

双圆弧样条法的线切割机3B指令生成原理

王子丁

王博文

(信息管理科学系)

(计算机科学(电脑)系)

摘要 本文采用局部坐标的简单双圆弧样条法,将列表曲线拟合成光滑衔接的分段圆弧,并进一步生成线切割机的3B指令系列。

关键词 样条拟合,电火花线切割,生成机制

在数据技术中,经常碰到需要解决列表曲线的拟合问题,即对给定一组列表点 $P(i=0,1,\dots,N)$,要求连出适当的曲线,使之保持光滑,以便绘图、切割等加工。而多数数控设备仅能加工直线和圆及由它们构成的工件。近年来,普遍采用双圆弧样条方法来解决此类问题^[1,2]。为了适应于在线切割机上简单生成3B指令,我们采用计算方法简单且稳定的局部三次样条曲线的双圆弧样条拟合办法,将列表曲线拟合成分段光滑衔接的圆弧,求出具有几何不变性质的双圆弧的半径、圆心和拼接点的坐标位置,从而生成在线切割机上的12种类型的3B指令系列。

1 局部三次样条曲线的计算

为了解决大挠度问题,我们采用局部坐标系,即把相邻列表点两两用直线连起来,在两点之间采用以弦作为横坐标,与之垂直的直线作为纵坐标,然后在每个局部坐标中作三次样条曲线,这样可解决大挠度问题(图1)。

如图2所示,通过任意两相邻的列表点 P_1, P_2 作局部坐标,记弦长 $L = \overline{P_1 P_2}$, m_1, m_2 为曲线 I 在 P_1, P_2 点的切线, θ_1, θ_2 分别为 m_1, m_2 与局部坐标轴的夹角,逆时针为正、顺时针为负, k_1, k_2 为曲线 I 在 P_1, P_2 处的曲率。

曲线是平面上列表点 $\{P_i\} (i=0,1,\dots,N)$ 的局部三次样条曲线是指它满足以下两个条件:

(1) 在每个局部坐标 (u, v) 中,曲线是以弦为自变量的三次多项式,即

$$v = au^3 + bu^2 + cu \quad (1)$$

(2) 整条曲线及切线、曲率均为连续。假定三次样条曲线是局部小挠度,即 $|\theta_1|$ 或 $|\theta_2| < \pi/4$, 由于局部曲线过 $P_1(0,0)$ 和 $P_2(L,0)$ 两点,因此有

$$c = -aL^2 - bL \quad (2)$$

本文1990-04-24收到。

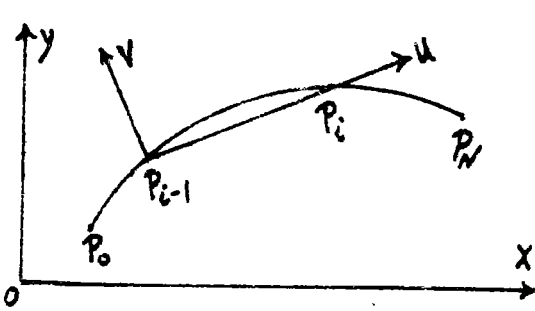


图1 采用局部坐标克服大挠度

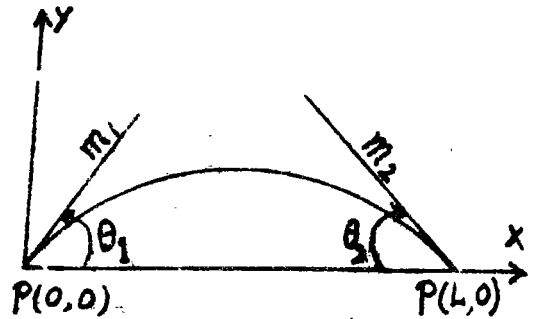


图2 局部三次曲线

设 v'_1, v'_2 为曲线在 P_1, P_2 点上的一阶导数, v''_1, v''_2 为曲线在 P_1, P_2 点上的二阶导数, 从式(1)和(2)便得

$$\begin{cases} v'_1 = -\frac{L}{6}(2v''_1 + v''_2), \\ v'_2 = \frac{L}{6}(v''_1 + 2v''_2), \end{cases} \quad (3)$$

由曲率 $K = v'' / (1 + v'^2)^{3/2}$ 即 $v'' = k(1 + v'^2)^{3/2}$, 于是式(3)可改写为

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \theta_1 = -\frac{L}{6} \left(\frac{2}{\cos^3 \theta_1} k_1 + \frac{1}{\cos^3 \theta_2} k_2 \right), \\ \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{L}{6} \left(\frac{1}{\cos^3 \theta_1} k_1 + \frac{2}{\cos^3 \theta_2} k_2 \right), \end{cases}$$

