第13卷 第1期　　华侨大学学报自然科学版　　Vol. 13 No. 1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年1月　　(NATURAL SCIENCE)　　Jan. 1992

非线性不等组的一个解法

朱 尔 圆

(管理信息科学系)

摘要 本文给出非线性不等组的一个解法,并且证明其收敛性.最后给出计算实例.

关键词 非线性不等组,收敛性,解

0 引言

不等组的讨论,在理论和实践中都是很重要的.在文[1]中已给出线性不等组之解的充要条件,1986年,文[2]给出了线性不等组的一个解法,本文给出非线性不等组的一个解法,并且证明它的收敛性,最后给出计算实例.

1 问题的提出

求解不等组

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) > 0, \\ g_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) > 0, \\ \cdots \\ g_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) > 0, \end{cases} \tag{1}$$

今记

$$x = [x_1,x_2,\cdots,x_n]^T \in R^n$$

式(1)可以写成

$$\begin{cases} g_1(x) > 0, \\ g_2(x) > 0, \\ \cdots \\ g_m(x) > 0 \end{cases} \tag{2}$$

现在的问题是:设式(2)在 R^n 中有解,可以利用求解条件极值问题,来寻求一个满足式(2)的解

本文1990－10－14收到.

$x^* \in R^n$.

2 求解过程

1)记号(k,i是非负整数)

$$T_k = \{i \mid g_i(x^k) > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\},$$
$$S_k = \{i \mid g_i(x^k) \leqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\},$$
$$H_{k+1} = \{x \mid g_i(x) > 0,\ i \in T_k\},$$
$$u_{k+1}(x) = -\sum_{i \in S_k} g_i(x) + \frac{1}{10^k} \sum_{i \in T_k} \frac{1}{g_i(x)}.$$

2)步骤　先任取一个初始值$x^0 \in R^n$,计算

$$T_0 = \{i \mid g_i(x^0) > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\},$$
$$S_0 = \{i \mid g_i(x^0) \leqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

若$S_0 = \varnothing$,则x^0为式(2)的解,否则$S_0 \neq \varnothing$,这时,作

$$u_1(x) = -\sum_{i \in S_0} g_i(x) + \frac{1}{10^0} \sum_{i \in T_0} \frac{1}{g_i(x)}$$

和

$$H_1 = \{x \mid g_i(x) > 0, i \in T_0\},$$

求解条件极值问题

$$\min_{x \in H_1} u_1(x). \tag{3}$$

设x^1是式(3)的解,即

$$u_1(x^1) = \min_{x \in H_1} u_1(x),$$

计算

$$T_1 = \{i \mid g_i(x^1) > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m\},$$
$$S_1 = \{i \mid g_i(x^1) \leqslant 0,\ 0 \leqslant i \leqslant m\},$$

由H_1的构造可知

$$T_0 \subseteq T_1, \qquad S_0 \supseteq S_1,$$

若$S_1 = \varnothing$,则x^1就是式(2)的解. 否则,$S_1 \neq \varnothing$,按上面方法可以求出x^2.

今设已求出x^k,计算

$$T_k = \{i \mid g_i(x^k) > 0, 1 \leqslant i \leqslant m\},$$

且有$T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq T_k$,

$$S_k = \{i \mid g_i(x^k) \leqslant 0,\ 0 \leqslant i \leqslant m\},$$

且有$S_0 \supseteq S_1 \supseteq \cdots \supseteq S_k$,

若$S_k = \varnothing$,则x^k就是式(2)的解. 否则$S_k \neq \varnothing$,作

$$H_{k+1} = \{x \mid g_i(x) > 0,\ i \in T_k\},$$
$$u_{k+1}(x) = -\sum_{i \in S_k} g_i(x) + \frac{1}{10^k} \sum_{i \in T_k} \frac{1}{g_i(x)},$$

求解条件极值问题.

$$\min_{x\in H_{k+1}} u_{k+1}(x), \tag{4}$$

设 x^{k+1}是式(4)的解，即

$$u_{k+1}(x^{k+1}) = \min_{x\in H_{k+1}} u_{k+1}(x).$$

按此步骤，可以求出 $x^1,x^2,\cdots,x^k,x^{k+1},\cdots$当满足一定的条件时(见下面定理)，有限步之后，$x^k$就是式(2)的解.

3)收敛性证明

定理 若式(2)有解，且条件极值问题

$$\min_{x\in H_k} u_k(x)$$

有解，则可以求出 $x^*\in R^n$，为(2)的解.

