

简化模型的软件包设计

王 晓 霞

〔计算机科学(电脑)系〕

摘要 本文介绍一个能将49阶以内的高阶传递函数降为2阶或3阶模型的软件包bbb1. 包括它的基本结构、应用和仿真结果。

关键词 主极点, 时间矩, 模型简化, 软件包, 仿真

1 原理

高阶传递函数 $G(s) = (b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m) / (a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n)$ 具有几个极点, 在这些极点中, 对其影响最大的是绝对值最小的极点。然而寻找一个系统的绝对值最小的极点往往是较困难的^{〔1〕}, 较方便的则是寻找一个系统的绝对值最大的极点。如果将 $G(s)$ 影射到 P 平面, 令 $P=1/s$, 这样 $G(s)$ 影射到 P 平面将得 $G(p) = [p^{-m}(b_m + b_{m-1}p + \dots + b_1p^{m-1} + b_0p^m)] / (a_n + a_{n-1}p + a_{n-2}p^2 + \dots + a_0p^n)$ 。 $G(p)$ 的绝对值最大的极点就是 $G(s)$ 的绝对值最小的极点。所以求 $G(p)$ 的最大极点, 也就是求 $G(s)$ 的最小极点, 这就是保留主极点法的基本思想^{〔2〕}。求 $G(p)$ 绝对值最大的极点的过程: 设 $G(p)$ 拥有的系统状态矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} \quad (1)$$

n 阶系统, 则 A 具有 n 个不同的本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。假设 λ_1 即为 A 的最大本征值, λ_n 为最小本

* 本文 1990—02—12 收到。

征值,则有 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots |\lambda_n|$ 设 ξ_i 为本征向量,则 $A \cdot \xi_i = \lambda_i \cdot \xi_i$,由 ξ_i 构成任意的一个非零向量,可记为

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= a_1 \cdot \xi_1 + a_2 \cdot \xi_2 + \dots + a_n \cdot \xi_n, \\ \varphi_1 &= A \cdot \varphi_{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

所以

$$\varphi_1 = A^2 \cdot \varphi_0,$$

在此引入 $\|\varphi_k\|_\infty$ 伪范数的概念, $\|\varphi_k\|_\infty$ 的伪范数 $\|\varphi_k\|$, 定义为取 φ_k 绝对值最大的分量:

$$\|\varphi_k\| = \text{Sign} \varphi_{\max} \|\varphi_k\|_\infty, \quad (3)$$

则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\varphi_{k+1}\|}{\|\varphi_k\|} = \lambda_1, \quad (4)$$

$k \rightarrow \infty$ 是不可能实现的, 只要达到 $\|\varphi_{k+1}\| / \|\varphi_k\| - \|\varphi_k\| / \|\varphi_{k-1}\| \leq 0.0001$ 这个精度时, 以 $\|\varphi_{k+1}\| / \|\varphi_k\|$ 求出的 λ 值就基本上可达到要求。

这是求 $G(p)$ 最大极点的过程, 保留 λ_1 主极点, 即可将 $G(p)$ 的最小极点保留, 即 $G(s)$ 可降为一阶模型。将 $G(p)$ 的分母多项式除以 $(P - \lambda_1)$, 得到新的 $G(p)$ 与 A , 重复以上寻找最大极点的过程, 求得 λ_2 为 $G(p)$ 的第二大极点, 以此类推, λ_3 为 $G(p)$ 的第三大极点, \dots , λ_n 为 $G(p)$ 的最小极点。相应的 $1/\lambda_1$ 为 $G(s)$ 的最小极点, $1/\lambda_2$ 为第二小极点, \dots , $1/\lambda_n$ 为 $G(s)$ 的最大极点。

欲保留 $G(s)$ 的最小极点并将其降为二阶, 其降阶后传递函数为

$$G_2(s) = \frac{b_0 + b_1 s}{(s - 1/\lambda_1)(s - 1/\lambda_2)}. \quad (5)$$

$G(s)$ 降为三阶的模型是

$$G_3(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{(s - 1/\lambda_1)(s - 1/\lambda_2)(s - 1/\lambda_3)}, \quad (6)$$

b_0, b_1, b_2 为降阶模型的待定参数, 是根据模型降阶前后的时间矩拟合条件确定的。

用时间矩拟合条件确定待定参数如下

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty g(t) dt - s \int_0^\infty t g(t) dt + \frac{1}{2!} s^2 \int_0^\infty t^2 g(t) dt - \frac{1}{3!} s^3 \int_0^\infty t^3 g(t) dt \\ &\quad + \dots + \frac{(-1)^i}{i!} s^i \int_0^\infty t^i g(t) dt + \dots \\ &= m_0 - m_1 s + \frac{1}{2!} m_2 s^2 - \frac{1}{3!} m_3 s^3 + \dots + \frac{(-1)^i}{i!} m_i s^i + \dots, \end{aligned}$$

