第13卷 第1期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 13 №. 1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年1月 (NATURAL SCIENCE) Jan. 1992

分布自由的带滑动系数的逐步回归集成预报法

陈建伟 吴绍敏

（管理信息科学系）

摘要 本文建立关于分布自由的、带滑动系数的逐步回归集成最优方程具有如下特点：(1)对数据进行秩变换，从而排除正态、线性模型的限制；(2)利用“秩和”作为新因子，集中了几个因子的信息，从而利用了大量因子的信息；(3)在不同置信水平下建立多个秩数逐步回归方程，然后综合各个逐步回归方程的信息，建立分布自由的动态最优集成预报方程，其集成系数与各时刻的预报值有关，因而能利用各个时刻观测值的信息，提高预报的可靠性. 最后给出一个实例.

关键词 滑动系数，秩和因子，预报方程

1 问题的提出

(1)回归法总是受正态，线性的约束，因而限制其应用范围. (2)由于使用计算机，对每个预报对象可寻找到几十个甚至上百个相关因子，传统的线性回归法只能选取其中极少数的因子参加预报，从而浪费大量因子的信息. (3)传统的线性回归方程的系数与时间无关，因而不能充分利用各时刻观测值的信息，为克服上述的三个问题，本文提出分布自由的带滑动系数的逐步回归集成最优预报法.

2 秩和因子构造

1)因子选择：用秩相关系数检验法选出与预报对象 y 关系密切的因子，记为 $x_1, x_2, \cdots, x_l$，设 y 与各个因子有 N 个历史观测值，记为 $(y_i, x_{1i}, \cdots, x_{li})$ $(i=\overline{1,N})$，以 $x_{1t}, \cdots, x_{lt}$ 分别表示各因子在 t 时刻的当前值 $(t>N)$.

* 本文1990－12－11收到.

2)对历史数据作秩变换:对 y 的历史数据从小到大排列定秩[1],以 $R(y_i)$ 表示 y_i 之秩($i=\overline{1,N}$),若因子与 y 正相关,则将其历史数据从小到大排列定秩;若因子与 y 负相关,则按反向定秩.以 $R(x_{kj})$表示 x_{kj}之秩($j=\overline{1,N}$ $k=\overline{1,l}$),因子的当前值的秩则以它与本身的历史数据中最接近的数据之秩作为估计值,分别以 $R(x_{k,t})$ 表示($k=\overline{1,l}$,$t>N$).

3)秩和因子的构造:在全体因子中,先取10个,可作$\binom{10}{5}$个组合,每一组合由5个因子组成求其"秩和",通过计算机可求出$\binom{10}{5}$个"秩和",再将"秩和"作秩变换,选取 R_{x_t}最大者为"秩和因子",然得又放入5个因子与落选的5个因子合并,再按上法选取第二个"秩和因子".如此继续下去共得 $m=[l/5]$个"秩和因子",仍记为 $x_1,x_2,\cdots,x_m$,每个"秩和因子"都集中5个因子的信息,经大量计算证明:这样构造的"秩和因子"与 y 的秩相关系数:一般地都有显著地提高,应该指出:一般地用3—5个因子来构造"秩和因子"为宜,这要看选择的因子的多少而定,下面就以"秩和因子"的秩作的预报新因子.根据文[1]经秩变换后用于显著性检验的 F—统计量近似地服从 F—分布,所以利用新因子与 y 建立的预报方程不受正态、线性的限制.

3 滑动系数预报方程的建立

因新因子与预报对象 y 之秩线性相关,故 $R(y)$与新因子 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 满足线性模型

$$Y = XB + \varepsilon, \tag{1}$$

其中

$$Y=\begin{pmatrix}R(y_1)\\R(y_2)\\\vdots\\R(y_N)\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}1 & x_{11} & \cdots & x_{m1}\\1 & x_{12} & \cdots & x_{m2}\\\vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\1 & x_{1N} & \cdots & x_{NN}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\vdots\\\beta_m\end{pmatrix},\quad \varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\vdots\\\varepsilon_N\end{pmatrix},$$

ε 是随机误差且 $E\varepsilon=0$,$\mathrm{cov}(Y,Y)=\sigma^2 I_N$,$\sigma^2$是未知参数,$I_N$ 是 N 阶单位阵.