两边关于 θ_1 和 θ_2 进行 Taylor 展开, 忽略其高阶项得

$$\begin{cases} \theta_1 = -(L/6)(2k_1 + k_2), \\ \theta_2 = (L/6)(k_1 + 2k_2), \end{cases} \quad (4)$$

对于第 i 段 (P_{i-1}, P_i 之间) 来说, 式(4)加上足标, 即得

$$\begin{cases} \theta_{1,i} = -(L_i/6)(2k_{i-1} + k_i), \\ \theta_{2,i} = (L_i/6)(k_{i-1} + 2k_i), \end{cases} \quad (5)$$

如图3所示, 为了保证曲线在 P_i 处的切线连续, 必须成立

$$\theta_{2,i} - \theta_{1,i+1} = \varphi_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (6)$$

φ_i 表示相邻两条弦 $P_{i-1}P_i$ 与 P_iP_{i+1} 之间的夹角, $\varphi_{1,1}$

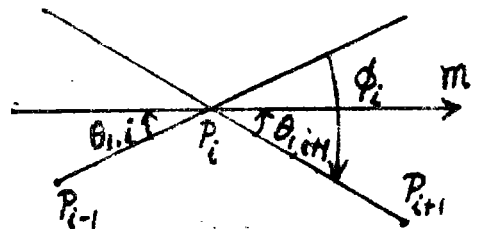
$\varphi_{2,N}$ 分别表示初弦 P_0P_1 和末弦 $P_{N-1}P_N$ 与 x 轴的夹角.

上式中两个相减, 实际上是两角度绝对值相加, 因为 θ 为有向角, $\theta_{2,i}$ 为负, $\theta_{1,i+1}$ 为正.

由(5)、(6)两式得到切线连续方程组

$$\begin{aligned} L_i k_{i-1} + 2(L_i + L_{i+1})k_i + L_{i+1}k_{i+1} &= 6\varphi_i, \\ (i &= 1, 2, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (7)$$

在附加两个适当边界条件后, 方程组便可唯一解

图3 列表点 P_i 弦切角关系

出 $K_i (i=0, 1, 2, \dots, N)$. 一般边界条件限为: (1) 给出起始点 P_0 和末端点 P_N 的导数 m_0, m_N ; (2) 给出起始点 P_0 和末端点 P_N 的曲率 k_0, k_N ; (3) 当不给边界条件时, 可采用“抛物端”边界. 即

$$\begin{cases} K_0 = CK_1, \\ K_{N-1} = DK_N, \end{cases} \quad (8)$$

其中 C, D 可根据实际情况而取. 一般可取 $C, D=1$.

式(7)连同边界条件组成的方程组是三对角线方程组, 用一般的“追赶法”可求出 K_i , 从而由式(5)算出 $\theta_{1,i}$ 和 $\theta_{2,i} (i=1, 2, \dots, N)$, 这里我们关心的是求双圆弧时需用的 $\theta_{1,i}$ 和 $\theta_{2,i}$, 至于局部三次样条曲线的具体情况就不去提及它了.

2 双圆弧拟合的计算公式

设两点 P_1, P_2 及其两切线 m_1 和 m_2 都给定, 构造两段圆弧 C_1 和 C_2 , 使之 C_1 过 P_1 且切于 m_1 , C_2 过 P_2 且切于 m_2 , C_1 和 C_2 在拼接点 T 相切, 这样的两圆弧称为双圆弧拟合. 我们可以证明这样的两段圆弧是存在的, 并且拼接点 T 的轨迹是一个圆, 若将 T 取在 $\triangle P_1 P P_2$ 的内心, 如图4所示, 则双弧便可唯一确定, 这时可求出双圆弧的半径、圆心和拼接点(在原列表点坐标 (x, y) 中).^[3]

2.1 双圆弧的半径

$$\begin{cases} R_1 = \frac{\sin \frac{\theta_2}{2}}{2 \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} \cdot L \\ R_2 = \frac{\sin \frac{\theta_1}{2}}{2 \sin \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} \cdot L \end{cases} \quad (9)$$

2.2 拼接点 $T(x_T, y_T)$ 的坐标

$$\begin{cases} x_T = x_1 - 2R_1 \sin \frac{\theta_1}{2} \cos(\bar{\theta} + \frac{\theta_1}{2}), \\ y_T = y_1 - 2R_1 \sin \frac{\theta_1}{2} \sin(\bar{\theta} + \frac{\theta_1}{2}), \end{cases} \quad (10)$$