其中 m_i 为时间矩, 定义为

$$m_i = \int_0^\infty t^i g(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

且有

$$\begin{aligned} m_0 &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s), \quad m_1 = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dG(s)}{ds}, \\ m_2 &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^2 G(s)}{ds^2}, \quad \dots, \quad m_i = (-1)^i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^i G(s)}{ds^i} \end{aligned}$$

现在应用以上时间矩的方法来确定 $G(s)$ 降为二阶、三阶模型后的待定系数 b_0, b_1, b_2 。

二阶:由0阶时间矩拟合得

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_0 + b_1 s}{(s - 1/\lambda_1)(s - 1/\lambda_2)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n},$$

得到参数 b_0 的值。由1阶时间矩拟合得

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\left(\frac{b_0 + b_1 s}{(s - 1/\lambda_1)(s - 1/\lambda_2)}\right)}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d\left(\frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}\right)}{ds},$$

得到参数 b_1 的值。

三阶模型的待定系数求法如二阶, b_2 由二阶时间矩拟合求得。

2 bbb1 程序设计

将 $G(s)$ 最大取到 49 阶, 将 $G(s)$ 的分母、分子系数分别放于数组 $a(n)$ 及 $b(m)$ 中。降阶前 $G(p)$ 的分母 $G(m) = C_{(1)}p^m + C_{(2)}p^{m-1} + \dots + C_{(m-1)}p + C_{(m)}$, 将 $G(M)$ 的系数放于数组 $C_{(i)}$ 中, $C_{(i)} = a_{(i)}/a_{(1)}$ ($i=1, n$)。设降阶后 $G(p)$ 的分母为 $G_{(m)}$, 降一阶后 $G_{(m)}$ 的系数放在数组 d 中; 再降一阶, 系数放在数组 e 中。降阶后二阶模型在程序中表示为

$$G_2(s) = \frac{W_1 + W_2 \cdot s}{(s + sa)(s + sb)},$$

降成三阶模型在程序中表示为

$$G_3(s) = \frac{W_1 + W_2 \cdot s + W_3 \cdot s^2}{(s + sa)(s + sb)(s + sc)}.$$

可见 W_1, W_2, W_3 同式(5)、(6)的 b_0, b_1, b_2 , $sa = -1/\lambda_1, sb = -1/\lambda_2, sc = -1/\lambda_3$ 。

主程序框图如图1所示。在主程序中, 需要调用一个求降阶极点的子程(框图如图2所示)。子程中 $Pa = -1/\lambda$, 是 $G(s)$ 每个降阶极点的负值, 第一次调用子程, 求出的 Pa 为一阶模型主极点的负值 sa , 第二次调用子程求出的 Pa 相当于二阶模型的 sb , 第三次调用子程求出的 Pa 相当于三阶模型的 sc , $mat1, mat2, mat4$, 均为二维数组, 容量为 50×50 , $mat1$ 存放式(1)中矩阵 A 的值。数组 $fi(50)$ 存放 ϕ_i 的值, 初始值 ϕ_0 取 $\phi_0 = [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$ 。式(3)中 $\|\phi_k\|$ 的值在子程中是存于数组 $bb(50)$ 中的, 而式(2)中 ϕ_k 的值是存于数组 $mat3(50)$ 中, 式(4)中 λ_i 在子程序中用 $Lamt$ 表示。式(1)在程序中如下表示:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a(n)}{a(1)} & -\frac{a(n-1)}{a(1)} & \dots & -\frac{a(3)}{a(1)} & -\frac{a(2)}{a(1)} \end{bmatrix}$$

