

挡土墙的概率分析

涂 帆

(土木工程系)

摘要 本文指出挡土墙常规分析法中存在的问题,介绍一种新的概率分析的方法,然后用这两种方法分别对一挡土墙进行分析并比较其结果。

关键词 挡土墙,随机变量,安全余量,概率分析

0 前言

挡土墙的常规分析是分别验算挡土墙抗倾、抗滑及地基承载力的安全系数,计算过程中,认为土的性质及荷载都是确定的。事实并非如此,不确定因素首先来自自然界本身,比如土的性质,不仅随空间还随时间变化。此外,由于条件的限制,人们所获得的资料与实际的差距也增大了不确定性。虽然后一个确定性会随生产力与科技水平的提高而减小,但不会消失,而前一个不确定性却是固有的,因此,常规分析视所有变量为定值不合理。再从安全系数 K 的表达式来看,举挡土墙的抗倾验算为例,根据图1有

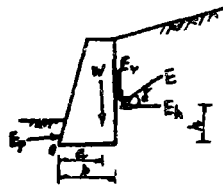


图1 挡土墙的抗倾验算

$$K = \frac{E_p b + W a}{E_a h} \quad \text{或} \quad K = \frac{W a}{E_a h - E_p b},$$

上述两式从意义上都可以,但 K 值显然不同。如果考虑墙前被动土压力 E_p ,同样也有将 E 放在分子或分母的问题。

抵抗能力和破坏能力事实上都是随机变量,可用其均值和标准差表示,例如抵抗能力的均值 $E(R)=120$,标准差 $\sigma(R)=20$;破坏能力的均值 $E(L)=80$,标准差 $\sigma(L)=10$ 。根据安全系数

* 本文1990-05-29收到。

的定义,可能 $K=120/80=1.5$,也可能 $K=(120-20)/(80+10)=1.1$,也可能 $K=(120+20)/(80-10)=2.0$ 。因此,由常规法算出的安全系数只是中心安全系数,其中隐藏着许多不确定性。

为了解决常规法中无法解决的上述问题,人们试图在另一个途径——概率法中寻找出路。

1 挡土墙的概率分析

概率分析法采用安全余量 SM 取代常规的安全系数 K ,

$$SM = R - L,$$

其中, R 代表抵抗能力,可以是力、应力或力矩; L 代表破坏能力,也可以是力、应力或力矩。因为 R 和 L 都是随机变量, SM 也是随机变量。 SM 大于、等于和小于零分别代表结构物安全、临界和破坏, SM 小于零的概率即为结构物的破坏概率 P_f 。

欲求破坏概率 P_f , 一般说来应知道 SM 的概率分布以及 SM 中所包含的不确定因素的概分布及统计值。安全余量的概率分布不易确定,以其物理过程看,可以大致认为其随机性是由很多相互独立的随机变量引起的,比如说土的抗剪强度、墙背倾角、土的容重等等,每一个随机变量都不起主导作用,其影响可以叠加,故可以假设安全余量服从正态分布^[1]。据研究,当 P_f 比较小,比如说在 10^{-3} 数量级时,分布的形式对破坏概率影响不大^[2]。一般说来,土工中的许多随机变量都接近正态或对数正态分布^[3,4],本文拟都采用正态分布的形式。

安全余量 SM 的均值和标准差的计算公式为

$$m_{SM} = m_R - m_L, \quad \sigma_{SM} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial SM}{\partial N_i} \right)^2 \sigma_{N_i}^2}.$$

其中, m_R 和 m_L 分别为抵抗能力和破坏能力的均值; σ_{N_i} 为影响 SM 的第 i 个随机变量 N_i 的标准差^[1]。由一次二阶矩法得到可靠指标 β , 可靠度(安全度) P 和破坏概率 P_f 分别为

$$\beta = m_{SM} / \sigma_{SM}, \quad P = \Phi(\beta), \quad P_f = 1 - \Phi(\beta).$$

严格说来, SM 公式中的变量均为随机变量,但计算中,根据这些变量的作用及变异系数的大小,选择一部分作为随机变量,其余的仍按定值处理,这种简化在工程中不仅是允许而且是必要的。

2 算例

某挡土墙如图2所示,墙砌体容重 $\gamma_w=21.58\text{kN/m}^3$,墙后填土面水平,墙背垂直,墙后填土的 $C=0$, $\varphi=33^\circ$, $\gamma=17.65\text{kN/m}^3$,填土与墙背的摩擦角 $\delta=10^\circ$,墙下地基土的 $C_b=0$, $\varphi_b=34^\circ$, $\gamma_b=17.65\text{kN/m}^3$,墙基与地基土的摩擦角 $\delta_b=28^\circ$ 。分别按常规和概率的方法分析该挡土墙。

