

设计洪水期望概率的探讨及应用

赵佩兰
(土木工程系)

摘要 本文阐述设计洪水期望概率的概念,并用实测水文资料说明在现行的洪水频率计算中考虑期望概率是必要的。

关键词 设计洪水,设计频率,正态分布,期望概率

0 引言

设计洪水的主要目的是求取相应于设计频率的洪水设计值,如用 X 表示洪水变量, \hat{X}_p 表示根据样本推求的设计频率为 p 的设计值,则合理的设计洪水应满足

$$P(X \geq \hat{X}_p) = p \quad (1)$$

式(1)表示在水文意义上每年实际来水等于或超过设计洪水的概率为 p 。目前,我国洪水频率计算是采用适线法进行参数估计,随后求算所需的信息。所谓适线法就是把每年的洪水变量作为相互独立的统计量,以实测水文资料构成的有限样本来估计总体的分布。我国普遍使用洪水总体分布为皮尔逊Ⅲ型函数,适线选择纵向离差绝对值准则与期望公式计算经验频率为配合最好,因为它能较好地满足数理统计中不偏性和有效性的目标,即

$$M(\hat{X}_p) = X_p, \quad (2)$$

$$\sqrt{M(\hat{X}_p - X_p)} = \text{最小值}。 \quad (3)$$

式中 $M(\hat{X}_p)$ 表示样本估计的设计洪水数学期望, X_p 为总体相应于设计频率 p 的洪水值,由于此值无法得到,所以只能用附合上述二条标准的 \hat{X}_p 设计值的最佳估计。

但是,大量的统计试验表明,用适线法得的设计洪水虽然附合公式(2)、(3)却不能满足公式(1)所要求的基本条件。为此,有必要开展对适线法的讨论和研究,并探讨附合公式(1)的计算洪水方法。国外在70年代提出的期望概率就是基于这个需要。若将公式(12)中的超过概率视为水文意义上的破坏概率,相同的概念在美国就称为期望概率。设计洪水需要考虑期望概率。

• 本文1990—05—08收到。

美国在70年代已将此观点用于陆军工程兵团所辖范围,并于1982年把期望概率写进《确定洪水频率指南》一书。

1 期望概率的计算公式

设有一随机变量 X 服从正态分布,样本均值为 \bar{x} ,均方差 s ,则统计量 $(\bar{x} + ks)$ 的期望概率为 t 分布的简单函数。

Proschan 从纯数学角度证明

$$P[X \geq (\bar{x} + ks)] = P[t_{n-1} \geq K(\frac{n}{n-1})^{1/2}] \quad (4)$$

令随机变量为洪水(洪峰流量或洪量),相应于某一统计频率的设计值为 X_p 。于是,期望概率 P^* 就可表示为

$$P^* = P(X \geq \hat{X}_p) = P_a[t_{p(n-1)} \geq K_p(\frac{n}{n+1})^{1/2}] \quad (5)$$

式中, K_p 为标准正态分布相应于指定超过概率的分位数; n 为样本容量; $t_{p(n-1)}$ 为自由度是 $n-1$ 的学生氏 t 统计量; P_a 为 t 分布计算的概率 P_a 。

上述公式只适用于正态总体矩法估计参数的情况。显然,对于我国洪水总体 $P-III$ 型分布是不适用的。我国已证明当总体分布为任意函数,参数估计为任意方法时,期望概率的普遍计算公式为

$$P^* = P(X \geq \hat{X}_p) = M[F(\hat{X}_p)] \quad F(\hat{X}_p) = \int_{\hat{X}_p}^{\infty} f(x) dx, \quad (6)$$

式中 $f(x)$ 为洪水变量的频率密度函数; $M[F(\hat{X}_p)]$ 为样本估计值 \hat{X}_p 在总体频率曲线上相应超过概率的数学期望。由于 $P-III$ 型分布函数的复杂性,式(6)要用分析式子计算是困难的,只能应用蒙特卡罗统计试验的方法求取近似值。因此,在我国目前情况下不可能广泛使用。

本文设想,把洪水系列正态化,随后应用正态总体的期望概率公式进行计算,其目的是探求适线法设计洪水是否达到应有的设计标准,估算中小流域设计洪水的期望概率。

2 期望概率的估算

设洪水总体为正态分布,用矩法估计的设计值为 \hat{X}_p ,根据正态分布性质

$$\hat{X}_p = \bar{x} + K_p s, \quad (7)$$

对于同一个样本的某设计值,用 t 分布计算的概率 P_a 与用正态分布计算的概率 p 有如下关系

$K_p/t_{p(n-1)} = (1 + \frac{1}{n})^{1/2}$ 。因为 $K_p = (X_p - \bar{x})/s$,所以

$$\hat{X}_{p_e} = \bar{x} + s(1 + \frac{1}{n})^{1/2} t_{p(n-1)}. \quad (8)$$

式(8)建立了正态总体时相应于期望概率的设计洪水计算公式,它满足 $P(X \geq \hat{X}_{p_e}) = p$ 。

为了说明公式的应用,并与适线法成果作比较,举例如下:

福建省安溪水文站具有29年实测洪水资料,洪峰流量按大小次序排列为 Q_1, Q_2, \dots, Q_n , $n=29$,其计算步骤:

