_i - h_{n-1}) \right\}, \quad (22)$$

$$\hat{R}_i = W_i^{-1} \left\{ \sum_{h_1=f_1}^{f_1} \cdots \sum_{h_{n-1}=f_{n-1}}^{f_{n-1}} W(h_1, \dots, h_{n-1}) \sum_{j=r}^N C_j B(j + f_i, N - j + g_{n-1} + v_i - h_{n-1}) \right\}. \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases} u_i = x_i + a_i, & v_i = r_i + b_i, \\ f_i = u_i + h_{i-1}, & h_0 = 0, \\ g_i = v_i + u_i + g_{i-1} - 1, & g_0 = 0, \\ C_h = C_h^* B(f_i, g_{i-1} + v_i - h_{i-1}), & i = 1, 2, \dots, n, \\ W(h_1, \dots, h_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} C_{h_i}, \\ W_i = \sum_{h_1=f_1}^{f_1} \cdots \sum_{h_{n-1}=f_{n-1}}^{f_{n-1}} W(h_1, \dots, h_{n-1}) B(f_i, g_{n-1} + v_i - h_{n-1}). \end{cases} \quad (24)$$

证明由式(2)可得 p 的后验分布

$$f(p | x, r) = \prod_{i=1}^n p_i^{x_i+a_i-1} (1-p_i)^{r_i+b_i-1} / \int_{D_n} \prod_{i=1}^n p_i^{x_i+a_i-1} (1-p_i)^{r_i+b_i-1} dp, \quad (25)$$

则 p_i 的条件密度为

$$f(p_i | x, r) = W_i^{-1} p_i^{x_i-1} (1-p_i)^{r_i-1} \int_0^{f_i} p_{i-1}^{x_{i-1}-1} (1-p_{i-1})^{r_{i-1}-1} dp_{i-1} \\ \cdots \int_0^{f_2} p_1^{x_1-1} (1-p_1)^{r_1-1} dp_1, \quad (26)$$

其中, $W_i = \int_{D_n} \prod_{i=1}^n p_i^{x_i-1} (1-p_i)^{r_i-1} dp$. 为求解 $f(p_i | x, r)$, 先求其分子的积分部分, 令

$$I = \int_0^{f_i} p_{i-1}^{x_{i-1}-1} (1-p_{i-1})^{r_{i-1}-1} dp_{i-1} \cdots \int_0^{f_2} p_1^{x_1-1} (1-p_1)^{r_1-1} dp_1. \quad (27)$$

$$I_i = \int_0^{f_{i+1}} p_i^{x_i-1} (1-p_i)^{r_i-1} I_{i-1} dp_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad I_0 = 1. \quad (28)$$

下面反复利用公式 $\int_0^1 x^{u-1} (1-x)^{v-1} dx = B(u, v) \sum_{j=0}^{u+v-1} C_{u+v-1}^j y^j (1-y)^{u+v-1-j}$ 求解 I_i

$$I_1 = \int_0^{f_2} p_1^{x_1-1} (1-p_1)^{r_1-1} dp_1$$

$$= B(u_1, v_1) \sum_{h_1=f_1}^{t_1} C_{h_1}^1 p_2^{h_1} (1-p_2)^{t_1-h_1} = \sum_{h_1=f_1}^{t_1} W(h_1) p_2^{h_1} (1-p_2)^{t_1-h_1}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 p_2^{t_2-1} (1-p_2)^{t_2-1} I_1 dp_2 \\ &= \sum_{h_1=f_1}^{t_1} W(h_1) \int_0^1 p_2^{t_2-1} (1-p_2)^{t_1+t_2-h_1-1} dp_2 \\ &= \sum_{h_1=f_1}^{t_1} W(h_1) \sum_{h_2=f_2}^{t_2} C_{h_2}^1 B(f_2, g_1 + v_2 - h_1) p_2^{h_2} (1-p_2)^{t_2-h_2} \\ &= \sum_{h_1=f_1}^{t_1} \sum_{h_2=f_2}^{t_2} W(h_1, h_2) p_2^{h_2} (1-p_2)^{t_2-h_2}. \end{aligned} \quad (30)$$