因为墙背垂直且填土面水平,作用在墙背的库伦主动土压力公式可简化为

$$E = \frac{\gamma H^2}{2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \delta \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\delta + \varphi) \sin \varphi}{\cos \delta}} \right]^2} = 87.38 (\text{kN/m}),$$

$$W = \frac{1}{2}(b' + b)H\gamma = 207.12(\text{kN/m}), \quad a = 1.69(\text{m}).$$

1) 按常规法分析

(1) 抗滑安全系数

$$K_s = \frac{(W - E\sin\delta)\tan\delta_0}{E\cos\delta} = 1.37 > 1.3, \text{可以.}$$

(2) 抗倾安全系数 $K_e = (Wa + E_e b)/E_e h$ 。有必要对 h 的取值提一下, 由于楔形土体内砂粒间的拱作用, $n = h/H$ 的值可能在 $1/3 - 2/3$ 之间, 对于主动土压力, 本文取 $n = 0.4^{[5]}$, 故

$$K_e = \frac{Wa + E(\sin\delta)b}{E(\cos\delta)h} = 1.88 > 1.5, \text{可以.}$$

(3) 极限承载力的计算根据魏西克公式^[6], 对于本例具体情况

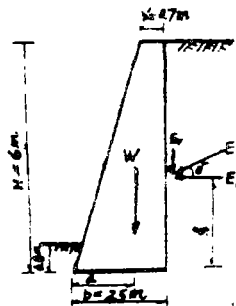


图2 例题计算简图

$$\begin{aligned} Q &= qN_s i_s + (1/2)\gamma B N_s i_s \\ &= 0.8 \times 17.65 \times 29.44 \times 0.38 + 1/2 \times 17.65 \times 1.64 \times 41.06 \times 0.23 \\ &= 294.66. \end{aligned}$$

$$K_s = \frac{Q}{(W + E_s)/b} = 3.31 > 3, \text{可以.}$$

2) 按概率法分析

本例中的随机变量及其特征值见表1, 表中未列出的变量按定值处理。安全余量对随机变量的求导为一般的数学运算, 不在此一一列出。

表1 随机变量的特征值

随机变量	均值 m	标准差 σ	变异系数 ν
φ	33°	3°	0.09
δ	10°	1°	0.10
n	0.4	0.06	0.15
φ_0	34°	2.2°	0.065
δ_0	28°	1.5°	0.054

(1) 抗滑计算

$$SM(h) = (W + E\sin\delta)\tan\delta_0 - E\cos\delta, \quad m_{SM(h)} = 32.14,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{SM(h)} &= \sqrt{\left(\frac{\partial SM}{\partial \delta_0}\right)^2 \sigma_{\delta_0}^2 + \left(\frac{\partial SM}{\partial \varphi}\right)^2 \sigma_{\varphi}^2 + \left(\frac{\partial SM}{\partial \sigma}\right)^2 \sigma_{\sigma}^2} \\ &= \sqrt{285.19^2 \left(\frac{1.5\pi}{180}\right)^2 + 178.39^2 \left(\frac{3\pi}{180}\right)^2 + 84.24^2 \left(\frac{\pi}{180}\right)^2} = 12.05. \end{aligned}$$

$$\beta_{(h)} = \frac{m_{SM(h)}}{\sigma_{SM(h)}} = 2.67, \quad P_{f(h)} = 1 - \Phi(\beta_h) = 3.8 \times 10^{-3}.$$

(2) 抗倾计算

$$SM(q) = Wa + E_e b - E_e nH, \quad m_{SM(q)} = 181.63,$$

$$\sigma_{SM(q)} = \sqrt{\left(\frac{\partial SM}{\partial \varphi}\right)^2 \sigma_{\varphi}^2 + \left(\frac{\partial SM}{\partial \sigma}\right)^2 \sigma_{\sigma}^2 + \left(\frac{\partial SM}{\partial m}\right)^2 \sigma_m^2}$$

$$= \sqrt{385.61^2 \times \left(\frac{3\pi}{180}\right)^2 + 301.86^2 \times \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 + (-516.34)^2 \times 0.06^2} = 37.35,$$

$$\beta_1 = \frac{m_{SM(q)}}{\sigma_{SM(q)}} = 4.86, \quad P_{f(q)} = 1 - \Phi(\beta_1) = 6 \times 10^{-7}.$$

