第13卷 第1期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 13 №. 1
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1992年1月 (NATURAL SCIENCE) Jan. 1992

脱化抛物型方程广义解梯度的Hölder连续性*

梁学信 梁鋆廷
(华侨大学) (中山大学)

摘要 本文给出下面的脱化抛物型方程(1)的广义解的空间梯度∇u的局部Hölder连续性的一个证明.

关键词 脱化抛物型方程,广义解,空间梯度,Hölder连续性

0 引言

设G是n维欧氏空间E^n中的有界域($n>2$),$T>0$,$Q=G\times(0,T)$.陈亚浙[1]考虑了脱化抛物型方程

$$u_t-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)=0 \qquad \text{在} Q \text{内} \tag{$*$}$$

并在$P>\max\{\frac{3}{2},\frac{2n}{n+1}\}$的限制下证明($*$)的广义解$u\in L_\infty(0,T,L_2(G))\cap L_p(0,T,W_p^1(G))$在$Q$内有Hölder连续性的空间梯度$\nabla u$.较前Alikakos—Evans[2]在$p>2$的限制下,证明了($*$)的广义解的空间梯度$\nabla u$在$Q$内连续.文[1]中限制$p>\max\{\frac{3}{2},\frac{2n}{n+1}\}$仅仅上为了推导$\nabla u$在$Q$内的局部有界性.对$p$的限制可以放宽为$p>\max\{1,\frac{2n}{n+1}\}$.现在考虑比($*$)广泛一些的脱化抛物型方程.

$$u_t-\operatorname{div}\vec{A}(\nabla u)=0, \qquad \text{在} Q \text{内}, \tag{1}$$

其中$\vec{A}(\xi)=(A^1(\xi),\cdots,A^n(\xi))$是$C^1$类,$\vec{A}(o)=0$,并且$a^{\alpha\beta}(\xi)=\frac{\partial}{\partial x^\beta}A^\alpha(\xi)$($\alpha,\beta=1,2,\cdots,n$)满足下面条件:

$$a^{\alpha\beta}(\xi)\eta^\alpha\eta^\beta\geqslant|\xi|^{p-2}|\eta|^2, \qquad |a^{\alpha\beta}(\xi)|\leqslant k|\xi|^{p-2}, \tag{2}$$

其中$k\geqslant1$是常数.我们将用和文[1]完全不同的方法证明以下定理:

本文1990—04—27收到.
福建省自然科学基金资助课题.

1 主要结果

定理 设 $p>\max\{1,\frac{2n}{n+1}\}$，设 u 是式(1)的广义解，即 $u\in L_\infty(0,T,L_2(G))\cap L_p(0,T,W_p^1(G))$，并且满足

$$\int_0^t\int_G\{-\varnothing_t u+\nabla\varnothing\cdot\vec{A}(\nabla u)\}dxdt+\int_G\varnothing(x,t)u(x,t)\big|_{t=0}^{t=t}dx=o. \tag{1'}$$

$$\forall\, t\in(o,T),\qquad \varnothing\in W_2^1(0,T,L_2(G))\cap L_p(0,T,W_p^1(G)),$$

其中 $u(x,0)\in L_2(G)$ 是 u 的初值．那么 ∇u 在 Q 内局部 Hölder 连续．

证明 (一)先证 ∇u 在 Q 内局部有界．为此代替式(1)考虑方程

$$u_t-\operatorname{div}(\varepsilon\nabla u+\vec{A}_\varepsilon(\nabla u))=0,\qquad \varepsilon\in(0,1), \tag{1$_\varepsilon$}$$

其中 $\vec{A}_\varepsilon(\xi)$ 足够光滑，$\vec{A}_\varepsilon(0)=0$，并且 $a_\varepsilon^{\alpha\beta}(\xi)=(\partial/\partial x^\beta)A_\varepsilon^\alpha(\xi)$ 满足条件：

$$\begin{aligned}
&a_\varepsilon^{\alpha\beta}(\xi)\eta^\alpha\eta^\beta\geqslant(\varepsilon+|\xi|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\eta|^2, && 当\ p\leqslant 2\ 或\ p>2\ 且\ |\xi|<M,\\
&a_\varepsilon^{\alpha\beta}(\xi)\eta^\alpha\eta^\beta\geqslant(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}|\eta|^2, && 当\ p>2\ 且\ |\xi|\geqslant M,\\
&|a_\varepsilon^{\alpha\beta}(\xi)|\leqslant k(\varepsilon+|\xi|^2)^{\frac{p-2}{2}}, && 当\ p\leqslant 2\ 或\ p>2\ 且\ |\xi|<M,\\
&|a_\varepsilon^{\alpha\beta}(\xi)|\leqslant k(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}, && 当\ p>2\ 且\ |\xi|\geqslant M.
\end{aligned} \tag{2$_\varepsilon$}$$

此外，设 $\varepsilon\to 0$ 时，$\vec{A}_\varepsilon(\xi)\to\vec{A}(\xi)$ 且当 $|\xi|\leqslant M$ 时为一致收敛，简写 $u_{,\alpha}=\partial u/\partial x^\alpha$，根据(2)$_\varepsilon$，有

$$\nabla u\cdot\vec{A}_\varepsilon(\nabla u)=\int_0^1 a_\varepsilon^{\alpha\beta}(\tau\nabla u)u_{,\alpha}u_{,\beta}d\tau\geqslant\int_{\frac12}^1 a_\varepsilon^{\alpha\beta}(\tau\nabla u)u_{,\alpha}u_{,\beta}d\tau$$

$$\geqslant\begin{cases}c(p)(\varepsilon+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u|^2, & 当\ p\leqslant 2\ 或\ p>2\ 且\ |\nabla u|<M,\\ c(p)(\varepsilon+|M|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u|^2, & 当\ p>2\ 且\ |\nabla u|\geqslant M,\end{cases} \tag{3}$$

其中 $c(p)>0$ 是只依赖于 p 的常数．

$$|\vec{A}_\varepsilon(\nabla u)|\leqslant\int_0^1\Big(\sum_{\alpha,\beta}|a_\varepsilon^{\alpha\beta}(\tau\nabla u)|^2\Big)^{\frac12}|\nabla u|d\tau$$

$$\leqslant\begin{cases}nkc(p)(\varepsilon+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u|, & 当\ p\leqslant 2\ 或\ p>2\ 且\ |\nabla u|<M,\\ nkc(p)(\varepsilon+|M|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u|, & 当\ p>2\ 且\ |\nabla u|\geqslant M.\end{cases} \tag{4}$$

根据式(3)、(4)，有

$$\nabla u\cdot[\varepsilon\nabla u+\vec{A}_\varepsilon(\nabla u)]\geqslant\varepsilon|\nabla u|^2$$

$$|\varepsilon\nabla u+\vec{A}_\varepsilon(\nabla u)|\leqslant\varepsilon|\nabla u|+|\vec{A}_\varepsilon(\nabla u)|$$

$$\leqslant\begin{cases}[\varepsilon+nkc(p)\varepsilon^{\frac{p-2}{2}}]|\nabla u|, & 当\ p\leqslant 2,\\ [\varepsilon+nkc(p)(\varepsilon+|M|^2)^{\frac{p-2}{2}}]|\nabla u|, & 当\ p>2.\end{cases}$$

因此，根据文[3]，$u=u_\varepsilon\in L_\infty(0,T,L_2(G))\cap L_2(0,T,W_2^1(G))$ 作为式(1)$_\varepsilon$ 的广义解(u_ε 在 Q 的抛物边界上取值和 u 一致，$p<2$ 的情形和 u 的边界值的磨光函数一致)在 Q 内足够光滑，将式(1)$_\varepsilon$ 对 x^γ 求导，得

$$(u_{,\gamma})_t-(\partial/\partial x^\alpha)[(\varepsilon\delta^{\alpha\beta}+a_\varepsilon^{\alpha\beta}(\nabla u)u_{,\gamma\beta}]=0, \tag{5}$$

其中 $u_{,\gamma\beta}=\partial^2u/\partial x^\gamma\partial x^\beta$，且 u 是 u_ε 的简写，记 $Q(\rho)=B(\rho)\times(t_1-\rho^2,t_1)$，设 $\rho\leqslant 1$，$Q(8\rho)\subset Q$．要证

$|\nabla u_\varepsilon|$在 $Q(\rho)$上同等有界(界和 ε 无关).

1)先考虑 $\max\{1,\frac{2n}{n+1}\}<p\leqslant 2$ 的情形

设截断函数 $\zeta(x,t)$足够光滑 $0\leqslant\zeta\leqslant 1$,且满足

$$\begin{cases}\zeta(x,t)\equiv 1 \quad 当(x,t)\in Q(\rho_1), \quad \zeta(x,t)\equiv 0 \quad 当(x,t)\bar{\in} Q(\rho_0), \\ |\nabla\zeta(x,t)|\leqslant\frac{2}{\rho_0-\rho_1}, \quad 0\leqslant\zeta_t\leqslant\frac{2}{\rho_0^2-\rho_1^2}\leqslant\frac{2}{(\rho_0-\rho_1)^2}, \quad \rho_1<\rho_0.\end{cases} \tag{6}$$

取 $\rho\leqslant\rho_1<\rho_0\leqslant 2\rho,\sigma>0,v_\varepsilon=\varepsilon+|\nabla u|^2$,用 $\zeta^2v_\varepsilon^\sigma u_{x_\gamma}$乘式(5)并在 $Q(\rho_0)$积分,分部积分后再对 γ 由 1 到 n 求和,即得

$$0\geqslant\frac{1}{2(\sigma+1)}\int_G\zeta^2v_\varepsilon^{\sigma+1}(x,t)dx-\frac{1}{\sigma+1}\int_0^t\int_G\zeta\zeta_tv_\varepsilon^{\sigma+1}dxdt$$
$$+\int_0^t\int_G\{\zeta^2v_\varepsilon^\sigma[\varepsilon+v_\varepsilon^{\frac{p-2}{2}}]|\nabla^2u|^2+\frac{\sigma}{2}v^{\sigma-1}[\varepsilon+v_\varepsilon^{\frac{p-2}{2}}]|\nabla(|\nabla u|^2)|^2$$
$$-nk\zeta|\nabla\zeta|v_\varepsilon^\sigma[\varepsilon+v_\varepsilon^{\frac{p-2}{2}}]|\nabla(|\nabla u|^2)|\}dxdt,$$