如此等等并依次类推可得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 p_{n-1}^{t_{n-1}-1} (1-p_{n-1})^{t_{n-1}-1} I_{n-2} dp_{n-1} \\ &= \sum_{h_1=f_1}^{t_1} \sum_{h_2=f_2}^{t_2} \cdots \sum_{h_{n-1}=f_{n-1}}^{t_{n-1}} W(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}) p_{n-1}^{h_{n-1}} (1-p_{n-1})^{t_{n-1}-h_{n-1}}, \end{aligned} \quad (31)$$

从而

$$\begin{aligned} f(p_n | x, r) &= W_n^{-1} \{ p_n^{t_n-1} (1-p_n)^{t_n-1} \cdot I \} \\ &= W_n^{-1} \left\{ \sum_{h_1=f_1}^{t_1} \cdots \sum_{h_{n-1}=f_{n-1}}^{t_{n-1}} W(h_1, h_2, \dots, h_{n-1}) p_n^{t_n-1} (1-p_n)^{t_{n-1}+t_n-h_{n-1}-1} \right\}, \\ &= W_n^{-1} \left\{ \sum_{h_1=f_1}^{t_1} \cdots \sum_{h_{n-1}=f_{n-1}}^{t_{n-1}} W(h_1, \dots, h_{n-1}) B(f_n, g_{n-1} + v_n - h_{n-1}) B(p_n | f_n, g_{n-1} + v_n - h_{n-1}) \right\}. \end{aligned}$$

由于 $\int_0^1 f(p_n | x, r) dp_n = 1$, 故有

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^1 p_n^{t_n-1} (1-p_n)^{t_n-1} \cdot I dp_n \\ &= \sum_{h_1=f_1}^{t_1} \cdots \sum_{h_{n-1}=f_{n-1}}^{t_{n-1}} W(h_1, \dots, h_{n-1}) B(f_n, g_{n-1} + v_n - h_{n-1}). \end{aligned}$$

则在二次损失下, p_n 的 Bayes 估计为

$$\begin{aligned} \hat{p}_n &= E(p_n | x) = \int_0^1 p_n f(p_n | x, r) dp_n = W_n^{-1} \int_0^1 p_n^{t_n} (1-p_n)^{t_n-1} I dp_n \\ &= W_n^{-1} \left\{ \sum_{h_1=f_1}^{t_1} \cdots \sum_{h_{n-1}=f_{n-1}}^{t_{n-1}} W(h_1, \dots, h_{n-1}) B(f_n + 1, g_{n-1} + v_n - h_{n-1}) \right\}. \end{aligned}$$

而 R_n 的 Bayes 估计为

$$\begin{aligned} \hat{R}_n &= E(R_n | x) = \int_0^1 R_n f(p_n | x, r) dp_n \\ &= W_n^{-1} \int_0^1 \sum_{j=0}^N C_N^j p_n^j (1-p_n)^{N-j} p_n^{t_n-1} (1-p_n)^{t_n-1} I dp_n \\ &= W_n^{-1} \left\{ \sum_{h_1=f_1}^{t_1} \cdots \sum_{h_{n-1}=f_{n-1}}^{t_{n-1}} W(h_1, \dots, h_{n-1}) \sum_{j=0}^N C_N^j B(j + f_n, N - j + g_{n-1} + v_n - h_{n-1}) \right\}. \end{aligned}$$

至此定理2得证.