证明 只需证明，用2)的步骤，有限步之后 $S_k=\varnothing$，这时 $x^*=x^k\in R^n$ 就是式(2)的解. 今用反证法.

若不论多大的 k，都有 $S_k\neq\varnothing$，设 $H_0=\{x\,|\,g_i(x)>0, i=1,2,\cdots,m\}$，由题设知 $H_0\neq\varnothing$，取定 $y\in H_0$. 由于 m 是有限数，故当 k 充分大时，就有 $T_k=T_{k+1}=\cdots$，从而 $S_k=S_{k+1}=\cdots$，今 x^{k+1}是条件极值问题 $\min\limits_{x\in H_{k+1}} u_{k+1}(x)$的解，即

$$u_{k+1}(x^{k+1}) = \min_{x\in H_{k+1}} u_{k+1}(x).$$

由于 $H_0\subseteq H_{k+1}$，故

$$u_{k+1}(x^{k+1}) \leqslant u_{k+1}(y) = -\sum_{i\in S_k} g_i(y) + \frac{1}{10^k}\sum_{i\in T_k}\frac{1}{g_i(y)}$$

而

$$\sum_{i\in S_k} g_i(y) > 0 \text{ 和 } \sum_{i\in T_k}\frac{1}{g_i(y)} > 0$$

都是与 k 无关的固定数. 因此，可以取充分大的 k，使

$$\frac{1}{10^k}\sum_{i\in T_k}\frac{1}{g_i(y)} < \varepsilon,$$

即可使 $u_{k+1}(y)<0$，从而

$$u_{k+1}(x^{k+1}) < 0; \tag{5}$$

但另一方面，

$$\begin{aligned} u_{k+1}(x^{k+1}) &= -\sum_{i\in S_k} g_i(x^{k+1}) + \frac{1}{10^k}\sum_{i\in T_k}\frac{1}{g_i(x^{k+1})} \\ &= -\sum_{i\in S_{k+1}} g_i(x^{k+1}) + \frac{1}{10^k}\sum_{i\in T_{k+1}}\frac{1}{g_i(x^{k+1})} \geqslant 0, \end{aligned}$$

与式(5)矛盾. 证毕.

3 实例

设不等组

$$\begin{cases} g_1(x,y) = \dfrac{1}{2-x} > 0, \\ g_2(x,y) = \dfrac{1}{2-y} > 0, \\ g_3(x,y) = 2(x+y) > 0, \\ g_4(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-1} > 0, \end{cases} \tag{6}$$

求 $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} \in R^2$，满足式(6).

解　取 $\begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$，可计算出

$$S_0 = \{i \mid g_i(x^0,y^0) \leqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant 4\} = \{3\},$$

$$T_0 = \{i \mid g_i(x^0,y^0) > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant 4\} = \{1,2,4\},$$

由于 $S_0 \neq \varnothing$，故构造

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= -\sum_{i\in S_0} g_i(x,y) + \sum_{i\in T_0} \frac{1}{g_i(x,y)} \\ &= -2(x+y) + (2-x) + (2-y) + (x^2+y^2-1) \\ &= (x-1)^2 + (y-1)^2 - x - y + 1, \end{aligned}$$

由于

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 2(x-1) - 1, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} = 2(y-1) - 1,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2,$$

得 Hessien 矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 正定. 故稳定点

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

就是在 R^2 上的全局极小值点[3]. 记

$$H_1 = \{(x,y) \mid g_i(x,y) > 0, i \in T_0\},$$

验算

$$g_1\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) > 0, \qquad g_2\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) > 0, \qquad g_4\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) > 0,$$

故

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \in H_1,$$

即

$$u_1\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \min_{(x,y)\in H_1} u_1(x,y),$$

再验算

$$g_3(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) > 0,$$

得

$$S_1 = \{i \mid g_i(x^1,y^1) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 4\} = \varnothing,$$

令取

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \in R^2,$$

是式(6)的解.

参 考 文 献

[1] 赵凤治,线性规划计算方法,科学出版社,(1981),第二章,56—70.
[2] 赵凤治,线性不等组的一个解法和简约.数值计算与计算机应用,3(1986),135—140.
[3] T.M.菲赫金哥尔茨(杨弢亮译),微积分学教程,高等教育出版社,(1955),409—410.

A Method for Solving Nonlinear Inequality System

Zhu Eryuan
(*Department of Management Information Science*)

Abstract This paper gives a method for solving nonlinear inequality system and demonestrates its convergence. It gives also a numerical example.

Key words nonlinear inequality system, convergence, solution