

# 各向异性介质中电流平行平面场的积分法

王 建 成

(电气技术系)

**摘要** 本文导出在磁线性各向异性介质中,电流所激发的平行平面场的磁向量势  $\vec{A}$  和磁感应强度  $\vec{B}$  的积分表达式,为解决实际工程问题提供了一种数值方法。

**关键词** 各向异性,电流,场,积分法

## 0 引言

电磁场的分析与计算是电气技术理论和应用的重要课题之一。近20多年来,随着电子计算机的发展,电磁场的各种数值计算方法不断取得新的进展,并日益引起研究部门和工程技术界的重视。目前,利用计算机,采用数值计算方法来解决电磁场问题,已成为电气工程技术理论中一门新兴的学科。众所周知,所有介质都只是程度不同的各向异性而已,绝对纯的各向同性的介质是没有的。然而,至今所见到的有关资料提供的数值计算方法仅适用于各向同性介质。本文在文[1]的基础上,导出在磁各向异性介质中,电流所激发的平行平面场的磁向量势  $\vec{A}$  和磁感应强度  $\vec{B}$  的积分表达式,从而为使用计算机进行上述电流场量的数值计算提供了计算公式。

## 1 平行平面场的磁向量势

由文[1]知,当磁线性各向异性介质的三个主轴与直角坐标  $X, Y, Z$  三个轴互为平行时,给定的电流分布

$$\vec{j}(\vec{r}') = j_1(\vec{r}') \vec{e}_1 + j_2(\vec{r}') \vec{e}_2 + j_3(\vec{r}') \vec{e}_3, \quad (1)$$

在空间激发的磁向量势  $\vec{A}$  为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R_{r'}} dV', \quad (2)$$

本文1990—12—10收到。

式中

$$\vec{J}'(\vec{x}') = a_1 j_1(\vec{x}') \vec{e}_1 + a_2 j_2(\vec{x}') \vec{e}_2 + a_3 j_3(\vec{x}') \vec{e}_3, \quad (3)$$

且

$$a_1 = \sqrt{\frac{\mu_{22}\mu_{33}}{\mu_{11}}}; \quad a_2 = \sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{33}}{\mu_{22}}}; \quad a_3 = \sqrt{\frac{\mu_{11}\mu_{22}}{\mu_{33}}},$$

$$R_s = \left( \frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{R_3^2}{\mu_{33}} \right)^{1/2}, \quad (4)$$

其中,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  分别为三个直角坐标轴的单位向量;  $\mu_i$  为磁导率张量矩阵  $[\mu_i]$  的元素;  $\vec{R} = \vec{x} - \vec{x}'$  为源点  $\vec{x}'$  到观察点  $\vec{x}$  的矢径, 如图1所示。

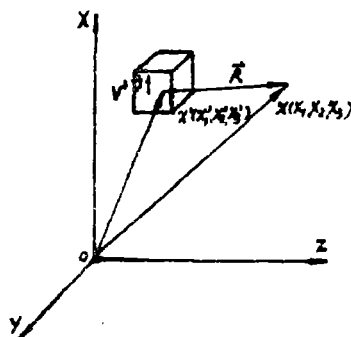


图1 源点到观察点的矢径

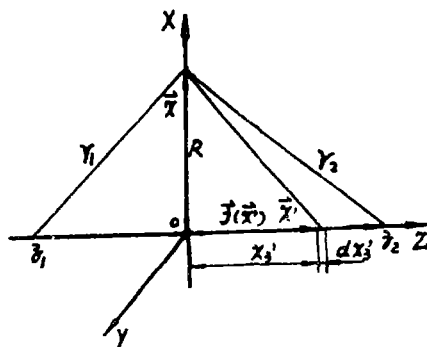


图2 平行平面场

假设空间有任意截面形状的无限长载流导体, 其截面积为  $s'$ , 沿直角坐标的  $Z$  轴延伸。在垂直于  $Z$  轴的任意平面上, 电流分布及场的分布完全相同, 形成平行平面场。于是式(2)改写为

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{J}'(\vec{x}')}{R_s} dx'_1 dx'_2. \quad (5)$$