系4 当 $r=1$ 时,可得并联系统的 R_s 的 Bayes 估计

$$\hat{R}_s = W_s^{-1} \sum_{h_1=f_1}^{h_1} \cdots \sum_{h_{s-1}=f_{s-1}}^{h_{s-1}} W(h_1, \dots, h_{s-1}) \sum_{j=r}^N C_N^j B(j + f_s, N - j + g_{s-1} - v_s - h_{s-1}). \quad (32)$$

当 $r=N$ 时可得串联系统的 R_s 的 Bayes 估计

$$\hat{R}_s = W_s^{-1} \sum_{h_1=f_1}^{h_1} \cdots \sum_{h_{s-1}=f_{s-1}}^{h_{s-1}} W(h_1, \dots, h_{s-1}) B(N + f_s, g_{s-1} - v_s - h_{s-1}). \quad (33)$$

系5 若定理2中的条件(ii)中的 $a_i = b_i = 1$, 则 $\pi(p_i)$ 为 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 此时定理2中的结论变为 $U(0, 1)$ 验前分布下的 Bayes 估计.

系6 当 $r_i = 1$ 时, 定理2、系4和系5的结论变成几何抽样模型下的结论.

部件可靠度 p_i 的 $(1-\alpha)$ 置信下限 p_{iL} 可由下式确定

$$P(p_i \geq p_{iL}) = \int_{p_{iL}}^1 f(p_i | x, r) dp_i = 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (34)$$

从而系统可靠度 R_s 的 $(1-\alpha)$ 置信下限 R_{sL} 是

$$R_{sL} = \sum_{j=r}^N C_N^j p_{iL}^j (1 - p_{iL})^{N-j}. \quad (35)$$

2 验前分布的参数估计

为了简明起见, 以下论述的均略去 $p_i, x_i, r_i, a_i, b_i, \alpha_i$ 和 β_i 的下标 i .

2.1 关于定理2中 a, b 的估计

因为 $f(x | p, r) \propto p^x (1-p)^{r-x}$, $\pi(p) \propto p^{a-1} (1-p)^{b-1}$, x 的边缘分布为 $g(x, a, b) \propto \int_0^1 p^{x+a-1} (1-p)^{r+b-1} dp = B(x+a, r+b)$, 即 $g(x, a, b) = c B(x+a, r+b)$. 由于 $\sum_{x=0}^{\infty} g(x, a, b) = 1$, 所以容易求得 $c = [\sum_{x=0}^{\infty} B(x+a, r+b)]^{-1}$, 从而 $g(x, a, b) = [\sum_{x=0}^{\infty} B(x+a, r+b)]^{-1} \cdot B(x+a, r+b)$.

又因为

$$EX = \sum_{x=0}^{\infty} x B(x+a, r+b) / \sum_{x=0}^{\infty} B(x+a, r+b),$$

以及

$$EX^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 B(x+a, r+b) / \sum_{x=0}^{\infty} B(x+a, r+b).$$

设过去在第 i 个阶段已做过 n 次测试, 得数据为 x_1, x_2, \dots, x_n , 并且设每次测试时投放相同数量的部件, 则有

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{x=0}^{\infty} x B(x+a, r+b) / \sum_{x=0}^{\infty} B(x+a, r+b) \\ &\approx \sum_{x=0}^n x B(x+a, r+b) / \sum_{x=0}^n B(x+a, r+b), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 B(x+a, r+b) / \sum_{x=0}^{\infty} B(x+a, r+b) \\ &\approx \sum_{x=0}^M x^2 B(x+a, r+b) / \sum_{x=0}^M B(x+a, r+b),\end{aligned}\quad (37)$$

其中 M 是充分大的正整数, r 是定数.

利用计算机可以计算出同时满足式(36)和(37)的近似解 \hat{a} 和 \hat{b} , 这就是参数 a 和 b 的估计值.