3.1 建立多个逐步回归方程

给定一组显著性水平$0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_s<1$,应用 F—检验,依次建立 $R(y)$与新因子的 s 个逐步回归方程,直到某一低水平下已挑不出新因子为止.设建立了 s 个方程

$$R(\hat{y})^{(l)} = \hat{\beta}_0^{(l)} + \hat{\beta}_1^{(l)} x_1^{(l)} + \cdots + \hat{\beta}_{m_l}^{(l)} x_{m_l}^{(l)}, \quad (l=\overline{1,s}), \tag{2}$$

每步都将已选上的因子除去,于是 $x_k^{(l)}\in\{x_1,\cdots x_n\}$ ($k=\overline{1,m_l}$),($l=\overline{1,m}$),$\sum_{l=1}^{s} m_l<m$,各个回归方程的系数估计为 $\hat{\beta}^{(l)}=(x'^{(l)}x^{(l)})^{-1}x'^{(l)}Y$,($l=\overline{1,s}$),这里

$$\hat{\beta}^{(l)}=\begin{pmatrix}\hat{\beta}_0^{(l)}\\\hat{\beta}_1^{(l)}\\\vdots\\\hat{\beta}_{m_l}^{(l)}\end{pmatrix},\quad X^{(l)}=\begin{pmatrix}1 & x_{11}^{(l)} & \cdots & x_{m_l 1}^{(l)}\\1 & x_{12}^{(l)} & \cdots & x_{m_l 2}^{(l)}\\\vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\1 & x_{1N}^{(l)} & \cdots & x_{m_l N}^{(l)}\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}R(y_1)\\\vdots\\R(y_N)\end{pmatrix}. \tag{3}$$

3.2 滑动系数集成预报方程的建立

因选入方程的因子之间"合作"不一定协调，所以高水平的方程其预测精度及预报效果不一定最好，为了充分综合各个方程在各个时刻的预报信息，可建立滑动系数集成预报方程

$$R(\hat{y}_t)=\sum_{l=1}^{s}c_l(t)R(\hat{y}_t^{(l)}),\qquad t=1,2\cdots \tag{4}$$

其中 $\sum_{l=1}^{s}c_l(t)=1$，应用拉格朗日乘数法，在条件 $\varphi=1-\sum_{l=1}^{s}c_l(t)=0$ 的条件下，求 $E[R(y_t)-R(\hat{y}_t)]^2$ 达到最小值的 $c_l(t)(l=\overline{1,s},t=1,2,\cdots)$ 可得

$$\begin{cases} B(t)C(t)=\dfrac{\lambda(t)}{2}D, \\ D'C(t)=1, \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$B(t)=\begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1s}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2s}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{s1}(t) & b_{s2}(t) & \cdots & b_{ss}(t) \end{bmatrix}_{ss},\quad c(t)=\begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_s(t) \end{bmatrix}_{s1},\quad D=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{s1}$$

$b_{lj}(t)=E\{[R(y_t)-R(y_t^{(l)})][R(y_t)-R(y_t^{(j)})]\}=E(\hat{e}_t^{(l)}\cdot\hat{e}_t^{(j)}),(l,j=\overline{1,s}),e_t^{(l)}$ 是式(2)的第 l 个方程在时刻 t 的预测误差，可证 $B(t)$ 是正定阵，故式(5)有唯一解

$$\hat{\lambda}(t)=\frac{2}{\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=1}^{s}a_{lj}(t)},\quad \hat{c}_l(t)=\frac{\sum_{j=1}^{s}a_{lj}(t)}{\sum_{j=1}^{s}\sum_{l=1}^{s}a_{lj}(t)}.\quad (l=\overline{1,s},t=1,2,\cdots), \tag{6}$$

其中 $(a_{lj}(t))_{ss}=[B(t)]^{-1}$，可证如下事实：1)由式(6)确定的 $\hat{C}_l(t)$ 的集成方程(4)，其预测误差比参加集成的所有单个回归方程的预测误差都要小，即

$$\mathrm{Var}[R(y_t)-R(\hat{y}_t)]<\mathrm{Var}[R(y_t)-R(\hat{y}_t^{(l)})],(l=\overline{1,s}).$$