设场点  $\vec{x}$  到电流的垂直距离为  $R$  到  $-z_1$  和  $z_2$  处的距离分别为  $r_1$  和  $r_2$ , 令

$$A' = \int_{-z_1}^{z_2} \frac{dx'_3}{R_s}$$

把式(4)代入上式, 并积分之。因有  $R_3 = x_3 - x'_3; x'_3 = 0$ , 得

$$A' = \sqrt{\mu_{33}} \left[ \ln \left( \frac{z_2}{\sqrt{\mu_{33}}} + \sqrt{\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{z_2^2}{\mu_{33}}} \right) - \ln \left( \frac{-z_1}{\sqrt{\mu_{33}}} + \sqrt{\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{z_1^2}{\mu_{33}}} \right) \right]$$

$$= \sqrt{\mu_{33}} \left[ \ln \left( \frac{z_2}{\sqrt{\mu_{33}}} + R_{s2} \right) - \ln \left( \frac{-z_1}{\sqrt{\mu_{33}}} + R_{s1} \right) \right], \quad (6)$$

式中

$$R_{s1} = \sqrt{\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{z_1^2}{\mu_{33}}}; \quad R_{s2} = \sqrt{\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}} + \frac{z_2^2}{\mu_{33}}}.$$

因有

$$\frac{-z_1}{\sqrt{\mu_{33}}} + R_{s_1} = \frac{R_{s_1}^2 - (\frac{z_1}{\sqrt{\mu_{33}}})^2}{R_{s_1} + \frac{z_1}{\sqrt{\mu_{33}}}} = \frac{\frac{R_{s_1}^2}{\mu_{11}} + \frac{R_{s_1}^2}{\mu_{22}}}{R_{s_1} + \frac{z_1}{\sqrt{\mu_{33}}}},$$

代入式(6),得

$$A' = \sqrt{\mu_{33}} [\ln(\frac{z_2}{\sqrt{\mu_{33}}} + R_{s_2})(\frac{z_1}{\sqrt{\mu_{33}}} + R_{s_1}) - \ln(\frac{R_{s_1}^2}{\mu_{11}} + \frac{R_{s_1}^2}{\mu_{22}})].$$

由于导体极长,有  $z_1 \gg R$  及  $z_2 \gg R$ ,故

$$(\frac{z_2}{\sqrt{\mu_{33}}} + R_{s_2})(\frac{z_1}{\sqrt{\mu_{33}}} + R_{s_1}) \approx 4 \frac{z_1 z_2}{\mu_{33}},$$

代入前式得

$$A' = \sqrt{\mu_{33}} [\ln 4 \frac{z_1 z_2}{\mu_{33}} - \ln(\frac{R_{s_1}^2}{\mu_{11}} + \frac{R_{s_1}^2}{\mu_{22}})]. \quad (7)$$

令并矢  $\vec{\vec{\mu}}$  为

$$\vec{\vec{\mu}} = a_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \vec{e}_3, \quad (8)$$

则由式(3),(8)得

$$\vec{J}'(\vec{x}') = \vec{\vec{\mu}} \cdot \vec{j}(\vec{x}'), \quad (9)$$

把式(7),(9)代入式(5)得

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\vec{\vec{\mu}}}{4\pi} \cdot \int_V \vec{j}(\vec{x}') A' ds' \\ &= \frac{\sqrt{\mu_{33}} \vec{\vec{\mu}}}{4\pi} \cdot \int_V \vec{j}(\vec{x}') [\ln 4 \frac{z_1 z_2}{\mu_{33}} - \ln(\frac{R_{s_1}^2}{\mu_{11}} + \frac{R_{s_1}^2}{\mu_{22}})] ds'. \end{aligned} \quad (10)$$

选定常向量  $\vec{A}_0$  为

$$\vec{A}_0 = - \frac{\sqrt{\mu_{33}} \vec{\vec{\mu}}}{4\pi} \cdot \int_V \vec{j}(\vec{x}') \ln 4 z_1 z_2 ds',$$

以与  $\vec{A}$  表达式(10)中的常向量项相抵消,故向量势可表为

$$\vec{A}(\vec{x}) = - \frac{\sqrt{\mu_{33}} \vec{\vec{\mu}}}{4\pi} \cdot \int_V \vec{j}(\vec{x}') \ln [\mu_{33} (\frac{R_{s_1}^2}{\mu_{11}} + \frac{R_{s_1}^2}{\mu_{22}})] ds'. \quad (11)$$