2.2 关于定理1中的参数 a, β 的估计

因为 $\pi(p) \propto (-\ln p)^{a-1} p^{\beta-1}$, $\beta > 0$, a 为正整数, x 的边缘分布为

$$g(x, a, \beta) = \frac{\Gamma(a) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (x+k+\beta)^{-a}}{\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{\infty} (x+k+\beta)^{-a}},$$

又因为

$$EX = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\Gamma(a) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (x+k+\beta)^{-a}}{\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{\infty} (x+k+\beta)^{-a}},$$

以及

$$EX^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\Gamma(a) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (x+k+\beta)^{-a}}{\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{\infty} (x+k+\beta)^{-a}}.$$

同样假设在第 i 阶段已做过 n 次测试, 得数据为 x_1, x_2, \dots, x_n , 并且设每次测试时投放相同数量的部件. 则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\Gamma(a) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (x+k+\beta)^{-a}}{\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{\infty} (x+k+\beta)^{-a}} \\ &\approx \sum_{x=0}^M x \frac{\Gamma(a) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (x+k+\beta)^{-a}}{\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^M (x+k+\beta)^{-a}},\end{aligned}\quad (38)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\Gamma(a) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (x+k+\beta)^{-a}}{\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{\infty} (x+k+\beta)^{-a}} \\ &\approx \sum_{x=0}^M x^2 \frac{\Gamma(a) \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (x+k+\beta)^{-a}}{\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^M (x+k+\beta)^{-a}},\end{aligned}\quad (39)$$

其中 M 是充分大的正整数, r 是定数. 利用计算机可以算出同时满足式(38)和(39)的近似解 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$, 这就是参数 α, β 的矩估计值.

3 实例

某种产品系贵重仪表, 需要进行承受某种应力冲击的测试. 把测试分为三个阶段进行, 每一阶段均投入该种仪表同批生产或改进的产品三只. 由于每经一个阶段的测试后, 均对产品进行改进, 所以产品承受应力冲击的能力逐批提高, 即 $0 < p_1 < p_2 < p_3 < 1$. 我们要根据逐次测试产品的结果计算第三批产品为可靠度 p_3 和由其组成 $2/3(G)$ 系统的可靠度 R_3 , 有关测试数据如表 1.

表1 测试数据

测试阶段(i)	各阶段测试产品数	各阶段各测试产品承受应力冲击能力(次)	各阶段测试产品承受应力冲击总能力(次)
第一阶段	3	$\zeta_1 = 251, \zeta_2 = 304, \zeta_3 = 264$	$x_1 = \sum_{i=1}^3 \zeta_i = 819$
第二阶段	3	$\zeta_1 = 411, \zeta_2 = 317, \zeta_3 = 398$	$x_2 = \sum_{i=1}^3 \zeta_i = 1126$
第三阶段	3	$\zeta_1 = 631, \zeta_2 = 681, \zeta_3 = 663$	$x_3 = \sum_{i=1}^3 \zeta_i = 1975$

因无验前信息, 可取参数 p_i 的验前分布为 $U(0, 1)$ 分布: $\pi(p_i) = 1, 0 < p_i < 1, i = 1, 2, 3$. 因此可利用定理2的特殊情况系5的结论来求解(以下参见式(22)、(23)、(24)). 因为

$$\pi(p_i) = 1, \quad 0 < p_i < 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

所以

$$a_i = b_i = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$u_1 = x_1 + a_1 = 820, \quad u_2 = x_2 + a_2 = 1127, \quad u_3 = x_3 + a_3 = 1976,$$

$$v_1 = r + b_1 = 4, \quad v_2 = r + b_2 = 4, \quad v_3 = r + b_3 = 4,$$

$$g_1 = u_1 + v_1 + g_0 - 1 = 823, \quad g_2 = u_2 + v_2 + g_1 - 1 = 1953,$$

$$f_1 = u_1 + h_0 = 820, \quad f_2 = u_2 + h_1 = 1127 + h_1, \quad f_3 = u_3 + h_2 = 1976 + h_2,$$