k 本应该趋于无穷大, 但这是在程序中不可能实现的, 本子程在 k 达到 6 就求出 λ 的值。

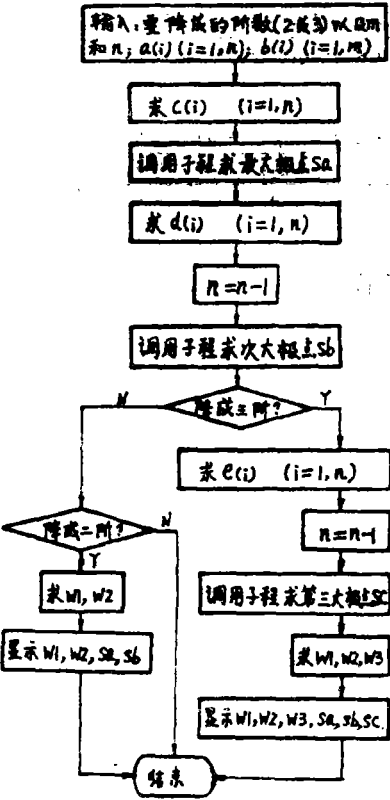


图 1 主程序框图

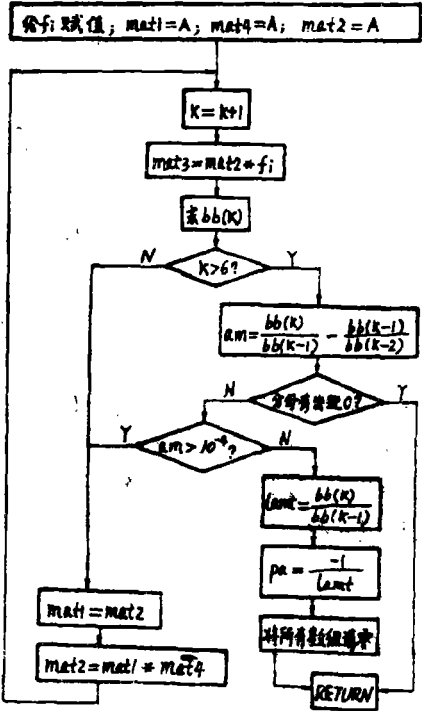


图 2 子程序框图

3 输入输出的数据格式(注:下划直线的为键盘输入)

3.1 输入数据格式

bbb1

The data file for bbb1 is

数据文件名

要使用 bbb1 要先建立一个具有 G(s)分子分母系数信息的数据文件,文件名用户自定,数据文件具体内容如下:

要降成的阶数(2 或 3)

G(s)的分子系数个数 m,分母系数个数 n

a0, a1, ..., an (G(s)的各个分母系数)

$b_0, b_1, \dots, b_m \setminus (G(s) \text{ 的各个分子系数})$

3.2 输出数据格式

降阶后的分子系数(比分母少一阶) W_1, W_2, \dots

降阶后的分母系数 sa, sb, \dots

降阶后的分子系数(与分母同阶) W_1, W_2, \dots

降阶后的分母系数 sa, sb, \dots

4 应用举例与仿真结果

假设要将

$$G(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24} \quad (7)$$

降为二阶模型,利用 bbb1 软件包,首先应建立如下数据文件

2. ✓

4.5. ✓

24. .50. .35. .10. .1. ✓

24. .24. .7. .1. ✓

将以上内容的数据文件名输入,运行 bbb1 所得结果如下:

2.003552 .833128
.999910 2.003733

2.003552 .833128 .376555
.999910 2.003733

即降成的二阶模型是:分子比分母少一阶的

$$G_{2-1}(s) = \frac{2.003552 + 0.833128s}{(s + 0.999910)(s + 2.003733)} \quad (8)$$

或分子与分母同阶的

$$G_{2-2}(s) = \frac{2.003552 + 0.833128s + 0.376555s^2}{(s + 0.999910)(s + 2.003733)} \quad (9)$$

降阶后的简化模型保留了原模型的主要信息,并具有多阶时间矩的拟合,因此,降阶模型可以较精确地逼近原模型。这个结论通过模型的阶跃响应仿真试验不难得到证实:

原模型式(7)在采样时间取 $\Delta T = 0.1s$ 时化成差分方程

$$y_t = 3.22594y_{t-1} - 3.89194y_{t-2} + 2.08125y_{t-3} - 0.41625y_{t-4} \\ + 0.08175U_t - 0.19314U_{t-1} + 0.15401U_{t-2} - 0.04162U_{t-3}, \quad (10)$$

实现式(10)的仿真程序框图如图3所示,计算结果列于表1的第二行 y_{av} 中。

利用 bbb1 软件包求得的二阶模型式(8)在采样时间也取 0.1s 时化成如下差分方程

$$y_i = 1.742173y_{i-1} - 0.757346y_{i-2} + 0.078270U_i - 0.063097U_{i-1}, \quad (11)$$

实现式(11)的仿真程序框图类似于图3,只是初始条件与求 $y_{(0)}$ 的算式不同.式(11)的仿真结果^[3,4]列于表1的第三行 y_{ns} 中.根据表1结果可绘制曲线如图4所示.