(1)根据洪峰流量经验频率点据选配P-Ⅲ型频率曲线(图1)。统计参数均值 $\bar{Q}=2845\text{m}^3/\text{s}$,离差系数 $C_v=0.6$,偏态系数 $C_s=3.5C_v$,百年一遇设计洪水 $\hat{Q}_{1\%}=9106\text{m}^3/\text{s}$ 。(2)用三角形变换法(文[4]),将实测洪水系列转换成正态系列,新变量为 x_1, x_2, \dots, x_n , $n=29$ 。矩法计算均值 $\bar{x}=2438\text{m}^3/\text{s}$,均方差 $s=1367\text{m}^3/\text{s}$,在同一频率格纸(图1)上作正态分布频率曲线。(3)建立同频率正态变量 X_p 与偏态变量 \hat{Q}_p 的关系曲线(图2)。(4)由公式(8)计算正态变量设计值,当 $P_n=1\%$ 时, $t_{P(n-1)}=2.467$, $\hat{X}_{1\%}=5869\text{m}^3/\text{s}$ 。(5)由 $\hat{X}_{1\%}$ 在图2上查得相应的洪水流量 $\hat{Q}_{1\%}=10100\text{m}^3/\text{s}$,则 $P(Q \geq \hat{Q}_{1\%})=P^*=1\%$ 。依次计算概率(%)为0.5,2,5,10,20,50,70,90,95相应的 \hat{Q}_p 值。作 \hat{Q}_p-P^* 关系曲线(图3)。(6)利用图3查适线法成果 $\hat{Q}_{1\%}=9106\text{m}^3/\text{s}$ 所相应的期望概率为1.5%。

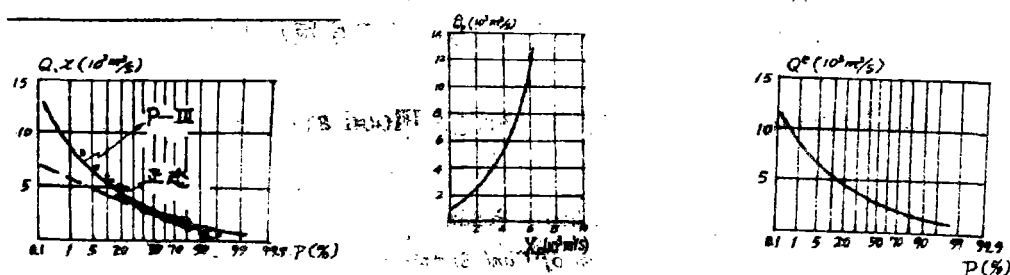


图1 频率分布曲线

图2 同频率 \hat{Q}_p-X_p 关系曲线图3 \hat{Q}_p-P^* 关系曲线

本文计算了福建省10个系列的设计洪水,样本容量 $n=20-30$,成果如表1所示。

表1 期望概率估计值 P^*

| P (%) | P* (%) | | | | | | | | | |
|-------|--------|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 安溪 | 洪赖 | 石葵 | 浦南 | 柳溪 | 郑店 | 漳平 | 濂溪 | 龙门 | 船场 |
| 0.5 | 1.0 | 1.0 | 0.9 | 1.0 | 1.0 | 0.9 | 0.9 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |
| 1 | 1.5 | 1.6 | 1.5 | 1.6 | 1.6 | 1.6 | 1.5 | 1.4 | 1.7 | 1.7 |
| 2 | 2.5 | 3.0 | 2.8 | 2.5 | 3.0 | 3.0 | 2.5 | 2.6 | 2.8 | 3.0 |
| 5 | 5.5 | 7.5 | 6.0 | 5.5 | 7.0 | 6.5 | 6.5 | 6.0 | 6.0 | 7.0 |
| 10 | 11 | 15 | 12 | 10.5 | 12 | 13 | 11 | 12 | 11 | 12 |
| 20 | 21 | 27 | 21 | 21 | 21 | 25 | 21 | 22 | 21 | 21 |
| 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 |
| 70 | 68 | 60 | 68 | 68 | 68 | 68 | 69 | 68 | 67 | 70 |
| 90 | 83 | 85 | 90 | 88 | 90 | 90 | 84 | 86 | 90 | 90 |
| 95 | 85 | 90 | 93 | 93 | 95 | 95 | 90 | 92 | 92 | 93 |

3 讨论

1)由表1可见,当设计频率 $p=50\%$ 时, $P^*=p$;当 $p<50\%$ 时 $P^*>p$;当 $p>50\%$ 时 $P^*<p$;工程上要求的设计标准均为小频率稀遇范围,所以期望概率总是大于设计频率。且 p 愈小,相差愈大。这说明目前我国用适线法计算的设计洪水平均而言是偏小的,不能满足设计标准的要

求,产生这种情况的原因是 P-Ⅲ 型分布或正态分布都是非线性的。为此,从防洪安全出发,设计洪水考虑期望概率是必要的。

2)本文提出的方法,仅适用于中小流域用来估算期望概率,因为变量变换时可能产生的误差很难分析,特别是小频率端的稀遇洪水,而这些设计洪水对防洪是尤为重要的。误差的估计需要通过统计试验来实现。

参 考 文 献

- [1] 丛树铮,关于水库的设计标准问题,华东水利科学院学报,1(1978).
- [2] 王俊德,期望概率的分段样本分析,首届全国水利水电系统应用概率统计学术讨论会文集,(1985).
- [3] 徐友鹏,概率论与数理统计,上海交通大学出版社,(1988).
- [4] 赵佩兰,采用变换法估算洪水流量,华侨大学学报(自然科学版),10,3(1989).

On the Expected Probability of Design Flood and Its Application

Zhao Peilan

(Department of Civil Engineering)

Abstract The concept of expected probability of design flood is set forth. The necessity for considering the expected probability in the existing flood frequency estimation is exemplified by the real hydrological data.

Key words design flood, design frequency, normal distribution, expected probability