在平行平面场中,  $\vec{j}(\vec{x}')$  不仅为常向量,而且只有  $Z$  向分量,因此式(11)实际上是一个标量积分.考虑到  $ds' = dx'_1 \cdot dx'_2$ ,故式(11)可改写为

$$\vec{A}(\vec{x}) = - \frac{\sqrt{\mu_{33}} \vec{\vec{\mu}}}{4\pi} \cdot \int_V \vec{j}(\vec{x}') \ln [\mu_{33} (\frac{R_{s_1}^2}{\mu_{11}} + \frac{R_{s_1}^2}{\mu_{22}})] dx'_1 dx'_2, \quad (12)$$

在恒定场中,电流密度均匀分布.即使非均匀分布,也可划分成若干区域,使每一区域的电流密度可视为均匀分布,则上式又可改写为

$$\vec{A}(\vec{x}) = - \frac{\sqrt{\mu_{33}} \vec{\vec{\mu}}}{4\pi} \cdot \vec{j} \int_V \ln [\mu_{33} (\frac{R_{s_1}^2}{\mu_{11}} + \frac{R_{s_1}^2}{\mu_{22}})] dx'_1 dx'_2, \quad (13)$$

在工程问题中,对于图3所示的任意截面,可采用任意多边形来近似代替,从而使式(13)具有实用性,其边数不受限制.注意到

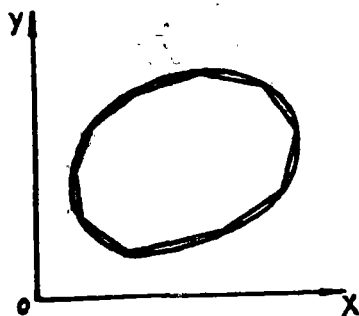


图3 用任意多边形近似代替任意截面

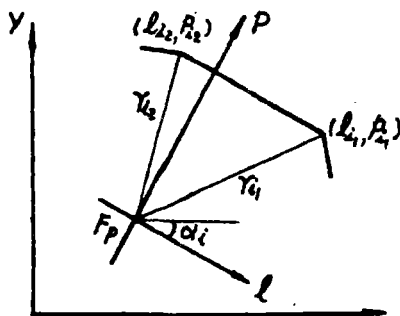


图4 局部坐标

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1'} (x_1 - x_1') \{ \ln [\mu_{33} (\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}})] - 1 \} \\ &= -\frac{1}{2} \ln [\mu_{33} (\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}})] + \frac{1}{2} - (\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}})^{-1} \frac{(x_1 - x_1')^2}{\mu_{11}} \end{aligned} \quad (14)$$

及

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2'} (x_2 - x_2') \{ \ln [\mu_{33} (\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}})] - 1 \} \\ &= -\frac{1}{2} \ln [\mu_{33} (\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}})] + \frac{1}{2} - (\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}})^{-1} \frac{(x_2 - x_2')^2}{\mu_{22}}, \end{aligned} \quad (15)$$

把式(14)与式(15)两边相加,右端相加得

$$\begin{aligned} & -\ln [\mu_{33} (\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}})] + 1 - (\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}})^{-1} [\frac{(x_1 - x_1')^2}{\mu_{11}} + \frac{(x_2 - x_2')^2}{\mu_{22}}] \\ &= -\ln [\mu_{33} (\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}})], \end{aligned}$$

左端相加得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1'} (x_1 - x_1') \{ \ln [\mu_{33} (\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}})] - 1 \} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2'} (x_2 - x_2') \{ \ln [\mu_{33} (\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}})] - 1 \} \\ &= \nabla \cdot [\bar{R} (\ln \sqrt{\mu_{33}} + \ln \sqrt{\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}}} - \frac{1}{2})], \end{aligned}$$

式中  $\bar{R} = (x_1 - x_1') \bar{e}_1 + (x_2 - x_2') \bar{e}_2$ , 故有

$$\nabla \cdot [\bar{R} (\ln \sqrt{\mu_{33}} + \ln \sqrt{\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}}} - \frac{1}{2})] = -\ln [\mu_{33} (\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}})]. \quad (16)$$