$$Ch_1 = C_{r_1}^{f_1} B(f_1, g_0 + v_1 - h_0) = C_{823}^{f_1} B(820, 4),$$

$$Ch_2 = C_{r_2}^{f_2} B(f_2, g_1 + v_2 - h_1) = C_{1953}^{f_2} B(1127 + h_1, 827 - h_1),$$

$$W(h_1, h_2) = \prod_{i=1}^2 Ch_i = C_{823}^{f_1} B(820, 4) C_{1953}^{f_2} B(1127 + h_1, 827 - h_1),$$

$$\begin{aligned} W_3 &= \sum_{f_1=f_1}^{f_1} \sum_{f_2=f_2}^{f_2} w(h_1, h_2) B(f_3, g_2 + v_3 - h_2) \\ &= \sum_{f_1=820}^{823} \sum_{f_2=1953}^{1953} C_{823}^{f_1} B(820, 4) C_{1953}^{f_2} B(1127 + h_1, 827 - h_1) B(f_3, 1957 - h_2) \\ &= \sum_{f_1=820, f_2=1953}^{1953} C_{823}^{f_1} B(820, 4) C_{1953}^{f_2} B(1947, 7) B(1976 + h_2, 1957 - h_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{h_2=1948}^{1953} C_{111}^{111} B(820, 4) C_{1953}^{12} B(1948, 6) B(1976 + h_2, 1957 - h_2) \\
& + \sum_{h_2=1949}^{1953} C_{111}^{111} B(820, 4) C_{1953}^{12} B(1949, 5) B(1976 + h_2, 1957 - h_2) \\
& + \sum_{h_2=1950}^{1953} C_{111}^{111} B(820, 4) C_{1953}^{12} B(1950, 4) B(1976 + h_2, 1957 - h_2) \\
& \approx (2.6793 + 2.8684 + 2.3263 + 1.0847) \times 10^{-36} = 8.9587 \times 10^{-36},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{p}_3 &= W_3^{-1} \left\{ \sum_{h_1=f_1}^{f_1} \sum_{h_2=f_2}^{f_2} w(h_1, h_2) B(f_3 + 1, g_2 + v_3 - h_2) \right\} \\
&= W_3^{-1} \left\{ \sum_{h_1=820}^{823} \sum_{h_2=f_2}^{1953} C_{823}^{11} B(820, 4) C_{1953}^{12} B(1127 + h_1, 827 - h_1) B(1977 + h_2, 1957 - h_2) \right\} \\
&= W_3^{-1} \left\{ \sum_{h_2=1947}^{1953} C_{111}^{111} B(820, 4) C_{1953}^{12} B(1947, 7) B(1977 + h_2, 1957 - h_2) \right. \\
&\quad - \sum_{h_2=1948}^{1953} C_{111}^{111} B(820, 4) C_{1953}^{12} B(1948, 6) B(1977 + h_2, 1957 - h_2) \\
&\quad - \sum_{h_2=1949}^{1953} C_{111}^{111} B(820, 4) C_{1953}^{12} B(1949, 5) B(1977 + h_2, 1957 - h_2) \\
&\quad \left. - \sum_{h_2=1950}^{1953} C_{111}^{111} B(820, 4) C_{1953}^{12} B(1950, 4) B(1977 + h_2, 1957 - h_2) \right\} \\
&\approx W_3^{-1} \{ 2.6746 + 2.8635 + 2.3226 + 1.0831 \} \times 10^{-36} \\
&\approx \frac{8.9438 \times 10^{-36}}{8.9587 \times 10^{-36}} \approx 0.9983,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{R}_3 &= W_3^{-1} \left\{ \sum_{h_1=f_1}^{f_1} \sum_{h_2=f_2}^{f_2} w(h_1, h_2) \sum_{j=2}^3 C_j B(j + f_3, 3 - j + g_2 + v_3 - h_2) \right\} \\
&= W_3^{-1} \left\{ \sum_{h_1=820}^{823} \sum_{h_2=f_2}^{1953} w(h_1, h_2) [3B(1978 + h_2, 1958 - h_2) + B(1979 + h_2, 1957 - h_2)] \right. \\
&= W_3^{-1} \left\{ \sum_{h_2=1947}^{1953} C_{111}^{111} B(820, 4) C_{1953}^{12} B(1947, 7) [3B(1978 + h_2, 1958 - h_2) \right. \\
&\quad \left. + B(1979 + h_2, 1957 - h_2)] \right. \\
&\quad + \sum_{h_2=1948}^{1953} C_{111}^{111} B(820, 4) C_{1953}^{12} B(1948, 6) [3B(1978 + h_2, 1958 - h_2) \\
&\quad \left. + B(1979 + h_2, 1957 - h_2)] \right. \\
&\quad + \sum_{h_2=1949}^{1953} C_{111}^{111} B(820, 4) C_{1953}^{12} B(1949, 5) [3B(1978 + h_2, 1958 - h_2) \\
&\quad \left. + B(1979 + h_2, 1957 - h_2)] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{h_2=1950}^{1953} C_{1953}^{h_2} B(820, 4) C_{1953}^{h_2} B(1950, 4) [3B(1978 + h_2, 1958 - h_2) \\
& + B(1979 + h_2, 1957 - h_2)] \\
& \approx W_3^{-1} (2.67929 + 2.86837 + 2.32627 + 1.08465) \times 10^{-36} \\
& \approx \frac{8.95858 \times 10^{-36}}{8.9587 \times 10^{-36}} \approx 0.999987,
\end{aligned}$$