应用 Young 不等式,由上式进一步得

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t\in(t_1-\rho_0^2,t_1)}\int_{B(\rho_0)}\zeta^2v_\varepsilon^{\sigma+1}dx+\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}\iint_{Q(\rho_0)}\zeta^2v^{\sigma-1+\frac{p-2}{2}}|\nabla v_\varepsilon|^2dxdt$$
$$\leqslant c\iint_{Q(\rho_0)}[|\zeta_t|v_\varepsilon^{\sigma+1}+|\nabla\zeta|^2(v_\varepsilon^{\sigma+1}+v_\varepsilon^{\sigma+\frac{p}{2}})]dxdt, \tag{7}$$

其中常数 $c>o$ 只依赖于 n,p,k. 不妨设 $\iint_{Q(\rho_0)}v_\varepsilon^{\sigma+1}dxdt\geqslant 1$, 由式(7)以及文[1]公式(2.10)得

$$\iint_{Q(\rho_1)}v_\varepsilon^{\frac{p-2}{2}+(\sigma+1)(1+\frac{2}{n})}dxdt$$
$$\leqslant(\operatorname*{vrai\,max}_{t\in(t_1-\rho_0^2,t_1)}\int_{B(\rho_1)}v_\varepsilon^{\sigma+1}dx)\iint_{Q(\rho_1)}[v_\varepsilon^{\frac{p+2\sigma}{2}}+|\nabla(v_\varepsilon^{\frac{p+2\sigma}{4}})|^2]dxdt$$
$$\leqslant[\frac{c}{(\rho_0-\rho_1)^2}\iint_{Q(\rho_0)}v_\varepsilon^{(\sigma+1)}dxdt]^{1+\frac{2}{n}}, \tag{8}$$

其中 $c>0$只依赖于 n,p,k. 设$\frac{1}{\sigma+1}=\frac{\lambda}{l}+\frac{2}{p}(1-\lambda)$, $\frac{p}{2}<\sigma+1<l$. 那么成立如下的内插不等式

$$(\iint_{Q(\rho_0)}v_\varepsilon^{\sigma+1}dxdt)^{\frac{1}{\sigma+1}}\leqslant(\iint_{Q(\rho_0)}v_\varepsilon^ldxdt)^{\frac{\lambda}{l}}(\iint_{Q(\rho_0)}v_\varepsilon^{\frac{p}{2}}dxdt)^{\frac{2(1-\lambda)}{p}}, \tag{9}$$

特别取 $l=\frac{p-2}{2}+(\sigma+1)(1+\frac{2}{n})$,联合式(8)、(9)并用 Young 不等式得

$$\iint_{Q(\rho_1)}v_\varepsilon^ldxdt\leqslant\frac{1}{2}\iint_{Q(\rho_0)}v_\varepsilon^ldxdt$$
$$+\{\frac{c}{(\rho_0-\rho_1)^2}(\iint_{Q(\rho_0)}v_\varepsilon^{\frac{p}{2}}dxdt)^{\frac{2(1-\lambda)(\sigma+1)}{p}}\}^{(1+\frac{2}{n})(1-\frac{\lambda}{l}(\sigma+1)(1+\frac{2}{n}))},$$

考虑到 $c>0$和 ρ_0,ρ_1无关,且 $\rho\leqslant\rho_1<\rho_0\leqslant 2\rho$ 的任意性,根据 *Giaquinta－Giusti* 的一个引理(文[4]第五章引理3.1),由上式继续得

$$\iint_{Q(\rho)}v_\varepsilon^ldxdt\leqslant\{\frac{c}{\rho^2}(\iint_{Q(2\rho)}v_\varepsilon^{\frac{p}{2}}dxdt)^{\frac{2(1-\lambda)(\sigma+1)}{p}}\}^{(1+\frac{2}{n})(1-\frac{\lambda}{l}(\sigma+1)(1+\frac{2}{n}))},$$

然后令 $\sigma\rightarrow\infty$,易得

$$\underset{Q(\rho)}{\text{vrai max}}(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)=\underset{Q(\rho)}{\text{vrai max}}\,v_\varepsilon=\lim_{\sigma\to\infty}\Big(\iint_{Q(\rho)}v_\varepsilon^\sigma dxdt\Big)^{\frac{1}{\sigma}}$$
$$\leqslant c\Big[\frac{1}{\rho^{n+2}}\iint_{Q(2\rho)}v_\varepsilon^{\frac{p}{2}}dxdt\Big)^{\frac{4}{n+2}/(p-\frac{2n}{n+2})},\tag{10}$$

所以为得到 $|\nabla u_\varepsilon|$ 在 $Q(\rho)$ 上的同等有界性，就需要估计 $\iint_{Q(2\rho)}v_\varepsilon^{\frac{p}{2}}dxdt$ 即 $\iint_{Q(2\rho)}(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p}{2}}dxdt$. 为此，我们注意到，首先可以证明作为式(1)的广义解 $u\in L_\infty(0,T,L_2(G))\cap L_p(0,T,W_p^1(G))$ 在 Q 内局部有界. 如有必要，用 Q 的紧子集代替 Q，可设 u 在 Q 为有界. 考虑到 u_ε 在 Q 的抛物边界上取值和 u 的边界值的磨光函数相同，再根据抛物型方程广义解的最大值原理，即见 u_ε 在 Q 同等有界. 设 $\zeta(x,t)$ 是截断函数，用 ζ^2u_ε 乘$(1)_\varepsilon$ 的两边，再作积分，经分部积分之后得

$$0=\int_0^t\int_G\{\zeta^2u_\varepsilon u_{\varepsilon t}+\nabla(\zeta^2u_\varepsilon)\cdot[\varepsilon\nabla u_\varepsilon+\vec{A}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)]\}dxdt$$
$$=\frac{1}{2}\int_G\zeta^2u_\varepsilon^2dx-\int_0^t\int_G\zeta\zeta_tu_\varepsilon^2dxdt+\int_0^t\int_G\zeta^2[\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2+\nabla u_\varepsilon\cdot\vec{A}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)]dxdt$$
$$+\int_0^t\int_G2\zeta u_\varepsilon\nabla\zeta\cdot[\varepsilon\nabla u_\varepsilon+\vec{A}_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)]dxdt,\tag{11}$$

利用式(3)、(4)由上式继续得

$$\int_G\zeta^2u_\varepsilon^2dx+\int_0^t\int_G\zeta^2[\varepsilon+(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}]|\nabla u_\varepsilon|^2dxdt$$
$$\leqslant c(p,n,k)\int_0^t\int_G\{\zeta|\zeta_t|u_\varepsilon^2+|u_\varepsilon||\nabla\zeta|\zeta[\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|+(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-1}{2}}]\}dxdt.\tag{12}$$

注意到当 $|\nabla u_\varepsilon|^2>\varepsilon$ 时成立

$$(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_\varepsilon|^2=(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p}{2}}\ \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2}\geqslant\frac{1}{2}(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p}{2}};$$

于是

$$\int_0^t\int_G(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p}{2}}\ dxdt=\int_0^t\int_{G\cap\{|\nabla u_\varepsilon|^2>\varepsilon\}}+\int_0^t\int_{G\cap\{|\nabla u_\varepsilon|^2\leqslant\varepsilon\}}$$
$$\leqslant2\int_0^t\int_G(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}\ \ |\nabla u_\varepsilon|^2dxdt+(2\varepsilon)^{\frac{p}{2}}\ \ |Q|,\tag{13}$$

$|Q|$ 是 Q 的 Lebesque 测度，联合式(12)、(13)继续得

$$\int_G\zeta^2u_\varepsilon^2dx+\int_0^t\int_G\zeta^2[\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2+(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p}{2}}\ ]dxdt$$
$$\leqslant c(p,n,k)\int_0^t\int_G(|\zeta_t|u_\varepsilon^2+|\nabla\zeta|^2u_\varepsilon^2+|\nabla\zeta|^p|u_\varepsilon|^p)dxdt+2^{\frac{p}{2}}\ \ |Q|,\tag{14}$$

由于 u_ε 在 Q 同等有界，式(14)隐含了 $\iint_{Q(2\rho)}(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p}{2}}\ dxdt$ 有和 ε 无关的上界.