(3) 承载能力的计算

$$SM(b) = qN_{q,i} + (1/2)\gamma B' N_{\gamma,i} - (W + E_s)/b, \quad m_{SM(b)} = 205.71,$$

$$\sigma_{SM(b)} = \sqrt{\left(\frac{\partial SM}{\partial \varphi_b}\right)^2 \sigma_{\varphi_b}^2 + \left(\frac{\partial SM}{\partial \sigma_b}\right)^2 \sigma_{\sigma_b}^2 + \left(\frac{\partial SM}{\partial \varphi}\right)^2 \sigma_{\varphi}^2 + \left(\frac{\partial SM}{\partial \sigma}\right)^2 \sigma_{\sigma}^2}$$

$$= \sqrt{2324.75^2 \left(\frac{2 \cdot 2\pi}{180}\right)^2 + 259^2 \left(\frac{1 \cdot 5\pi}{180}\right)^2 + 13.93^2 \left(\frac{3\pi}{180}\right)^2 + 32.66^2 \left(\frac{\pi}{180}\right)^2} = 89.44,$$

$$\beta_b = \frac{m_{SM(b)}}{\sigma_{SM(b)}} = 2.3, \quad P_{f(b)} = 1 - \Phi(\beta_b) = 1.07 \times 10^{-2}.$$

由承载能力的概率分析看出,地基土的内摩擦角 φ_b 对其安全余量的影响很大, $\partial SM/\partial \varphi_b$ 值高达 2324.75, 而第二大影响因素 σ_b 的 $\partial SM/\partial \sigma_b$ 值仅为 259, 相形之下, 其它影响因素, 如 φ 和 σ , 可按定值处理。挡土墙的分析结果归纳于表 2。

表 2 挡土墙的分析结果

破坏形式	m_{SM}	σ_{SM}	β	破坏概率	安全系数
倾 复	181.63	37.35	4.86	6×10^{-7}	1.88
承载能力	205.71	89.44	2.30	1.07×10^{-2}	3.31
滑 移	32.14	12.05	2.67	3.8×10^{-3}	1.37

3 结束语

1) 常规的安全系数并不真实地反映安全情况, 该挡土地基承载力的安全系数最高, 可破坏概率亦最大。在长期的工程实践中, 人们发现挡土墙很容易因地基承载力不足而破坏, 因此安全系数定为 3, 可是这样规定之后破坏的可能性有多大还是没数, 同时也无法解释有的安全系数小于 3 却安然无恙的原因。可以说, 安全系数规定得越大正是越没把握的表现, 该破坏形式可能是最危险的, 也可能是最容易造成浪费的。

2) 安全余量对某个变量偏导值的大小反映了该变量对安全余量所起的作用。地基土内摩擦角 φ_b 对地基承载力的安全余量起了决定性的作用, 因此, 正确确定 φ_b 的统计值事关重大; 另一方面, 承载力的安全余量假设为正态分布可能会有一定误差, 有必要寻找更合适的概率分布并比较其差别。

3) 概率分析法虽然还有待简化, 但它还不为工程界接受的原因在于随机变量的统计值目前还不易确定。黄文熙先生 1982 年就对这个问题的意见, “由于有些在数理统计中需要的基本资料目前还很不足, ……应用统计方法来解决具体问题还有困难, 这是事实。但是,

如果不进行这方面的研究,就不知道积累资料的重要性,因而使问题永远不能得到更好的解决。”^[5]八年来,情况有了很大改善,关于岩土资料分类统计和假设检验的文章也不少见^{[7]、[8]},这些工作很有实际意义,但相对说来还很不够,因此以概率统计的方法整理岩土试验资料的基本工作已提到日程上来了。

参 考 文 献

- [1] Ang, A. H. —S. and Tang, W. H. , *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, Vol I, John Wiley & Sons, Inc. , (1975), 189, 179.
- [2] Tang, W. H. , Yucemen, M. S. and Ang, A. H. , —S. , *Can. Geotech. J.* , 13, (1976), 204.
- [3] Yong, R. N. , Alonso, E. , and Tabba, M. M. , *Can. Geotech. J.* , 14, 4 (1977), 547.
- [4] Wu, T. H. and Kraft, L. M. , *J. soil Mechanics and Foundation Division* , 96, SM2 (1970), 611.
- [5] 黄文熙, 水工建设中的结构力学与岩土力学问题, 水利电力出版社, (1984), 235, 326.
- [6] 华东水利学院土力学教研室主编, 土工原理与计算(上册), 水利出版社, (1980), 348.
- [7] 李善皋, 西北地区黄土的主要物理力学性质指标的概率统计分析, 岩土力学新分析方法讨论会论文集, (1989), 136.
- [8] 光耀华, 利用概率法分析岩土工程的可靠性, 首届全国水利水电系统应用概率统计学术讨论会文集, 第三分册, (1985), 10.

Probability Analysis of the Retaining Wall

Tu Fan

(Department of Civil Engineering)

Abstract For analysis of the retaining wall, this paper points out the shortcomings of conventional method and presents a new method of probability analysis. These two methods are used to analyse a typical retaining wall and their results are compared with each other.

Key words retaining walls, random variable, safety margins, probability analysis