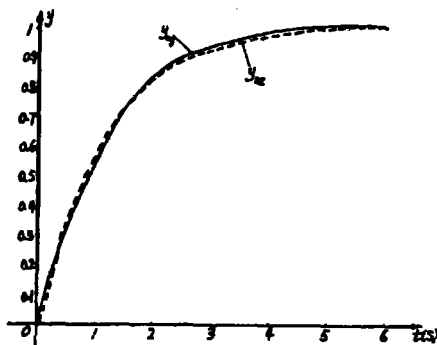
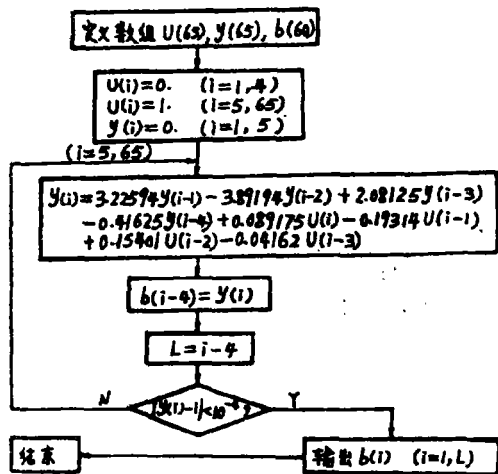


图3 仿真程序框图

图4 原模型与简化模型的仿真曲线

表1 原模型与简化模型的仿真结果

n	1	2	3	4	5	6
y_{ny}	0.081750	0.152331	0.215863	0.274643	0.329863	0.382084
y_{ns}	0.078270	0.151533	0.219892	0.283500	0.342545	0.397238
n	7	8	9	10	11	12
y_{ny}	0.431519	0.478215	0.522152	0.563304	0.601665	0.637263
y_{ns}	0.447805	0.494480	0.537500	0.577098	0.613504	0.646941
n	13	14	15	16	17	18
y_{ny}	0.670157	0.700437	0.728217	0.753631	0.776820	0.797935
y_{ns}	0.677621	0.705748	0.731514	0.755102	0.776682	0.796414
n	19	20	21	22	23	24
y_{ny}	0.817127	0.834545	0.850333	0.864631	0.877568	0.889267
y_{ns}	0.814447	0.830919	0.845960	0.859689	0.872215	0.883640

表1 原模型与简化模型的仿真结果(续)

n	25	26	27	28	29	30
y_{ny}	0.899841	0.909396	0.918029	0.925826	0.932870	0.939232
y_{nz}	0.894059	0.903557	0.912213	0.920101	0.927287	0.933833
n	31	32	33	34	35	36
y_{ny}	0.944980	0.950174	0.954867	0.959109	0.962944	0.966412
y_{nz}	0.939794	0.945223	0.950165	0.954664	0.958759	0.962486
n	37	38	39	40	41	42
y_{ny}	0.969549	0.972387	0.974954	0.979383	0.981288	0.983014
y_{nz}	0.965878	0.968965	0.971773	0.974329	0.976653	0.978768
n	43	44	45	46	47	48
y_{ny}	0.984577	0.985994	0.987278	0.988441	0.989495	0.990451
y_{nz}	0.980692	0.984034	0.985482	0.986798	0.987996	0.989085
n	49	50	51	52	53	54
y_{ny}	0.991317	0.992103	0.992816	0.993463	0.994050	0.994582
y_{nz}	0.990075	0.990976	0.991795	0.992539	0.993217	0.993832
n	55	56	57	58	59	60
y_{ny}	0.995066	0.995504	0.995902	0.996263	0.996591	0.996889
y_{nz}	0.994392	0.994901	0.995364	0.995785	0.996168	0.996516

参 考 文 献

- [1] Ray, W. H., *Advanced Process Control*, McGraw-Hill, (1981).
- [2] Wilson, R. G., *Mode Reduction and the Design of Reduction-order Control Laws*, *AIChE J.*, 20, 6(1974).
- [3] 吴重光、沈承林, 控制系统计算机辅助设计, 机械工业出版社, (1986).
- [4] 熊兴楞, 控制系统数字仿真, 清华大学出版社, (1982).

Software Design for a Simplified Model

Wang Xiaoxia

(Department of Computer Science)

Abstract This paper presents a software design, namely software package bbbl, with which a transfer function up to 49 order can be decreased to a model of 2 or 3 order. Its basic construction, applications, and simulation results are presented in detail.

Key words main pole, time torque, Simplified model, software, simulation