2)有

$$b_{lj}(t)=\begin{cases} \sigma^2 e_t[I_N-x^{(l)}(x^{(l)'}x^{(l)})^{-1}x^{(l)'}][I_N-x^{(j)}(x^{(j)'}x^{(j)})^{-1}x^{(j)'}]e_t',t\leqslant N, \\ \sigma^2[1+x_t^{(l)}(x^{(l)'}x^{(l)})^{-1}x^{(l)'}x^{(j)}(x^{(j)'}x^{(j)})^{-1}x_t^{(j)'}],t>N, \end{cases}$$

其中 $e_i(i=\overline{1,N})$ 是 N 维单位向量，$x_t^{(l)}=(1,x_{t1}^{(l)}\cdots x_{tm_l}^{(l)})(i=\overline{1,m_l},l=\overline{1,s})$ 是新因子在时刻 $t(t>N)$ 的当前值，把 $b_{lj}(t)$ 代入式(6)消去 σ^2 可得与 σ^2 无关的 $\hat{c}_l(t)$，这样可建立方程(4).

4 滑动系数 $c_l(t)$ 的算法

1)利用 Cholesky 分解法将 $B(t)$ 分解为三角阵 $L(t)$ 与 $U(t)$ 的乘积：$B(t)=L(t)U(t)$，其中

$$L(t)=\begin{bmatrix} l_{11}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21}(t) & l_{22}(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ l_{s1}(t) & l_{s2}(t) & \cdots & l_{ss}(t) \end{bmatrix}_{ss},$$

$$U(t)=\begin{bmatrix}1 & \frac{l_{21}(t)}{l_{11}(t)} & \cdots & \frac{l_{s1}(t)}{l_{11}(t)} \\ & 1 & \cdots & \frac{l_{s2}(t)}{l_{22}(t)} \\ 0 & & \cdots & 1\end{bmatrix}_{ss},$$

且

$$\begin{cases} l_{ji}(t)=b_{ij}(t)-\sum\limits_{k=1}^{i-1}\dfrac{l_{ik}(t)l_{jk}(t)}{l_{kk}(t)}, & (i<j), \\ l_{ii}(t)=b_{ii}(t)-\sum\limits_{k=1}^{i-1}\dfrac{l_{ik}^2(t)}{l_{kk}(t)}, & (i<j). \end{cases} \tag{7}$$

2)解方程组：$L(t)(a_1(t)、\cdots,a_s(t))=\frac{1}{2}D'$，求得

$$a_i(t)=(\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}(t)a_k(t))/l_{ii}(t) \tag{8}$$

3)回代解方程组：$U(t)=(C_1^*(t),\cdots,C_s^*(t))=(a_1(t),\cdots a_s(t))$，其中 $C_i^*(t)=C_i(t)/\lambda$，求得

$$\begin{cases} C_j^*(t)=a_j(t)-\sum\limits_{k=j+r}^{s-j}\dfrac{l_{kj}(t)C_k^*(t)}{l_{jj}(t)}, & (j=s,s-1,\cdots,1), \\ C_j(t)=C_j^*(t)/\sum\limits_{j=1}^{s}C_j^*(t), \end{cases} \tag{9}$$

综合式(7)、(8)、(9)，正是求滑动系数 $C_i(t)$ 的全部递推公式，我们已编好计算软件.

5 实例

根据福建泉州地区气象台提供的631个气象要素及预报对象的23年观测值，预测福建永春县1986、1987年5月中旬的降水量，用秩相关检验法选出50个跟预报对象 y(永春县5月中旬的降水量)相关密切的因子(表1)，对因子作秩变换和构造秩和因子，将计算结果列于表2，在表2中可以看到新因子的相关系数有显著提高，在三个信度($a_1=0.01,a_2=0.025$，$a_3=0.05$)下，用逐步回归法建立三个方程

$$\begin{cases} R(\hat{y}^{(1)})=-0.7532+0.4201x_2+0.8511x_5, \\ R(\hat{y}^{(2)})=-6.4130+0.2305x_8+0.3414x_1, \\ R(\hat{y}^{(3)})=-13.3127+0.0971x_7+0.0253x_9+0.1432x_4, \end{cases} \tag{10}$$

建立分布自由的带滑动系数的预报方程

$$R(\hat{y}_t)=C_1(t)R(\hat{y}_t^{(1)})+C_2(t)R(\hat{y}_t^{(2)})+C_3(t)R(\hat{y}_t^{(3)}),\qquad t=1,2,\cdots, \tag{11}$$

$C_i(t)$ $(i=1,2,3;t=1,2,\cdots)$值见表3，要用方程(11)作预报，必须先求出方程(10)各方程的历史回报值及当前值 $R(\hat{y}_t^{(i)})(i=1,2,3,t=1,2,3)$，再由方程(11)作预报87年 y 的秩数为20.7，相当于 y 的值为133.20mm，而87年的实测值为124.30mm，误差为8.9mm，具体计算见表4.