2)转来考虑 $p>2$ 的情形. 根据式(3)、(4)和(11)，有

$$\int_G\zeta^2u_\varepsilon^2dx+\int_0^t\int_{G\cap\{|\nabla u_\varepsilon|<M\}}\zeta^2(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}\ \ |\nabla u_\varepsilon|^2dxdt$$
$$+\int_0^t\int_G\zeta^2\varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2dxdt+\int_0^t\int_{G\cap\{|\nabla u_\varepsilon|\geqslant M\}}\zeta^2(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}\ ]|\nabla u_\varepsilon|^2dxdt$$
$$\leqslant c(p,n,k)\{\int_0^t\int_G(\zeta|\zeta_t|u_\varepsilon^2+|\nabla\zeta|^2\varepsilon u_\varepsilon^2)dxdt$$

$$+\int_0^t\int_{G\cap\{|\nabla u_\varepsilon|<M\}} |u_\varepsilon||\nabla\zeta|\zeta(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}\,dxdt$$

$$+\int_0^t\int_{G\cap\{|\nabla u_\varepsilon|\geqslant M\}} |u_\varepsilon||\nabla\zeta|\zeta(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_\varepsilon|\,dxdt. \tag{15}$$

把式(13)中的 G 换为 $G\cap\{|\nabla u_\varepsilon|<M\}$ 再和式(15)联合，通过 Hölder 不等式、Young 不等式，易得

$$\int_0^t\int_{G\cap\{|\nabla u_\varepsilon|<M\}} \zeta^2(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p}{2}}\,dxdt+\int_0^t\int_{G\cap\{|\nabla u_\varepsilon|\geqslant M\}} \zeta^2(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_\varepsilon|^2dxdt$$

$$\leqslant(2\varepsilon)^{\frac{p}{2}}|Q|+c(p,n,k)\{\int_0^t\int_G[(|\zeta_t|+|\nabla\zeta|^2)u_\varepsilon^2+|\nabla\zeta|^p|u_\varepsilon|^p]dxdt$$

$$+\int_0^t\int_{G\cap\{|\nabla u_\varepsilon|\geqslant M\}}|\nabla\zeta|^2u_\varepsilon^2(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}\,dxdt\}, \tag{16}$$

因为 M 足够大，$M^2>\varepsilon$，对上式后一项有估计：

$$c(p,n,k)\int_0^t\int_{G\cap\{|\nabla u_\varepsilon|\geqslant M\}}|\nabla\zeta|^2u_\varepsilon^2(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}\,dxdt$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^t\int_{G\cap\{|\nabla u_\varepsilon|\geqslant M\}}M^pdxdt+c(p,n,k)\int_0^t\int_G|\nabla\zeta|^p|u_\varepsilon|^pdxdt$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^t\int_{G\cap\{|\nabla u_\varepsilon|\geqslant M\}}(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_\varepsilon|^2dxdt+c\int_0^t\int_G|\nabla\zeta|^p|u_\varepsilon|^pdxdt. \tag{17}$$

再一次设 ζ 满足(6)，并取 ρ_0,ρ_1 满足 $4\rho\leqslant\rho_1<\rho_0\leqslant8\rho$. 那么联合式(6)、(7)得

$$\iint_{Q(\rho_1)\cap\{|\nabla u_\varepsilon|<M\}}(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p}{2}}\,dxdt+\iint_{Q(\rho_1)\cap\{|\nabla u_\varepsilon|\geqslant M\}}(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_\varepsilon|^2dxdt$$

$$\leqslant2^{\frac{p}{2}}|Q|+\frac{c}{(\rho_0-\rho_1)^2}\iint_{Q(\rho_0)}u_\varepsilon^2dxdt+\frac{c}{(\rho_0-\rho_1)^p}\iint_{Q(\rho_0)}|u_\varepsilon|^pdxdt$$

$$+\frac{1}{2}\iint_{Q(\rho_0)\cap\{|\nabla u_\varepsilon|\geqslant M\}}(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_\varepsilon|^2dxdt. \tag{18}$$

根据式(18)，应用 Giaquinta—Giusti 引理，先给出

$$\iint_{Q(4\rho)\cap\{|\nabla u_\varepsilon|\geqslant M\}}(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_\varepsilon|^2dxdt\leqslant c\{|Q|+\frac{1}{\rho^2}\iint_{Q(8\rho)}u_\varepsilon^2dxdt+\frac{1}{\rho^p}\iint_{Q(8\rho)}|u_\varepsilon|^pdxdt\}, \tag{19}$$

然后通过改变 ρ_0,ρ_1 的值，由式(18)继续得

$$\iint_{Q(2\rho)\cap\{|\nabla u_\varepsilon|<M\}}(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p}{2}}\,dxdt+\iint_{Q(2\rho)\cap\{|\nabla u_\varepsilon|\geqslant M\}}(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla u_\varepsilon|^2dxdt$$

$$\leqslant c\{|Q|+\frac{1}{\rho^2}\iint_{Q(8\rho)}u_\varepsilon^2dxdt+\frac{1}{\rho^p}\iint_{Q(8\rho)}|u_\varepsilon|^pdxdt\}, \tag{20}$$

$c>0$ 只依赖于 $n,p,k,Q(8\rho)\subset Q$，因而式(20)右端有和 ε、M 无关的上界(u_ε 在 Q 的同等有界性的证明和 $p\leqslant2$ 的情形一样)．

下面仍设 ζ 满足(6)，且 $\rho\leqslant\rho_1<\rho_0\leqslant2\rho$. 用

$$\varnothing=\begin{cases}\zeta^2(\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2)^\sigma u_{,\gamma} & \text{当 } |\nabla u_\varepsilon|<M,\\ \zeta^2(\varepsilon+M^2)^\sigma u_{,\gamma}, & \text{当 } |\nabla u_\varepsilon|\geqslant M,\end{cases}(\sigma\geqslant0)$$

乘式(5)的两边，再在 $Q(\rho_0)$ 上积分，分部积分后再对 γ 由 1 到 n 求和，利用式(3)、(4)计算得

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t\in(t_1-\rho_0^2,t_1)}\int_{B(\rho_0)}\zeta^2[\frac{p}{2(\sigma+1)}v_\varepsilon^{\sigma+1}+\frac{(1-p)}{2}(\varepsilon+M^2)^\sigma v_\varepsilon]dx$$

$$+\iint_{Q(\rho_0)}\zeta^2\{v_\varepsilon^\sigma(\varepsilon+v_\varepsilon^{\frac{p-2}{2}})\psi+(\varepsilon+M^2)^\sigma[\varepsilon+(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}](1-\psi)\}|\nabla^2u_\varepsilon|^2dxdt$$

$$+\iint_{Q(\rho_0)}\frac{\sigma}{2}\zeta^2v_\varepsilon^{\sigma-1}[\varepsilon+v_\varepsilon^{\frac{p-2}{2}}]|\nabla v_\varepsilon|^2\psi dxdt$$

$$\leqslant\iint_{Q(\rho_0)}\zeta|\zeta_t|[\frac{\psi}{\sigma+1}v_\varepsilon^{\sigma+1}+(1-\psi)(\varepsilon+M^2)^\sigma v_\varepsilon]dxdt$$

$$+nk\iint_{Q(\rho_0)}\zeta|\nabla\zeta|[(v_\varepsilon^\sigma(\varepsilon+v_\varepsilon^{\frac{p-2}{2}})\psi+(\varepsilon+M^2)^\sigma[\varepsilon+(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}})(1-\psi)]|\nabla v_\varepsilon|dxdt,\quad(21)$$

其中记 $v_\varepsilon=\varepsilon+|\nabla u_\varepsilon|^2$，$\psi$ 为集合 $\{|\nabla u_\varepsilon|<M\}$ 的特征函数. 注意 $|\nabla v_\varepsilon|^2\leqslant 4v_\varepsilon|\nabla^2u_\varepsilon|^2$，用 Young 不等式得

$$\underset{t\in(t_1-\rho_0^2,t_1)}{\text{vrai max}}\int_{B(\rho_0)}\zeta^2[\psi v_\varepsilon^{\sigma+1}+(1-\psi)(\varepsilon+M^2)^\sigma v_\varepsilon]dx$$

$$+\iint_{Q(\rho_0)}\zeta^2\{\psi v_\varepsilon^{\sigma-1}[\varepsilon+v_\varepsilon^{\frac{p-2}{2}}]+(1-\psi)(\varepsilon+M^2)^{\sigma-1}[\varepsilon+(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}]\}|\nabla v_\varepsilon|^2dxdt$$

$$\leqslant c(\sigma+1)\iint_{Q(\rho_0)}|\nabla\zeta|^2\{v_\varepsilon^{\sigma+1}[\varepsilon+v_\varepsilon^{\frac{p-2}{2}}]\psi+(1-\psi)v_\varepsilon(\varepsilon+M^2)^\sigma[\varepsilon+(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}}]\}dxdt,$$

常数 $c>0$，只依赖于 n,p,k. 记 $\frac{\lambda n}{2}(\frac{\sigma}{2}+\frac{p}{4})=\sigma+1$，$U_\varepsilon=v_\varepsilon^{\frac{\sigma}{2}+\frac{p-2}{4}+\frac{1}{2}}\psi+(\varepsilon+M^2)^{\frac{\sigma}{2}+\frac{p-2}{4}}v_\varepsilon^{\frac{1}{2}}(1-\psi)$，由于假设 $n>2$，根据 соболев 嵌入定理，成立

$$(\int_{B(\rho_0)}|\zeta U_\varepsilon|^{\frac{2n}{n-2}}dx)^{1-\frac{2}{n}}\leqslant c(n)\int_{B(\rho_0)}|\nabla(\zeta U_\varepsilon)|^2dx,\quad(22)$$

从而，利用 Hölder 不等式，易得

$$\iint_{Q(\rho_0)}|\zeta U_\varepsilon|^{2+\lambda}dxdt$$

$$\leqslant\int_{t_1-\rho_0^2}^{t_1}(\int_{B(\rho_0)}|\zeta U_\varepsilon|^{\frac{2n}{n-2}}dx)^{1-\frac{2}{n}}(\int_{B(\rho_0)}|\zeta U_\varepsilon|^{\frac{\lambda n}{2}}dx)^{\frac{2}{n}}dt$$

$$\leqslant c(n)\iint_{Q(\rho_0)}(|\nabla\zeta|^2U_\varepsilon^2+\zeta^2|\nabla U_\varepsilon|^2dxdt(\underset{t\in(t_1-\rho_0^2,t_1)}{\text{vrai max}}\int_{B(\rho_0)}|\zeta U_\varepsilon|^{\frac{\lambda n}{2}}dx)^{\frac{2}{n}},\quad(23)$$