其中 x_1, y_1 为 P_1 点的坐标, x_2, y_2 为 P_2 点的坐标, $\bar{\theta}$ 为列表点 P_1, P_2 的弦 $\overline{P_1 P_2}$ 与列表点坐标横轴的夹角, 即

$$\bar{\theta} = \arctan \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right). \quad (11)$$

2.3 双圆弧的两个圆心 O_1, O_2 的坐标

$$\begin{cases} x_{01} = x_1 - R_1 \sin(\theta_1 + \bar{\theta}), \\ y_{01} = y_1 + R_1 \cos(\theta_1 + \bar{\theta}). \end{cases} \quad (12)$$

3 拐点处理

按定义 φ_i 是相邻两条弦的有向夹角, 每个列表点 P_i 对应一个 φ_i , 我们判断两相邻列表点 P_i, P_{i+1} 之间是否有拐点, 只要判别它们所对应的 φ_i, φ_{i+1} 的关系⁽³⁾. 若 $\varphi_i \cdot \varphi_{i+1} > 0$, 则 P_i 与 P_{i+1} 之间无拐点, 若 $\varphi_i \cdot \varphi_{i+1} < 0$, 则 P_i 与 P_{i+1} 之间有拐点.

为了使双圆弧具有良好的光顺性, 首先找出局部三次样条上的全部拐点, 将它们作为新的列表点插入列表点之间, 即若 P_i, P_{i+1} 之间出现拐点, 可在 P_i 和 P_{i+1} 之间加密一点 P'_i , 添加点可取为 $\triangle P_i P P_{i+1}$ 的内心如图5所示.

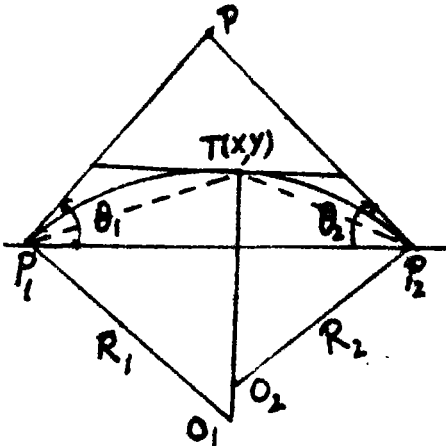


图4 双圆弧的半径、圆心和拼接点

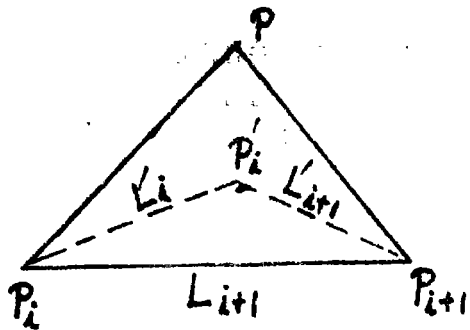


图5 添加点 P' , 取 $\triangle P_i P P_{i+1}$ 的内心

对于某些特别大挠度, 即在局部坐标下, 仍旧大挠度, $|\theta_1|$ 或 $|\theta_2| > \pi/4$, 我们也可以采取增加列表点的办法来解决.

4 3B 指令系列的生成

上面的运算结果是一系列圆弧. 各圆弧的圆心标为 $(o_{1x}, o_{1y}), (o_{2x}, o_{2y}), \dots, (o_{mx}, o_{my})$, 对应半径为 R_1, R_2, \dots, R_m , 对应起始终止点系列为 $(x_{1b}, y_{1b}), (x_{1e}, y_{1e}), (x_{2b}, y_{2b}), (x_{2e}, y_{2e}), \dots, (x_{mb}, y_{mb}), (x_{me}, y_{me})$. 可根据简单的公式判断而生成12种类型的3B指令. 这些起始点、终止点系列实际上是 $P_0, T_0, P_1, T_1, P_2, \dots, P_N$. 其中 P_0, P_1, \dots, P_N 是用户所给出的. T_0, T_1, \dots, T_{N-1} 则是计算出的双圆弧的切点.

生成12种3B指令的过程如下: 设某圆心坐标为 (o_x, o_y) , 半径为 R , 圆弧起始点坐标为 (x_a, y_a) , 终止点为 (x_e, y_e) , 可进行如下(a) — (b)的判断.