为了比较，在信度为 $a=0.01$下按传统逐步回归法在前面50个因子中只选入两个因子，其方程为 $\hat{y}=2.543-0.7532x_{367}+8.4235x_{210}$，利用的因子信息极少. 此外，因降水量一般不是正态变量，故用传统的逐步回归法是不可行的，从历年的回报率及1986、1987年的预报值与实测

值来看，差距都很大，具体数值参看表4.

表1 因子的秩相关系数

因子	x_7	x_{19}	x_{23}	x_{41}	x_{63}	x_{76}	x_{91}	x_{135}	x_{159}	x_{174}
秩相关系数	0.413	0.531	0.398	0.612	0.513	0.366	0.491	0.531	0.381	0.417
因子	x_{209}	x_{21}	x_{31}	x_{257}	x_{271}	x_{39}	x_{345}	x_{387}	x_{392}	x_{411}
秩相关系数	−0.601	−0.391	0.571	0.437	0.363	0.518	0.349	0.431	0.409	0.392
因子	x_{432}	x_{488}	x_{468}	x_{471}	x_{473}	x_{482}	x_{491}	x_{499}	x_{526}	x_{529}
秩相关系数	0.388	0.491	0.561	0.397	0.510	0.587	0.431	0.381	0.502	0.512
因子	x_{531}	x_{536}	x_{549}	x_{554}	x_{561}	x_{583}	x_{576}	x_{578}	x_{581}	x_{582}
秩相关系数	−0.562	0.417	0.387	0.531	0.411	0.519	0.392	0.418	0.371	0.369
因子	x_{588}	x_{589}	x_{593}	x_{590}	x_{612}	x_{813}	x_{816}	x_{823}	x_{827}	x_{828}
秩相关系数	0.431	−0.601	0.381	0.431	0.512	−0.373	0.615	0.501	0.410	−0.521

表2 秩和因子及相关系数

新因子						相关系数					
x_1	$(x_{159}$	x_{387}	x_{135}	x_{449}	$x_{827})$	0.739	(−0.381	0.431	0.531	0.381	0.410)
x_2	$(x_{636}$	x_7	x_{209}	x_{683}	$x_{491})$	0.803	(0.41	0.413	−0.601	0.431	−0.431)
x_3	$(x_{345}$	x_{91}	x_{583}	x_{616}	$x_{626})$	0.685	(0.439	0.491	0.519	0.615	0.502)
x_4	$(x_{63}$	x_{257}	x_{609}	x_{448}	$x_{210})$	0.691	(−0.513	0.437	0.431	0.491	−0.391)
x_5	$(x_{581}$	x_{661}	x_{391}	x_{41}	$x_{550})$	0.811	(−0.371	0.411	0.518	0.612	0.561)
x_6	$(x_{76}$	x_{231}	x_{482}	x_{823}	$x_{631})$	0.769	(0.356	0.519	0.587	0.501	0.563)
x_7	$(x_{529}$	x_{392}	x_{592}	x_{23}	$x_{828})$	0.702	(0.512	0.409	0.431	0.398	−0.521)
x_8	$(x_{813}$	x_{578}	x_{411}	x_{549}	$x_{174})$	0.687	(−0.373	0.418	0.892	0.387	0.4171)
x_9	$(x_{432}$	x_{473}	x_{582}	x_{612}	$x_{271})$	0.619	(0.388	0.510	0.389	−0.512	−0.363)
x_{10}	$(x_{472}$	x_{19}	x_{576}	x_{554}	$x_{589})$	0.810	(−0.397	0.531	0.392	−0.531	−0.601)