根据 λ、U_ε 的定义，成立

$$U_\varepsilon^{\frac{\lambda n}{2}}\leqslant v_\varepsilon^{\sigma+1}\psi+(\varepsilon+M^2)^\sigma v_\varepsilon(1-\psi),\quad(24)$$

$$(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}+\frac{2}{n}+\sigma(1+\frac{2}{n})}v_\varepsilon(1-\psi)\leqslant U_\varepsilon^{2+\lambda}(1-\psi),\quad(25)$$

不妨设 $\iint_{Q(\rho_0)}U_\varepsilon^2dxdt\geqslant 1$，联合式(22)—(25)，即见

$$\iint_{Q(\rho_1)}[v_\varepsilon^{\frac{p}{2}+\frac{2}{n}+\sigma(1+\frac{2}{n})}\psi+(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-2}{2}+\frac{2}{n}+\sigma(1+\frac{2}{n})}v_\varepsilon(1-\psi)]dxdt$$

$$\leqslant\iint_{Q(\rho_1)}U_\varepsilon^{2+\lambda}dxdt\leqslant[\frac{c(\sigma+1)(\sigma+p)}{(\rho_0-\rho_1)^2}\iint_{Q(\rho_0)}U_\varepsilon^2dxdt]^{1+\frac{2}{n}}$$

$$\leqslant\{\frac{c(n,p,k)(\sigma+1)^2}{(\rho_0-\rho_1)^2}\iint_{Q(\rho_0)}[v_\varepsilon^{\sigma+\frac{p}{2}}\psi+(\varepsilon+M^2)^{\sigma+\frac{p-2}{2}}v_\varepsilon(1-\psi)]dxdt\}^{1+\frac{2}{n}}.\quad(26)$$

对 $\nu=0,1,2,\cdots$ 置 $\rho_\nu=\rho+\frac{\rho}{2^\nu}$，$\sigma_\nu=-1+(1+\frac{2}{n})^\nu$，

$$\psi_\nu=(\iint_{Q(\rho_\nu)}[v_\varepsilon^{\frac{p-2}{2}+(1+\frac{2}{n})^\nu}\psi+(\varepsilon+M^2)^{\frac{p-4}{2}+(1+\frac{2}{n})^\nu}v_\varepsilon(1-\psi)]dxdt\}^{(1+\frac{2}{n})^{-\nu}},$$

由于出现在式(26)中的常数 $c>0$ 和 σ、ρ_0、ρ_1 无关，分别用 σ_ν 取代 σ，用 ρ_ν、$\rho_{\nu+1}$ 取代 ρ_0、ρ_1，由式

(26)得

$$\psi_{\nu+1} \leqslant (c\rho^{-2})^{\frac{1}{(1+\frac{2}{n})^\nu}} 2^{\frac{2(\nu+1)}{(1+\frac{2}{n})^\nu}} (1+\frac{2}{n})^{\frac{2\nu}{(1+\frac{2}{n})^\nu}} \psi_\nu, \qquad \nu = 0,1,2,\cdots$$

经过迭代，由上式即得

$$\Psi = \lim_{\nu\to\infty} \psi_\nu \leqslant \frac{c}{\rho^{n+2}} \iint_{Q(2\rho)} [v_\varepsilon^{\frac{p}{2}} \psi + (\varepsilon + M^2)^{\frac{p-2}{2}} v_\varepsilon (1-\psi)] dxdt. \tag{27}$$

由前所证(见式(20))，Ψ 有和 ε, M 无关的上界. 一开始 M 取足够大，可认为 $M^2 > \Psi$. 那么式(27)隐含了 $\operatorname*{vrai\,max}_{Q(\rho)} v_\varepsilon \leqslant \Psi$，从而 $|\nabla u_\varepsilon|$ 在 $Q(\rho)$ 有和 ε, M 无关的上界. 至此 $|\nabla u_\varepsilon|$ 在 $Q(\rho)$ 的同等有界性得证.

通过 $\varepsilon\to 0$ 取极限，即可得到 ∇u 在 $Q(\rho)$ 的有界性，从而 ∇u 在 Q 内局部有界. 此外，$\varepsilon\to 0$ 时 ∇u_ε 在 Q 内几乎处处收敛于 ∇u，并且

$$\iint_{Q(\rho)} |\nabla u|^{p-2} |\nabla^2 u|^2 dxdt \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{Q(\rho)} (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla^2 u_\varepsilon|^2 dxdt < +\infty.$$

记 $Q_\mu(\rho) = B(\rho) \times \{t_1 - \mu^{2-p}\rho^2 < t < t_1\}$，设

$$2 \operatorname*{vrai\,max}_{Q_\mu(2R)} |\nabla u| \geqslant 2\mu \geqslant \operatorname*{vrai\,max}_{Q_\mu(2R)} |\nabla u| > 0, Q_\mu(2R) \subset Q. \tag{28}$$

设对某个 $\gamma \in \{1,2,\cdots,n\}$，$\omega = +u_{,\gamma}$ 或 $\omega = -u_{,\gamma}$ 满足

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q_\mu(2R)} \omega \geqslant \max_{\alpha} \operatorname*{vrai\,max}_{Q_\mu(2R)} |u_{,\alpha}|,$$

设 $\theta \in (0,1)$ 待定，先考虑

$$Q_\mu(2R) \cap \{|\nabla u| \leqslant \mu\} \leqslant \theta |Q_\mu(R)| \tag{29}$$

的情形，设 $\zeta = \zeta_\mu(x,t)$ 足够光滑，满足 $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$，

$$\zeta(x,t) = 1, \quad 当 (x,t) \in Q_\mu(\rho_1), \quad \zeta(x,t) = 0, \quad 当 (x,t) \overline{\in} Q_\mu(\rho_0),$$

$$|\nabla \zeta| \leqslant \frac{2}{(\rho_0 - \rho_1)^2}, \quad 0 \leqslant \zeta_t \leqslant \frac{2\mu^{2-p}}{(\rho_0 - \rho_1)^2}, \quad \frac{R}{2} \leqslant \rho_1 < \rho_0 \leqslant R, \tag{30}$$

简写 $\omega_\varepsilon = u_{\varepsilon,\gamma}$，$u^+ = \max(u, 0)$，用 $\varnothing = \zeta^2 (k - \omega_\varepsilon)^+$ 乘式(5)然后积分，分部积分后，利用式(3)、(4)即得

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t \in (t_1 - \mu^{2-p}\rho_0^2, t_1)} \int_{B(\rho_0)} \zeta^2 (k - \omega_\varepsilon)^{+2} dx + \iint_{Q_\mu(\rho_0) \cap \{\omega_\varepsilon < k\}} \zeta^2 [\varepsilon + (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}] |\nabla \omega_\varepsilon|^2 dxdt$$

$$\leqslant c(n,p,k) \iint_{Q_\mu(\rho_0)} \{|\zeta_t| + |\nabla \zeta|^2 [\varepsilon + (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}]\} (k - \omega_\varepsilon)^{+2} dxdt,$$

命 $\varepsilon\to 0$ 由上式继续得

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t \in (t_1 - \mu^{2-p}\rho_0^2, t_1)} \int_{B(\rho_0)} \zeta^2 (k - \omega)^{+2} dx + \iint_{Q_\mu(\rho_0) \cap \{\omega < k\}} \zeta^2 |\nabla u|^{p-2} |\nabla \omega|^2 dxdt$$

$$\leqslant c(n,p,k) \iint_{Q_\mu(\rho_0)} (|\zeta_t| + |\nabla \zeta|^2 + |\nabla u|^{p-2}) (k - \omega)^{+2} dxdt, \tag{31}$$

代换 $t_1 - t' = t_1 - u^{p-2} t$，那么式(31)可改写为

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t' \in (t_1 - \rho_0^2, t_1)} \int_{B(\rho_0)} \zeta^2 (k - \omega)^{+2} dx + \iint_{Q'(\rho_0) \cap \{\omega < k\}} \zeta^2 \mu^{2-p} |\nabla u|^{p-2} |\nabla \omega|^2 dxdt'$$

$$\leqslant c(n,p,k)\iint_{Q'(\rho_0)}(|\zeta_{t'}|+|\nabla\zeta|^2\mu^{2-p}|\nabla u|^{p-2})(k-\omega)^{+2}dxdt', \tag{32}$$

其中 $Q'(\rho)=B(\rho)\times\{t_1-\rho^2<t'<t_1\}$. 限制 $k\in[\frac{\mu}{2},\mu]$，那么由于式(28)，对 $p\geqslant2$成立

$$|\nabla u|^{p-2}\leqslant(2\mu)^{p-2}\ \text{在}\ Q'(\rho_0),\ |\nabla u|^{p-2}\geqslant\omega^{p-2}\geqslant c(n,p)\mu^{p-2}.$$

在 $Q'(\rho_0)\cap\{\frac{\mu}{4n}<\omega<\mu\}$. 由式(32)进一步得

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t'\in(t_1-\rho_0^2,t_1)}\int_{B(\rho_0)}\zeta^2(k-\omega)^{+2}dx+\iint_{Q'(\rho_0)\cap\{\frac{\mu}{4n}<\omega<\mu\}}\zeta^2|\nabla\omega|^2dxdt'$$

$$\leqslant c(n,p,k)\iint_{Q'(\rho_0)}[|\zeta_{t'}|+|\nabla\zeta|^2(k-\omega)^{+2}]dxdt', \tag{33}$$