R_3 还有另一个解, 即

$$\begin{aligned}
\hat{R}_3 &= \sum_{j=1}^3 C_j \hat{p}_3^j (1 - \hat{p}_3)^{N-j} = \sum_{j=2}^3 C_j \hat{p}_3^j (1 - \hat{p}_3)^{N-j} \\
&\approx 3 \times (0.9983)^2 \times 0.0017 + (0.9983)^3 \approx 0.9999913.
\end{aligned}$$

从以上结果可见第三批产品可靠度 $\hat{p}_3 = 0.9983$, 而由其组成 $2/3(G)$ 系统的可靠度 R_3 有两个解: 一是 0.999987 , 一是 0.9999913 . 前者是根据定理推导的公式计算而得, 后者是把 \hat{p}_3 代入 $2/3(G)$ 系统可靠度公式计算而得. 一般来说前者均比后者略小, 因此选择前者作为 R_3 的解比较可靠.

下面进行分析与比较. (1) 从例子看到每次测试只用三只产品, 分三次测试, 总共也才用九只产品, 用以运算的测试数据也只有这九个数据. 因此, 本文所介绍的方法确实非常适用于小样本的测试模型. 并且几乎没有什么约束条件. 这是经典方法无法做到的. 但是, 本文的方法无法用来外推预测. (2) 经典方法需要大样本的数据而且往往约束条件较多, 但可用来外推预测.

参 考 文 献

- [1] 吴绍敏, 具有可靠性增长的几何、负二项模型参数的 Bayes 估计, 华侨大学学报(自然科学版), 2(1984).
- [2] Marry, H. F. and Waller, R. A., *Bayesian Reliability analysis*, John Wiley & Sons, (1982).

Bayes Estimate for the Reliability Growth of a $r/N(G)$ System with Negative Binomial Sampling

Wu Shuosi Wu Shaomin

(Department of Management Information Science)

Abstract The Bayes estimate was made for the reliability growth of a $r/N(G)$ system with negative binomial sampling model. The estimate was made under the condition that the survival probability p of the units possess a prior negative logarithmic gamma distribution, beta distribution, or a prior $U(0, 1)$ distribution in special situation. The main results are listed as theorems 1 and 2, while the conclusion obtained from a geometric sampling model may be seen as a special case. Examples are given finally.

Key words negative binomial sampling, reliability growth, Bayes estimate, prior distribution