表3 各时刻的滑动系数

年份	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973
$C_1(t)$	0.668	0.361	−0.686	0.139	−0.191	0.601	1.257	0.314	0.013	0.902	0.551	0.791	−1.341	0.498
$C_2(t)$	0.431	0.034	1.386	0.732	0.295	0.194	−0.357	0.123	0.78	0.04	0.241	0.034	−0.501	0.390
$C_3(t)$	0.501	0.605	0.300	0.139	0.895	0.195	−0.1	0.563	0.204	0.104	0.208	0.275	0.160	0.608
年份	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
$C_1(t)$	0.611	0.328	0.326	0.393	0.731	1.471	0.501	0.424	−0.466	0.621	0.721	0.429	0.301	0.517
$C_2(t)$	0.208	0.391	0.721	0.591	0.201	0.40	0.213	0.305	1.106	0.302	0.411	0.235	0.598	0.232
$C_3(t)$	0.181	0.281	−0.041	0.198	0.068	−0.821	0.286	0.270	0.360	0.77	−0.132	0.336	0.101	0.352

表4 预报结果及效果分析

年份	用本文所述方法						用通常的逐步回法		
	实测值	$R(y)$	$R(\hat{y})$	$\hat{y}$	误差 $\hat{y}-y$	评定	$\hat{y}$	误差 $\hat{y}-y$	评定
1960	251.00	25	21.67	133.20	−177.80	×	194.17	−56.83	×
1961	281.90	26	23.32	181.90	−100.00	√	116.48	−168.42	×

表4　预报结果及效果分析(续)

1962	114.80	30	21.58	133.20	18.40	✓	99.97	−14.83	×
1963	36.40	3	5.83	47.70	11.30	✓	83.44	47.04	×
1964	93.30	18	19.71	114.80	21.50	✓	81.15	12.15	✓
1965	65.10	10	12.41	69.10	4.00	✓	79.84	14.74	✓
1966	69.10	12	3.82	41.06	−28.10	✓	65.42	3.68	✓
1967	41.00	4	12.35	69.10	28.10	✓	71.47	30.65	✓
1968	108.90	19	15.93	84.50	−24.10	✓	66.47	42.43	×
1969	119.50	21	16.21	84.50	−35.00	✓	91.22	28.28	✓
1970	71.80	14.5	15.10	93.30	21.50	✓	87.57	15.77	✓
1971	181.90	23	23.61	195.40	13.50	✓	100.89	81.04	✓
1972	84.60	17	14.85	71.80	−12.60	✓	65.36	19.24	✓
1973	65.30	11	13.95	71.80	6.50	✓	66.96	1.66	✓
1974	28.30	1	2.41	29.90	1.60	✓	73.82	45.52	×
1975	133.20	22	21.29	119.50	−13.70	✓	76.20	57.00	✓
1976	62.40	9	7.74	53.50	−8.90	✓	130.34	68.74	✓
1977	50.60	7	11.26	65.30	14.70	✓	80.29	29.69	✓
1978	71.80	14.5	13.15	93.30	21.50	✓	65.29	6.51	✓
1979	29.90	2	6.87	50.60	20.70	✓	85.36	55.46	×
1980	42.20	5	1.32	28.30	−13.90	✓	122.99	80.27	✓
1981	47.70	6	7.14	50.60	2.90	✓	66.99	19.29	✓
1982	84.50	16	7.67	53.50	−31.00	✓	98.39	13.89	✓
1983	55.50	8	7.06	50.60	−2.90	✓	69.59	16.09	✓
1984	195.40	24	23.41	181.90	.13.50	✓	242.79	46.79	×
1985	70.70	13	16.20	84.60	13.6	✓	83.21	12.51	✓
预报 1986	162.00 (实际值)	23	22.6	181.90 (预报值)	19.60		123.47 (预报值)	39.52	
预报 1987	124.301 (实际值)	21	20.7	133.20 (预报值)	8.9		93.29 (预报值)	−30.61	
回报率(以回报误差小于极差的15%为准)92.3%							回报率(标准同左)59.5%		
复相关系数 $R=0.901$							复相关系数 $R=0.67$		

参　考　文　献

[1] Conover. W. J, *practical Nonparametric Statistics Published in the United States of America*, Second Edition, (1980).

[2] 安鸿志,时间序列的分析及应用,科学出版社,(1983).

[3] 陈建伟,逐步回归最小方差集成预报法 ,华侨大学学报(自然科学版)9,2(1988),159－160.

[4] 吴绍敏,几种相似预报方法,福建师大学报,4,3(1979),38－43.

附　　录

结论(1)　由式(6)确定的 $a_i(t)$ 的集成方程(4),其预测误差比参加集成的所有单个回归

方程的预测误差都要小，即 $\mathrm{Var}[R(y_t)-R(\hat{y}_t)]<\mathrm{Var}[R(y_t)-R(\hat{y}_t^{(l)})]$，$(l=\overline{1,s})$.