代换 $\tilde\omega=(k-\omega)^+$，当 $\omega>\frac{\mu}{4n}$，$\tilde\omega=k-\frac{\mu}{4n}$，当 $\omega\leqslant\frac{\mu}{4n}$，由于 $k\in[\frac{\mu}{2},\mu]$，$\tilde\omega\leqslant c(n,p)(k-\omega)^+$，同时$(k-\omega)^+\leqslant c(n,p)\tilde\omega$. 于是式(33)隐含了

$$[\iint_{Q'(\rho_0)}|\zeta\tilde\omega|^{2(1+\frac{2}{n})}dxdt]^{\frac{n}{n+2}}$$

$$\leqslant c(n)[\operatorname*{vrai\,max}_{t'\in(t_1-\rho_0^2,t_1)}\int_{B(\rho_0)}(\zeta\tilde\omega)^2dx+\iint_{Q'(\rho_0)}|\nabla(\zeta\tilde\omega)|^2dxdt']$$

$$\leqslant\frac{c(n,p,k)\mu^2}{(\rho_0-\rho_1)^2}|Q'(\rho_0)\cap\{\omega<k\}|,$$

$$(k-k_1)|Q'(\rho_1)\cap\{\omega<k_1\}|\leqslant\iint_{Q'(\rho_1)}(k-\omega)^+dxdt$$

$$\leqslant c(n,p)\iint_{Q'(\rho_0)}\zeta\tilde\omega dxdt'$$

$$\leqslant\frac{c(n,p,k)\mu}{\rho_0-\rho_1}|Q'(\rho_0)\cap\{\omega<k\}|^{1+\frac{1}{n+2}}, \tag{34}$$

$$\mu\geqslant k>k_1\geqslant\mu/4n,\ R/2\leqslant\rho_1<\rho_0\leqslant R,$$

对 $v=0,1,2,\cdots$ 置 $k_v=\mu/2+\mu/2^{v+1}$，$\rho_v=R/2+R/2^{v+1}$，分别用 k_v,k_{v+1}取代 k,k_1，用 ρ_v,ρ_{v+1}取代 ρ_0,ρ_1，由式(34)给出

$$|Q'(\rho_{v+1})\cap\{\omega<k_{v+1}\}|\leqslant\frac{C}{R}4^{v+1}|Q'(\rho_v)\cap\{\omega<k_v\}|^{1+\frac{1}{n+2}}, \tag{35}$$

根据式(29)，有 $|Q'(\rho_0)\cap\{\omega<k_0\}|=|Q'(R)\cap\{\omega<\mu\}|\leqslant\theta|Q'(R)|\leqslant\theta|B(1)|R^{n+2}$，其中 $|B(1)|$为 E^n 中单位球体积. 只要取 $\theta\in(0,1)$满足

$$16c(\theta|B(1)|)^{\frac{1}{n}}\leqslant\delta,\qquad 4\delta^{\frac{1}{n}}=1,$$

那么由归纳法可证，$|Q'(\rho_v)\cap\{\omega<k_v\}|\leqslant\delta^v\theta|B(1)|R^{n+2}$. 命 $v\to\infty$得 $|Q'(R/2)\cap\{\omega<\mu/2\}|=0$，即$\operatorname*{vrai\,min}_{Q'(\frac{R}{2})}|\nabla u|\geqslant\operatorname*{vrai\,min}_{Q'(\frac{R}{2})}\omega\geqslant\frac{\mu}{2}$. 这样一来在 $Q'(R/2)$上方程(1)写为

$$\mu^{p-2}u_{t'}-\mathrm{div}\vec{A}(\nabla u)=0,\qquad(x,t')\in Q'(R/2)$$

u 对空间变量的一阶导数 $u_{x_\gamma}(\gamma=1,2,\cdots,n)$是下面一致抛物型方程

$$\mu^{p-2}(u_{,\gamma})_t - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(a^{\alpha\beta}(\nabla u)u_{,\gamma\beta}) = 0 \tag{36}$$

的广义解，根据周知的 *Moser* 结果，成立

$$\operatorname*{osc}_{Q(\rho)} \nabla u \leqslant \eta \operatorname*{osc}_{Q(2\rho)} \nabla u, \qquad \forall\ \rho \leqslant \frac{R}{4}, \tag{37}$$

其中 $\eta \in (0,1)$，只依赖于 n,p,k.

$\max\{1, \frac{2n}{n+2}\} < p < 2$ 的情形，代换 $\tilde v_\varepsilon = (\varepsilon + \omega_\varepsilon^2)^{\frac{p-2}{2}}\omega_\varepsilon$，$(\omega_\varepsilon = u_{\varepsilon,\gamma})$，那么 $\nabla \tilde v_\varepsilon = g_\varepsilon(\omega_\varepsilon)\nabla\omega_\varepsilon$，$\tilde v_{\varepsilon t} = g_\varepsilon(\omega_\varepsilon)\omega_{\varepsilon t}$，其中

$$g_\varepsilon(\omega_\varepsilon) = (\varepsilon + \omega_\varepsilon^2)^{\frac{p-2}{2}} + (p-2)(\varepsilon + \omega_\varepsilon^2)^{\frac{p-4}{2}}\omega_\varepsilon^2,$$

$$(p-1)(\varepsilon + \omega_\varepsilon^2)^{\frac{p-2}{2}} \leqslant g_\varepsilon(\omega_\varepsilon) \leqslant (\varepsilon + \omega_\varepsilon^2)^{\frac{p-2}{2}},$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\omega_\varepsilon \to \omega$，$\tilde v_\varepsilon \to |\omega|^{p-2}\omega = \tilde v$，$g_\varepsilon(\omega_\varepsilon) \to g_0(\omega) = (p-1)|\omega|^{p-2}$（几乎处处）. 式(5)现在变换为

$$g_\varepsilon(\omega_\varepsilon)^{-1}\tilde v_{\varepsilon t} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}([\varepsilon\delta^{\alpha\beta} + a_\varepsilon^{\alpha\beta}(\nabla u_\varepsilon)]g_\varepsilon(\omega_\varepsilon)^{-1}\tilde v_{\varepsilon,\beta}) = 0, \tag{38}$$

用 $\zeta_\mu^2(k - \tilde v_\varepsilon)^+$ 乘式(38)再作积分，经过计算即得

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{vrai\,max}_{t \in (t_1 - \mu^{2-p}\rho_0^2, t_1)} \int_{B(\rho_0)} \zeta_\mu^2 \varnothing_{k,\varepsilon}[(k - \tilde v_\varepsilon)^+]dx \\
&+ \iint_{Q_\mu(\rho_0)\cap(\tilde v_\varepsilon < k)} \zeta_\mu^2[\varepsilon + (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}]g_\varepsilon(\omega_\varepsilon)^{-1}|\nabla \tilde v_\varepsilon|^2 dxdt \\
\leqslant{}& c(n,p,k)\{\iint_{Q_\mu(\rho_0)} |\zeta_{\mu t}|\varnothing_{k,\varepsilon}[(k - \tilde v_\varepsilon)^+]dxdt \\
&+ \iint_{Q_\mu(\rho_0)} |\nabla\zeta_\mu|^2(k - \tilde v_\varepsilon)^{+2}[\varepsilon + (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}}]g_\varepsilon(\omega_\varepsilon)^{-1}dxdt\},
\end{aligned} \tag{39}$$

其中 $\varnothing_{k,\varepsilon}[(k - \tilde v_\varepsilon)^+] = \int_0^{(k-\tilde v_\varepsilon)^+} \frac{sds}{g_\varepsilon(h_\varepsilon(k-s))}$. $\omega_\varepsilon = h_\varepsilon(\tilde v_\varepsilon)$ 是 $\tilde v_\varepsilon = (\varepsilon + \omega_\varepsilon^2)^{\frac{p-2}{2}}\omega_\varepsilon$ 的反函数. 当 $\varepsilon \to 0$ 时 $h_\varepsilon(\tilde v_\varepsilon) \to h_0(\tilde v) = \omega = |\tilde v|^{\frac{2-p}{p-1}}\tilde v$,

$$\begin{aligned}
\varnothing_{k,\varepsilon}[(k - \tilde v_\varepsilon)^+] \to \varnothing_{k,0}[(k - \tilde v)^+] &= \int_0^{(k-\tilde v)^+} \frac{sds}{g_0(h_0(k-s))} \\
&= \int_0^{(k-\tilde v)^+} \frac{sds}{(p-1)(k-s)^{(p-2)/(p-1)}},
\end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned}
\varnothing_{k,0}[(k - \tilde v)^+] &\geqslant \int_{\frac{1}{2}(k-\tilde v)^+}^{(k-\tilde v)^+} \frac{1}{p-1}(k-s)^{\frac{2-p}{p-1}} sds \\
&\geqslant \frac{(k - \tilde v)^{+2}}{2(p-1)}[k - \frac{1}{2}(k - \tilde v)^+]^{\frac{2-p}{p-1}} \\
&\geqslant \frac{(k - \tilde v)^{+2}}{2(p-1)}(\frac{k}{2})^{\frac{2-p}{p-1}},
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\varnothing_{k,0}[(k - \tilde v)^+] \leqslant \frac{(k - \tilde v)^{+2}}{2(p-1)}k^{\frac{2-p}{p-1}}.$$

命 $\varepsilon \to 0$，利用式(39)可得

$$\operatorname*{vrai\ max}_{t\in(t_1-\mu^{2-p}\rho_0^2,t_1)}\int_{B(\rho_0)}\zeta_\mu^2\varnothing_{k,0}[(k-\tilde v)^+]dx + \iint_{Q_\mu(\rho_0)\cap\{\tilde v<k\}}\zeta_\mu^2|\nabla u|^{\frac{p-2}{2}}g_0(\omega)^{-1}|\nabla\tilde v|^2dxdt$$

$$\leqslant c(n,p,k)\{\iint_{Q_\mu(\rho_0)}|\zeta_\mu|\varnothing_{k,0}[(k-\tilde v)^+]dxdt + \iint_{Q_\mu(\rho_0)\cap\{\tilde v<k\}}|\nabla\zeta_\mu|^2(k-\tilde v)^{+2}|\nabla u|^{p-2}]g_0(\omega)^{-1}dxdt\}. \tag{41}$$