(a) $R \geq 10^4 \mu$ 时, 应生成直线型3B指令, 即 L_1, L_2, L_3 或 L_4 . 可根据变动坐标原点 (x_a, y_a) , 及另一点 (x_e, y_e) 来判断该线段处在变动坐标的哪个象限. 比如当 $x_1 = (x_e - x_a) > 0$ 及 $y_1 = (y_e - y_a) \geq 0$, 则为第一象限, 生成 L_1 型3B指令. 计数方向的选定由 x_1, y_1 值来定. $|x_1| \geq |y_1|$ 时, 计数方向

选成 G_+ 。这时具体的3B指令为 $B|x_i|B|y_i|B|x_i|G_+L_1$ ，当计数方向选为 G_- 时，3B指令为 $B|x_i|B|y_i|B|y_i|G_-L_1$ 。位于变动坐标上其它象限的线段应生成 L_1, L_2, L_3, L_4 型3B指令。其计数方向与计数长度的确定原理为 L_1 的情况相同。即线段投影到变动坐标 x 轴的长度大于或等于 y 轴上投影的长度时，以 G_+ 为计数方向，计数长度为 $|x_u - x_s|$ ；否则以 G_- 为计数方向，计数长度为 $|y_u - y_s|$ 。

(b) $R_i < 10^4 u$ 时，应生成圆弧型3B指令，即顺时针1、2、3、4象限圆弧3B指令 SR_1, SR_2, SR_3, SR_4 和逆时针1、2、3、4象限圆弧3B指令 NR_1, NR_2, NR_3, NR_4 型指令。顺时针或逆时针可在用户给出的第1个点 P_0 处加以判断。若第1段拟合圆弧在该点的切角为正，则判为顺时针，否则为逆时针。本方法拟合的多段圆弧所组成的光顺曲线无拐点，故为既定点列生成的圆弧型3B指令的逆时针性质保持不变。

每段圆弧对应的3B指令象限性质则由变动坐标（以 o_i 为新原点， x 轴、 y 轴方向不变）中起始立 (x_s, y_s) 在哪个象限来确定。处于第1象限时生成 NR_1 或 SR_1 型3B指令。余者类推。圆弧型3B指令为 x 值及 y 值应为 $|x_s - o_{ix}|$ 及 $|y_s - o_{iy}|$ 。

最后还应确定计数方向和计数长度。计数方向取决于圆弧终点 (x_u, y_u) 在变动坐标中的位置。当 $|x_u - o_{ix}| < |y_u - o_{iy}|$ 时计数方向取 G_+ ；反之，取 G_- 。计数长度的确定需先判断圆弧起始点与终止点是否处于变动坐标的同一象限。由于本方法拟合的圆弧其弧度不超过 $\pi/2$ ，故只有两种可能的情况存在。一是这一对点处于变动坐标同一象限，另一情况是两点处于相邻的象限。处于同一象限时，若计数方向为 G_+ ，则计数长度应为 $|x_u - x_s|$ ；若计数方向为 G_- ，则计数长度为 $|y_u - y_s|$ 。对于两点处于不同象限的情况，又须判断两点是处于哪两个相邻象限。它们有可能处于1、2象限，2、3象限，3、4象限或1、4象限。处于1、2或3、4象限时计数长度应为 $R_i - |y_u - o_{iy}| - R_i - |y_s - o_{iy}|$ 或 $|x_u - o_{ix}| + |x_s - o_{ix}|$ 。两点处于2、3或1、4象限时，计数长度应为 $|y_u - o_{iy}| + |y_s - o_{iy}|$ 或 $R_i - |x_u - o_{ix}| + R_i - |x_s - o_{ix}|$ 。

参 考 文 献

- [1] 孙家昶，局部坐标下的样条与圆弧曲线，数学学报，20(1977)，20—40。
- [2] 孙家昶著，样条函数与计算几何，科学出版社，(1982)。
- [3] 刘鼎元、苏文荣，局部三次曲线和双圆弧样条，电子计算机应用技术资料汇编，2(1982)，177—186。
- [4] 复旦大学、国营长风机械总厂，数字程序控制线切割机，国防工业出版社，(1983)。

Principle of Generating 3B Instructions for Wire Cutting Machine by the Method of Biarc Splines

Wang Ziding

Wang Bowen

(Department of Management

(Department of Computer Science)

Information Science)

Abstract In this paper, the method of biarc splines in local coordinate, an approximate method, is presented to fit a list of given points into smoothly connected piecewise circular arcs. Thereby, 3B instructions for wire cutting machine may be generated with a generating mechanism. Some conditions are reasonably assumed when the fit curve is generating.

Key words instruction, wire cutting machine biarc spline, fit curve