证明 由已知条件得

$$ER(\hat{y}_t)=E[\sum_{l=1}^{s}\hat{c}_l(t)R(\hat{y}_t^{(l)})]=\sum_{l=1}^{s}\hat{c}_l(t)ER(\hat{y}_t^{(l)})$$

$$=\sum_{l=1}^{s}\hat{c}_l(t)ER(y_t)=ER(y_t),$$

对单个预报方程(2)的预测误差的方差 $\mathrm{Var}[R(y_t)-R(\hat{y}_t^{(l)})]=E[R(y_t)-R(\hat{y}_t^{(l)})]^2$，$(l=\overline{1,s})$，取

$$\tilde{c}_i(t)=\begin{cases}1, i=l, (t=1,2,\cdots),\\ 0, i\neq l,\end{cases}$$

则有

$$E[R(y_t)-R(\hat{y}_t^{(l)})]^2=E[R(y_t)-R(\hat{y}_t)]^2.$$

显然，这样取的 $c_i(t)$ 不是集成预报均方误差的最小值，故按式(6)确定滑动系数的集成回归预报均方误差 $E[R(y_t)-R(\hat{y}_t)]^2$ 必满足

$$E[R(y_t)-R(\hat{y}_t)]^2<E[R(y_t)-R(\hat{y}_t^{(l)})]^2,(l=\overline{1,s}),$$

因此

$$\mathrm{Var}[R(y_t)-R(\hat{y}_t)]<\mathrm{Var}[R(y_t)-R(\hat{y}_t^{(l)})],(l=\overline{1,s}).$$

结论(2)

$$b_{ij}(t)=\begin{cases}\sigma^2 e_t[I_N-X^{(i)}(X^{(i)'}X^{(i)})^{-1}X^{(i)'}][I_N-X^{(j)}(X^{(j)'}X^{(j)})^{-1}X^{(j)'}]e_t^T, t\leqslant N,\\ \sigma^2[1+X_t^{(i)}(X^{(i)'}X^{(i)})^{-1}X^{(i)'}X^{(j)}(X^{(j)'}X^{(j)})^{-1}X^{(j)'}], t>N.\end{cases}$$

其中 $e_t(t=\overline{1,N})$ 是 N 维单位向量，$X_t^{(l)}=(1,x_{1t}^{(l)},\cdots,x_{m_lt}^{(l)})$，$x_{it}^{(l)}(i=\overline{1,m_l},l=\overline{1,s})$ 是新因子在时刻 t $(t>N)$ 的当前值.

证明 由 Gauss－Markov 定理得：当 $t>N$ 时，$R(y_t)$ 与 $R(\hat{y}_t^{(l)})(l=\overline{1,m})$ 互不相关，即

$$E[R(y_t)-ER(y_t)][R(y_t)-ER(\hat{y}_t^{(l)})]=0, \quad (l=\overline{1,s}); \tag{a}$$

当 $t<N$ 时，记 $(a_1^{(l)},\cdots,a_N^{(l)})\triangleq e_tX^{(l)}(X^{(l)'}X^{(l)})^{-1}X^{(l)'}$，$(l=\overline{1,s})$. 由于 $ER(y_t)=ER(\hat{y}_t^{(l)})$，$(l=\overline{1,m})$，$E[R(y_t)]^2=\sigma^2+[ER(y_t)]^2$，所以

$$\begin{aligned}ER(y_t)R(\hat{y}_t^{(l)})&=E[R(y_t)e_tX^{(l)'}(X^{(l)'}X^{(l)})^{-1}X^{(l)'}Y]\\
&=E[R(y_t)(a_1^{(l)},\cdots,a_N^{(l)})(R(y_1),\cdots R(y_N))']\\
&=E[R(y_t)\sum_{k=1}^{N}a_k^{(l)}R(y_k)]\\
&=a_t^{(l)}E[R(y_t)]^2+\sum_{k=1,k\neq t}^{N}a_k^{(l)}ER(y_t)R(y_k)\\
&=a_t^{(l)}\sigma^2-ER(y_t)\sum_{k=1}^{N}a_k^{(l)}ER(y_k)\\
&=\sigma^2e_tX^{(l)}(X^{(l)'}X^{(l)})^{-1}X^{(l)'}e_t^T+ER(y_t)ER(\hat{y}_t^{(l)}),\end{aligned} \tag{b}$$