限制 $k\in[\tilde\mu/2,\tilde\mu]$，$\tilde\mu\doteq\mu^{p-1}$，那么在集合 $Q_\mu(\rho_0)\cap\{\frac{\tilde\mu}{4n}<\tilde v<\tilde\mu\}$ 上，$(\frac{1}{4n})^{\frac{1}{p-1}}\mu\leqslant|\nabla u|\leqslant\mu,\omega\geqslant\frac{|\nabla u|}{\sqrt n}$，

$|\nabla u|^{p-2}g_0(\omega)^{-1}=\frac{|\omega|^{2-p}}{(p-1)|\nabla u|^{2-p}}\geqslant(p-1)^{-1}2^{p-2}(\sqrt n)^{p-2}(4n)^{\frac{p-2}{p-1}}$，同时在集合 $Q_\mu(\rho_0)\cap\{\tilde v<\tilde\mu\}$ 上，$|\nabla u|^{p-2}g_0(\omega)^{-1}\leqslant1$. 联合式(40)、(41)给出(注意 $k\in[\tilde\mu/2,\tilde\mu]$)

$$\operatorname*{vrai\ max}_{t\in(t_1-\mu^{2-p}\rho_0^2,t_1)}\int_{B(\rho_0)}\zeta_\mu^2\tilde\mu^{\frac{2-p}{p-1}}[(k-\tilde v)^{+2}]dx+\iint_{Q_\mu(\rho_0)\cap\{\frac{\tilde\mu}{4n}<\tilde v<k\}}\zeta_\mu^2|\nabla\tilde v|^2dxdt$$

$$\leqslant c(n,p,k)\iint_{Q_\mu(\rho_0)\cap\{\tilde v<k\}}[|\zeta_\mu|\tilde\mu^{\frac{2-p}{p-1}}+|\nabla\zeta_\mu|^2](k-\tilde v)^{+2}dxdt, \tag{42}$$

通过对 t 轴的伸缩变换，$t_1-\mu^{p-2}t=t_1-t'$ 并注意 $\tilde\mu=\mu^{(p-1)}$，由式(42)直接给出

$$\operatorname*{vrai\ max}_{t'\in(t_1-\rho_0^2,t_1)}\int_{B(\rho_0)}\zeta_\mu^2(k-\tilde v)^{+2}dx+\iint_{Q'(\rho_0)\cap\{\frac{\tilde\mu}{4n}<\tilde v<k\}}\zeta_\mu^2|\nabla\tilde v|^2dxdt$$

$$\leqslant\frac{c(n,p,k)\tilde\mu^2}{(\rho_0-\rho_1)^2}|Q'_\mu(\rho_0)\cap\{\tilde v<k\}|, \tag{43}$$

用式(43)取代式(33)，重复前面作过的证明可得

$$\operatorname*{vrai\ min}_{Q'(\frac{R}{2})}\tilde v\geqslant\frac{\tilde\mu}{2}，即\operatorname*{vrai\ min}_{Q'(\frac{R}{2})}|\nabla u|\geqslant\operatorname*{vrai\ min}_{Q'(\frac{R}{2})}\omega\geqslant2^{-\frac{1}{p-1}}\mu,$$

由此再一次得到式(37).

如果式(29)不成立，那么

$$|Q_\mu(R)\cap\{|\nabla u|<\mu\}|>\theta|Q_\mu(R)|, \tag{44}$$

在这种情形，存在常数 $\lambda,\eta_1\in(0,1)$ 只依赖于 n、p、k 和 θ，使(证明在后面完成)

$$\operatorname*{vrai\ max}_{Q_\mu(\lambda R)}|\nabla u|\leqslant\eta_1\operatorname*{vrai\ max}_{Q_\mu(2R)}|\nabla u|. \tag{45}$$

(二)有了以上准备，转来证明 ∇u 的 Hölder 连续性. 不妨设 $\operatorname*{vrai\ max}_{Q}|\nabla u|\leqslant2M<+\infty$，依次选出 $\mu_m,R_m(m=0,1,2,\cdots,m_0$，不排除 $m_0=0$ 和 $+\infty$ 的情况)如下

$$Q_{\mu_0}(2R_0)\subset Q,\qquad\operatorname*{vrai\ max}_{Q_{\mu_0}(2R_0)}|\nabla u|\leqslant2\mu_0\leqslant2M.$$

$$Q_{\mu_{m+1}}(2R_{m+1})\subset Q_{\mu_m}(\lambda R_m),\qquad\mu_{m+1}=\eta_1\mu_m. \tag{46}$$

$2R_{m+1}=\lambda R_m$，当 $p<2$，$2R_{m+1}=\eta_1^{\frac{p-2}{2}}\lambda R_m$，当 $p\geqslant2$，(其中 λ,η_1 是出现在(45)中的常数)，使当 $m<m_0$

时,式(44)对 $\mu=\mu_m, R=R_m$ 成立,而当 $m=m_0$时,式(29)对 $\mu=\mu_{m_0}, R=R_{m_0}$成立.根据式(45),当 $m<m_0$时由归纳法易得

$$\operatorname*{vrai\,max}_{Q_{\rho_{m+1}}(2R_{m+1})}|\nabla u|\leqslant\operatorname*{vrai\,max}_{Q_{\rho_m}(2R_m)}|\nabla u|\leqslant\eta_1\operatorname*{vrai\,max}_{Q_{\rho_m}(2R_m)}|\nabla u|$$
$$\leqslant\eta_1 2\mu_m\leqslant 2\mu_{m+1},\tag{47}$$

对任意 $R_{m_0}<\rho\leqslant R_0$,可以找到 m 使 $R_{m+1}<\rho\leqslant R_m$,利用式(47)作迭代可得

$$\operatorname*{osc}_{Q_{\rho_m}(\rho)}\nabla u\leqslant\operatorname*{osc}_{Q_{\rho_m}(R_m)}\nabla u\leqslant 2\operatorname*{vrai\,max}_{Q_{\rho_m}(2R_m)}|\nabla u|\leqslant 4\mu_m\leqslant\cdots$$
$$\leqslant 4\eta_1^m\mu_0=\frac{4\mu_0}{\eta_1}\eta_1^{m+1}\leqslant\frac{4\mu_0}{\eta_1}\left(\frac{R_{m+1}}{R_0}\right)^{\tilde a}\leqslant\frac{4\mu_0}{\eta_1}\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\tilde a},\tag{48}$$

其中当 $p<2$时,$\tilde a=\ln(\frac{1}{\eta_1})/\ln\frac{2}{\lambda}$,当 $p\geqslant 2$时,$\tilde a=\ln(\frac{1}{\eta_1})/\ln(\frac{2}{\lambda}\eta_1^{\frac{2-p}{2}})$当 $m_0<+\infty$,式(48)继续对 $\rho=R_{m_0}$成立.又当 $m=m_0<+\infty$时,对 $v=0,1,2,\cdots$置 $\rho_v=R_{m_0}/2^{v+2}$,根据式(37)

$$\operatorname*{osc}_{Q_{\rho_{m_0}}(\rho_{v+1})}\nabla u\leqslant\eta\operatorname*{osc}_{Q_{\rho_{m_0}}(\rho_v)}\nabla u,\qquad v=0,1,2,\cdots\tag{49}$$

对任意 $\rho\leqslant R_{m_0}/4$,可找 v 使 $\rho_{v+1}<\rho\leqslant\rho_v$,利用式(49)进行迭代,又得

$$\operatorname*{osc}_{Q_{\rho_{m_0}}(\rho)}\nabla u\leqslant\operatorname*{osc}_{Q_{\rho_{m_0}}(\rho_v)}\nabla u\leqslant\eta^v\operatorname*{osc}_{Q_{\rho_{m_0}}(\rho_0)}\nabla u$$
$$\leqslant c\left(\frac{\rho_{v+1}}{R_{m_0}}\right)^{\tilde\beta}\operatorname*{osc}_{Q_{\rho_{m_0}}(R_{m_0})}\nabla u\leqslant c\left(\frac{\rho}{R_{m_0}}\right)^{\tilde\beta}\operatorname*{osc}_{Q_{\rho_{m_0}}(R_{m_0})}\nabla u,\tag{50}$$

其中 $c=\eta^{-3}$,$\tilde\beta=\ln\frac{1}{\eta}/\ln 2$.

只要常数 c 取足够大,式(50)无例外地对 $R_{m_0}/4<\rho<R_{m_0}$成立.联合式(48)、(50)即见 ∇u 关于空间量 x 局部 Hölder 连续,Hölder 指数为 $\tilde a\wedge\tilde\beta=\min(\tilde a,\tilde\beta)$.为证 ∇u 关于 t 的局部 Hölder 连续性,考虑 (x_0,t_0)和 (x_0,t_1).记 $\rho^2=|t_1-t_0|$.不妨设 $t_1>t_0$,如果 $m_0>0$并且 $\rho>R_{m_0}$,那么可以找到 $m<m_0$使 $R_{m+1}<\rho\leqslant R_m$.于是限制 $|x_0|<R_m$ 时,都有 (x_0,t_0)和 $(x_0,t_1)\in Q_{\rho_m}(R_m)$,根据式(48)

$$|\nabla u(x_0,t_1)-\nabla u(x_0,t_0)|\leqslant 2\operatorname*{vrai\,max}_{Q_\rho(R_m)}|\nabla u|\leqslant\frac{4\mu_0}{\eta_1}\left(\frac{R_{m+1}}{R_0}\right)^{\tilde a}$$
$$\leqslant\frac{4\mu_0}{\eta_1}\left(\frac{\rho^2}{R_0^2}\right)^{\frac{\tilde a}{2}}\leqslant\frac{4\mu_0}{\eta_1}\left(\frac{|t_1-t_0|}{R_0^2}\right)^{\frac{\tilde a}{2}},\tag{51}$$

如果 $m_0<+\infty$,并且 $\rho\leqslant R_{m_0}$,那么可找到 v,使 $\rho_{v+1}<\rho\leqslant\rho_v$.当限制 $|x_0|<\rho$ 时,都有 (x_0,t_0)和 $(x_0,t_1)\in Q_{\rho_{m_0}}(\rho_v)$,根据式(50)和(48)有

$$|\nabla u(x_0,t_1)-\nabla u(x_0,t_0)|\leqslant\operatorname*{osc}_{Q_{\rho_{m_0}}(\rho_v)}\nabla u\leqslant c\left(\frac{\rho}{R_{m_0}}\right)^{\tilde\beta}\operatorname*{osc}_{Q_{\rho_{m_0}}(R_{m_0})}\nabla u$$
$$\leqslant c\left(\frac{|t_1-t_0|}{R_{m_0}^2}\right)^{\frac{\tilde\beta}{2}}\operatorname*{osc}_{Q_{\rho_{m_0}}(R_{m_0})}\nabla u\leqslant c\left(\frac{|t_1-t_0|}{R_0^2}\right)^{\frac{\tilde\beta}{2}\wedge\frac{\tilde a}{2}}\mu_0,\tag{52}$$

这样,∇u 关于 t 为局部 Hölder 连续.然后,∇u 在 Q 内 Hölder 连续.

最后证式(45).用 $u_{\varepsilon,\gamma}$乘式(5)再对 v 求和,即得

$$0=\frac{1}{2}(|\nabla u_\varepsilon|^2)_t-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}([\varepsilon+a_\varepsilon^{\alpha\beta}(\nabla u_\varepsilon)]\frac{1}{2}(|\nabla u_\varepsilon|^2)_{,\beta})$$
$$+[\varepsilon+a_\varepsilon^{\alpha\beta}(\nabla u_\varepsilon)]u_{\varepsilon\gamma\alpha}u_{\varepsilon\gamma\beta}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\{v_{\epsilon t}-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}([\epsilon\delta^{\alpha\beta}+a_{\epsilon}^{\alpha\beta}(\nabla u_{\epsilon})]v_{\epsilon,\beta})\},v_{\epsilon}=\epsilon+|\nabla u_{\epsilon}|^{2}, \tag{53}$$

用$\varnothing$乘上式两端，经分部积分之后，令$\epsilon\to 0$，即得

$$\int_{t_0}^{t}\int_{G'}\{-\varnothing_t v+\varnothing_{,\alpha}a^{\alpha\beta}(\nabla u)v_{,\beta}\}dxdt+\int_{G'}\varnothing v|_{t=t_0}^{t}\ dx\leqslant 0, \tag{54}$$

$\forall\ (t_0,t)\subset(o,T),\quad G'\subset\subset G,\varnothing\geqslant 0,\quad \varnothing\in W_2^1((o,T),L_2(G'))\cap L^2(o,T,\dot{W}_2^1(G'))$，其中$v=|\nabla u|^2$. 下面限于在$Q_\mu(2R)$上考虑问题，经过对$t$轴的伸缩变换$t_1-t=t_1-\mu^{2-p}t'$之后，式(44)和(54)分别写为

$$|Q'(R)\cap\{v<\mu^2\}|>\theta|Q'(R)|,\qquad Q'(\rho)=B(\rho)\times(t_1-\rho^2,t_1), \tag{55}$$

$$\int_{t_0'}^{t'}\int_{B(2R)}\{-\varnothing_{t'}v+\varnothing_{,\alpha}a^{\alpha\beta}(\nabla u)\mu^{2-p}v_{,\beta}\}dxdt'+\int_{B(2R)}\varnothing v|_{t'=t_0'}^{t'}\ dx\leqslant 0, \tag{56}$$

$\forall\ (t_0',t')\subset(t_1-4R^2,t_1),\quad \varnothing\geqslant 0,\quad \varnothing\in W_2^1(0,T,L_2(B(2R))\cap L_2(0,T,\dot{W}_2^1(B(2R))$.
设$\zeta=\zeta(|x|)$是$|x|$的逐段为线性的连续函数，

$$\zeta(x)=1,\text{当 }|x|\leqslant\rho_1,\qquad \zeta(x)=0,\text{当 }|x|\geqslant\rho_0,|\nabla\zeta|\leqslant\frac{1}{\rho_0-\rho_1}, \tag{57}$$

其中$\rho_1<\rho_0$. 下面的推导都是在v_t存在的前提下进行的(v_t不存在的情形用v_ϵ代v，并由式(53)出发进行推导，得到相应的结果之后再令$\epsilon\to 0$). 考虑$\rho_1=\sigma R<R=\rho_0$的情形，取$\varnothing=\zeta^2(x)(v-\mu^2)^+$作试验函数，代入式(56)分部积分并考虑在积分的有效区域上，成立$v>\mu^2$，因而$\mu<|\nabla u|<2\mu$，利用条件(2)和 Young 不等式，可得

$$\int_{B(\rho_0)}\zeta^2(x)(v-\mu^2)^+\ |_{t_0'}^{t'}dx\leqslant\frac{c}{(\rho_0-\rho_1)^2}\int_{t_0'}^{t'}\int_{B(\rho_0)}(v-\mu^2)^{+2}dxdt', \tag{58}$$

常数c只依赖于n,p,k. 根据式(55)有

$$\int_{t_1-R^2}^{t_1-\frac{\theta}{2}R^2}dt'\int_{B(R)\cap\{v<\mu^2\}}dx\geqslant\frac{\theta}{2}|Q'(R)|,$$

从而利用中值定理，即见存在$t_0\in[t_1-R^2,t_1-\frac{\theta}{2}R^2]$，使

$$(1-\frac{\theta}{2})R^2\text{mes }B(R)\cap\{v(x,t_0)<\mu^2\}\geqslant\frac{\theta}{2}|Q'(R)|, \tag{59}$$

其中 mes 表示E^n中的 Lebesque 测度. 设$\xi\in(0,3)$，$t'=t_0+\omega R^2$($\omega>0$充分小)根据式(58)成立

$$\xi\mu^2\text{mes }B(\sigma R)\cap\{v(x,t')>(1+\xi)\mu^2$$
$$\leqslant\int_{B(R)}\zeta^2(v(x,t')-\mu^2)^{+2}dx$$
$$\leqslant 3\mu^2\text{mes}B(R)\cap\{v(x,t_0)>\mu^2\}+\frac{c\mu^2}{(1-\sigma)^2}R^n,$$

由于式(59)，继续有

$$\text{mes }B(R)\cap\{v(x,t')>(1+\xi)\mu^2\}$$
$$\leqslant\text{mes}\{B(R)\backslash B(\sigma R)\}+\frac{3}{\xi}(1-\frac{\theta}{2-\theta})\text{mes }B(R)+\frac{c\omega}{(1-\sigma)^2\xi}R^n,$$

只要取$\sigma\in(0,1)$足够接近1，ξ足够接近3，然后再取$\omega_0\in(0,\theta/4)$足够小，那么当$\omega\leqslant\omega_0$时，由上式得

$$\text{mes }B(R)\cap\{v(x,t')>(1+\xi)\mu^2\}\leqslant(1-\omega')\text{mes }B(R),$$

即

$$\text{mes}\, B(R) \cap \{v(x,t') \leqslant (1+\xi)\mu^2\} > \omega' \text{mes}\, B(R), \quad \forall\, t' = t'_0 + \omega R^2, \tag{60}$$

其中 $\omega' > 0$. 显然 ξ, σ, ω_0 和 ω' 都只依赖于 n, p, k 和 θ.

设 $\varphi(t')$ 是 t' 的逐段为线性的连续函数，满足

$$\varphi(t') = 0 \text{ 当 } t' \leqslant \tau_0, \quad \varphi(t') = 1 \text{ 当 } t' \geqslant \tau_1 > \tau_0, \tag{61}$$

设 $\zeta(x)$ 和 $\varphi(t')$ 分别由式(57)、(61)给出，并且取 $\rho_0 = 2R$, $\rho_1 = R$, $\tau_0 = t'_0$, $\tau_1 = t'_0 + \omega_0 R^2$，用 $\varnothing = \zeta^2(x)\varphi^2(t')[(3-\xi)\mu^2 + \varepsilon - (v-(1+\xi)\mu^2)^+]^{-1}$ 作试验函数代入式(56)，经过必要的计算，即得

$$\underset{t' \in (t_1 - t'_0, t_1)}{\text{vrai max}} \int_{B(2R)} \zeta^2 \varphi^2 w(x,t')\, dx + \int_{t_1 - t'_0}^{t_1} \int_{B(2R)} \zeta^2 \varphi^2 |\nabla w|^2 dx dt'$$

$$\leqslant c(n,p,k)\Big(\frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \varphi(t')\, dt' \int_{B(2R)} \zeta^2 w dx + R^n\Big), \tag{62}$$

其中 $w = \ln \dfrac{(3-\xi)\mu^2 + \varepsilon}{(3-\xi)\mu^2 + \varepsilon - (v - (1+\xi)\mu^2)^+}$,　$\varepsilon > 0$, 由于式(60)，对一切 $t' \in (\tau_0, \tau_1)$，成立

$$\text{mes}\, B(R) \cap \{w(x,t') = 0\} = \text{mes}\, B(R) \cap \{v(x,t') \leqslant (1+\xi)\mu^2$$

$$\geqslant \omega' \text{mes}\, B(R) = \frac{\omega'}{2^n} \text{mes}\, B(2R). \tag{63}$$

在 $B(2R)$ 对 w 应用引理(见文[3]，第二章引理5.1)给出

$$\int_{B(R)} \zeta^2 w(x,t')\, dx \leqslant c(n,\omega') R \int_{B(R)} \zeta^2 |\nabla w(x,t')|\, dx, \tag{64}$$

联合式(62)、(64)继续得

$$\underset{t' \in (t'_0 + \omega_0 R^2, t_1)}{\text{vrai max}} \int_{B(R)} w(x,t')\, dx + \int_{t'_0 + \omega_0 R^2}^{t_1} \int_{B(R)} |\nabla w|^2 dx dt' \leqslant CR^n, \tag{65}$$