$$ER(\hat{y}_t^{(i)})R(\hat{y}_t^{(j)})=E[e_tX^{(i)}(X^{(i)'}X^{(i)})^{-1}X^{(i)'}Ye_tX^{(j)}(X^{(j)'}X^{(j)})^{-1}X^{(j)'}Y]$$

$$=E\left[\sum_{k=1}^{N} a_k^{(i)} R(y_k) \sum_{j=1}^{N} a_i^{(j)} R(y_i)\right]$$

$$=\sigma^2 \sum_{k=1}^{N} a_k^{(i)} a_k^{(j)} + E\left[\sum_{k=1}^{N} a_k^{(i)} R(y_k)\right]\left[\sum_{j=1}^{N} a_i^{(j)} R(y_i)\right]$$

$$=\sigma^2 e_t X^{(i)} (X^{(i)'} X^{(i)})^{-1} X^{(i)'} X^{(j)} (X^{(j)'} X^{(j)}) e_t' + ER(\hat{y}_t^{(i)}) ER(\hat{y}_t^{(j)}). \tag{c}$$

同理可推出 $t>N$ 时，$ER(\hat{y}_t^{(i)}) R(\hat{y}_t^{(j)}) = \sigma^2 X_t^{(i)} (X^{(i)'} X^{(i)})^{-1} X^{(i)'} X^{(j)} (X^{(j)'} X^{(j)}) X_t^{(j)'} + ER(\hat{y}_t^{(i)}) ER(\hat{y}_t^{(j)})$，故

$$\begin{aligned}
b_{ij}(t) &= E[R(y_t) - R(\hat{y}_t^{(i)}))(R(y_t) - R(\hat{y}_t^{(j)}))\\
&= E[R(y_t)]^2 - ER(\hat{y}_t^{(i)})R(y_t) - ER(y_t)R(\hat{y}_t^{(j)}) + ER(\hat{y}_t^{(i)})R(\hat{y}_t^{(j)})\\
&= \begin{cases} \sigma^2 - \sigma^2 e_t X^{(i)} (X^{(i)'} X^{(i)})^{-1} X^{(i)'} e_t' - \sigma^2 e_t X^{(j)} (X^{(j)'} X^{(j)})^{-1} X^{(j)'} e_t' + \\ \quad \sigma^2 e_t X^{(i)} (X^{(i)'} X^{(i)})^{-1} X^{(i)'} X^{(j)} (X^{(j)'} X^{(j)})^{-1} X^{(j)'} e_t', t \leqslant N, \\ \sigma^2 + \sigma^2 X_t^{(i)} (X^{(i)'} X^{(i)})^{-1} X^{(i)} X^{(j)} (X^{(j)'} X^{(j)})^{-1} X_t^{(j)'}, t > N, \end{cases}\\
&= \begin{cases} \sigma^2 e_t [I_N - X^{(i)} (X^{(i)'} X^{(i)})^{-1} X^{(i)'}][I_N - X^{(j)} (X^{(j)'} X^{(j)})^{-1} X^{(j)'}] e_t', t \leqslant N, \\ \sigma^2 (1 + X_t^{(i)} (X^{(i)'} X^{(i)})^{-1} X^{(i)'} X^{(j)} (X^{(j)'} X^{(j)})^{-1} X_t^{(j)'}), t > N. \end{cases}
\end{aligned}$$

证毕.

A Stepwise Regressive Integrated Optimal Prediction Method with Freedom of Distribution and Slide Coefficient

Chen Jianwei　　Wu Shaomin

(Department of Management Information Science)

Abstract　A stepwise regressive integrated optimal prediction method with freedom of distribution and slide coefficient is presented in this paper. The method is characterized by 1) transforming data into rank so as to remove the confinement of normal linear model; 2) poolinformation from several factors by "sum of rank". So as to make use of infomation from a last amout of factors; and 3) forming multiple stepwise regressive equations with cyclomatic numbers under different confidence levels, and then forming a freely distributed dynamic optimal integrated prediction method by synthesizing the information from these stepwise regressive equations. Its integration coefficient relates to the predicted values at different time, thus the reliability can be promoted by making use of information of observed values at different time. The method is exemplified at the end of the paper.

Key words　slide coefficient, factor of rank-sun, prediction equation