常数 $C > 0$ 只依赖于 $n, p, k, \theta, \omega_0, \omega'$. 记 $w_R(t') = [\text{mes}\, B(R)]^{(-1)} \int_{B(R)} w(x,t')\, dx$，根据式(65)、考虑到 w 的非负性并应用 Poincare 不等式

$$\int_{t'_0 + \omega_0 R^2}^{t_1} \int_{B(R)} |w|^2 dx dt'$$

$$\leqslant \int_{t'_0 + \omega_0 R^2}^{t_1} \int_{B(R)} 2[|w - w_R(t')|^2 + w_R(t')^2] dx dt'$$

$$\leqslant c(n) \int_{t'_0 + \omega_0 R^2}^{t_1} \int_{B(R)} [R^2 |\nabla w|^2 + w_R(t')^2] dx dt \leqslant CR^{n+2}, \tag{66}$$

其中的常数 $C > 0$ 只依赖于 $n, p, k, \theta, \omega_0, \omega'$. 设 $\zeta(x), \varphi(t)$ 分别仍由式(57)、(61)定义，只是在现在，取 $R/2 \leqslant \rho_1 < \rho_0 \leqslant R$, $t_1 - 2\lambda R^2 \leqslant \tau_0 < \tau_1 \leqslant t_1$ $(2\lambda = \frac{\theta}{2} - \omega_0 \geqslant \frac{\theta}{4})$. 设 $k \geqslant 0$，用

$$\varnothing = \zeta^2(x)\varphi^2(t)(w-k)^+ [(3-\xi)\mu^2 + \varepsilon - (v - (1+\xi)\mu^2)^+]^{-1}$$

作试验函数，代入式(56)经分部积分(注意在积分的有效区域上，$\omega > k \geqslant 0$ 隐含了 $v \geqslant (1+\xi)\mu^2$)，即得

$$\underset{t' \in (\tau_0, t_1)}{\text{vrai max}} \int_{B(\rho_0)} \zeta^2 \varphi^2 (w-k)^{+2} dx + \int_{\tau_0}^{t_1} \int_{B(\rho_0)} \zeta^2 \varphi^2 |\nabla(\omega - k)^+|^2 dx dt'$$

$$\leqslant c \int_{\tau_0}^{t_1} \int_{B(\rho_0)} (\varphi(t') + |\nabla \zeta|^2 (w-k)^{+2} dx dt', \tag{67}$$

常数 $C > 0$ 只依赖于 n, p, k. 显然当 $h > k$ 时

$$\int_{\tau_1}^{t_1}\int_{B(\rho_1)}(w-k)^{+2}dxdt \geqslant (h-k)^2|B(\rho_1)\times(\tau_1,t_1)\cap\{w>h\}|, \tag{68}$$

联合式(67)、(68)即得

$$\int_{\tau_1}^{t_1}\int_{B(\rho_1)}(w-h)^{+2}dxdt$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{(h-k)^2}\int_{\tau_1}^{t_1}\int_{B(\rho_1)}(w-k)^{+2}dxdt\right]^{\frac{2}{n+2}}\left[\int_{\tau_1}^{t_1}\int_{B(\rho_1)}(w-h)^{+2(1+\frac{2}{n})}dxdt'\right]^{\frac{n}{n+2}}$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{(h-k)^2}\int_{\tau_0}^{t_1}\int_{B(\rho_0)}(w-k)^{+2}dxdt\right]^{\frac{2}{n+2}}\left[\int_{\tau_0}^{t_1}\int_{B(\rho_0)}|\zeta\varphi(w-k)^{+2(1+\frac{2}{n})}dxdt'\right]^{\frac{n}{n+2}}$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{(h-k)^2}\int_{\tau_0}^{t_1}\int_{B(\rho_0)}(w-k)^{+2}dxdt\right]^{\frac{2}{n+2}}$$

$$\times\left\{\operatorname*{vrai\,max}_{t\in(\tau_0,t_1)}\int_{B(\rho_0)}\zeta^2\varphi^2(w-k)^{+2}dx+\int_{\tau_0}^{t_1}\int_{B(\rho_0)}|\nabla(\zeta\varphi(w-k)^+|^2dxdt'\right\}$$

$$\leqslant c\left[\frac{1}{\tau_1-\tau_0}+\frac{1}{(\rho_0-\rho_1)^2}\right]\left(\frac{1}{h-k}\right)^{\frac{4}{n+2}}\left[\int_{\tau_0}^{t_1}\int_{B(\rho_0)}(w-k)^{+2}dxdt'\right]^{1+\frac{2}{n+2}}. \tag{69}$$

常数 $C>0$ 只依赖于 n,p,k. 对 $v=0,1,2,\cdots$ 置

$$\rho_v=\frac{R}{2}+\frac{R}{2^{v+1}},\quad \tau_v=t_1-\lambda R^2-\frac{\lambda R^2}{2^v},$$

$$k_v=H-\frac{H}{2^v}(H>0\text{ 待定}),\quad J_v=\int_{\tau_v}^{t_1}\int_{B(\rho_v)}(w-k_v)^{+}dxdt',$$

由于常数 C 和 $k,h,\rho_0,\rho_1,\tau_0,\tau_1$ 无关,分别用 k_{v+1},k_v 取代 h,k,用 ρ_v,ρ_{v+1} 取代 ρ_0,ρ_1,用 τ_v,τ_{v+1} 取代 τ_0,τ_1. 由式(69)给出

$$J_{v+1}\leqslant c\left[\frac{2^{v+1}}{\lambda R^2}+\left(\frac{2^{v+1}}{R}\right)^2\right]\left(\frac{2^{v+1}}{H}\right)^{\frac{4}{n+2}}J_v,\quad v=0,1,2,\cdots, \tag{70}$$

当 $v=0$ 时,根据式(66)有

$$J_0=\int_{t_1-2\lambda R^2}^{t_1}\int_{B(R)}|w|^2dxdt'\leqslant\int_{t_0+\omega_0R^2}^{t_1}\int_{B(R)}|w|^2dxdt'\leqslant AR^{n+2}, \tag{71}$$

其中 $A>0$ 只依赖于 $n,p,k,\theta,\omega_0,\omega'$. 设已证

$$J_v\leqslant\delta^vAR^{n+2}, \tag{72}$$

那么联合式(70)、(72)继续有

$$J_{v+1}\leqslant\frac{c}{H^{\frac{4}{n+2}}}\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)2^4A^{\frac{2}{n+2}}\left(2^{2+\frac{2}{n+2}}\delta^{\frac{2}{n+2}}\right)^v\delta^vAR^{n+2},$$

只要取 $H>0$ 满足

$$\frac{c}{H^{\frac{4}{n+2}}}\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)2^4A^{\frac{2}{n+2}}=\delta,\quad 2^{2+\frac{4}{n+2}}\delta^{\frac{2}{n+2}}=1, \tag{73}$$

那么式(72)继续对 $v+1$ 成立. 因而由归纳法,式(72)对一切正整数 v 成立,命 $v\to\infty$ 得

$$\int_{t_1-\lambda R^2}^{t_1}\int_{B(\frac{R}{2})}(w-H)^{+2}dxdt'=\lim_{v\to\infty}J_v=0,\text{即}$$

$$\operatorname*{vrai\,max}_{B(\frac{R}{2})\times(t_1-\lambda R^2,t_1)}w\leqslant H,$$

根据 w 的定义,上式隐含了

$$\operatorname*{vrai\,max}_{B(\frac{R}{2})\times(t_1-\lambda R^2,t_1)} (v-(1+\xi)\mu^2)^+ \leqslant [(3-\xi)\mu^2+\varepsilon](1-e^{-H}),$$

命 $\varepsilon\to 0$，由上式继续得

$$\operatorname*{vrai\,max}_{B(\frac{R}{2})\times(t_1-\lambda R^2,t_1)} v \leqslant 4\mu^2(1-\frac{3-\xi}{4}e^{-H}),$$

由于 $\lambda\leqslant 1$，上式隐含了

$$\operatorname*{Vrai\,max}_{Q(\frac{\lambda R}{2})}|\nabla u| \leqslant \eta_1 \operatorname*{vrai\,max}_{Q(2R)}|\nabla u|, \tag{74}$$

$$\eta_1=(1-\frac{3-\xi}{4}e^{-H})^{\frac{1}{2}}\in(0,1),$$

根据式(73)，η_1 和 H 只依赖于 $n,p,k,\theta,\omega_0,\omega'$ 和 λ、A、ξ，而后三者则只依赖于 $n,p,k,\theta,\omega_0,\omega'$，归根到底则是只依赖于 n,p,k,θ. 式(74)隐含了式(45)(把 $\lambda/2$ 写为 λ)，证明至此全部完成.

参　考　文　献

[1] Chin Yazhe, *Chin. Ann. of Math.*, *V*. 8, Ser. *B*, 3(1987), 343—356.

[2] Alikakos, N. D., Evans, L. C., *J. Math. Pures et Appl.*, 62(1983), 253—268.

[3] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., and Ural' ceva, N. N., *Linear and Quasi—linear Equations of Parabolic Type*, Amer、Math. Soc. Providence, R. I., (1968).

[4] Giaquinta, M., *Multiple Integrals in the Caculus of variations and Nonlinear Elliptic Systems*, Ann. Math. Studies 105, Princedon, (1983).

The Hölder Continuity of the Gradient Demonstrated by the Generalized Solutions of Degenerate Parabolic Equations

Liang Xuexin　　Liang Xiting

(*Huaqiao University*)　　(*Zhongshan University*)

Abstract The genealized solutions of degenerate parabolic equations demonstrate a spatial gradient ∇u. This paper gives a proof to the Hölder continuity of this gradient.

Key words degenerate parabolic equation, generalized solution, spatial gradient, Hölder continuity