把式(16)代入式(13),得

$$\begin{aligned} \bar{A}(\bar{x}) &= \frac{\sqrt{\mu_{33}}}{4\pi} \bar{\mu} \cdot \oint \nabla \cdot [\bar{R} (\ln \sqrt{\mu_{33}} + \ln \sqrt{\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}}} - \frac{1}{2})] dx_1' dx_2' \\ &= \frac{\sqrt{\mu_{33}}}{4\pi} \bar{\mu} \cdot \oint (\ln \sqrt{\mu_{33}} + \ln \sqrt{\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}}} - \frac{1}{2}) \bar{R} \cdot \bar{n} dl. \end{aligned} \quad (17)$$

式中  $\bar{n}$  是周界的法向单位向量。由此可把沿闭合回路的线积分转化为多边形各边线积分之和。为便于计算,选用局部坐标对每边分别求解。取场点  $F$ , 为局部坐标的原点,其纵坐标取与

第  $i$  边垂直, 即  $\vec{n}$  的方向, 横坐标与第  $i$  边平行 (图4)。其起止坐标分别为  $(l_1, p_1)$  和  $(l_i, p_i)$ 。

变换后有

$$\vec{R} = \vec{l} + p\vec{p}; \quad R_1 = -p\sin\alpha - l\cos\alpha; \quad R_2 = p\cos\alpha - l\sin\alpha; \quad (18)$$

式中  $\vec{l}$ 、 $\vec{p}$  分别表示  $l$  和  $p$  方向的单位向量,  $\alpha$  为  $l$  轴与  $x$  轴之间的夹角。由于  $\vec{p}$  与  $\vec{n}$  是一致的, 故有

$$\begin{aligned} (\ln \sqrt{\mu_{33}} + \ln \sqrt{\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}}} - \frac{1}{2}) \vec{R} \cdot \vec{n} dl &= (\ln \sqrt{\mu_{33}} + \ln \sqrt{\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}}} \\ &- \frac{1}{2}) \vec{R} \cdot \vec{p} dl = p (\ln \sqrt{\mu_{33}} + \ln \sqrt{\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}}} - \frac{1}{2}) dl. \end{aligned} \quad (19)$$

把式(18)、(19)代入式(17), 并利用分部积分, 得

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\sqrt{\mu_{33}}}{4\pi} \vec{\mu} \cdot \vec{j} \sum_{i=1}^n \int_{l_{i1}}^{l_{i2}} p_i (\ln \sqrt{\mu_{33}} + \ln \sqrt{\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}}} - \frac{1}{2}) dl_i \\ &= -\frac{\sqrt{\mu_{33}}}{4\pi} \vec{\mu} \cdot \vec{j} \sum_{i=1}^n [\frac{3}{2} l_i p_i - l_i p_i (\ln \sqrt{\mu_{33}} + \ln \sqrt{\frac{R_1^2}{\mu_{11}} + \frac{R_2^2}{\mu_{22}}}) \\ &\quad - \frac{\theta}{2M} \ln(\mu_{22} R_1^2 + \mu_{11} R_2^2) - \frac{p_i^2 \sqrt{\mu_{11} \mu_{22}}}{M} \arctan(\frac{\theta + M l_i}{p_i \sqrt{\mu_{11} \mu_{22}}})]_{l_{i1}}^{l_{i2}}, \end{aligned} \quad (20)$$

式中,  $Q = p_i(\mu_{22} - \mu_{11})\sin\alpha_i\cos\alpha_i$ ,  $M = \mu_{11}\sin^2\alpha_i + \mu_{22}\cos^2\alpha_i$ 。式(20)就是横截面为  $n$  边形的无限长载流导体, 在空间某点  $(x_1, x_2)$  处所产生的磁向量势的计算公式。

当介质为线性各向同性时, 有  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ , 代入式(20), 得

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{\mu j}{4\pi} \sum_{i=1}^n [\frac{3}{2} p_i l_i - l_i p_i \ln R - p_i^2 \arctan(\frac{l_i}{p_i})]_{l_{i1}}^{l_{i2}}. \quad (21)$$

式(21)与磁线性各向同性介质中的已知结果是一致的。

## 2 平行平面场的磁感应强度

对式(20)求旋度, 可得平行平面场的磁感应强度的表示式为

$$\begin{aligned} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} &= \vec{e}_1 \sum_{i=1}^n (-\frac{\partial A}{\partial l_i} \cos\alpha_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \sin\alpha_i) + \vec{e}_2 \sum_{i=1}^n (\frac{\partial A}{\partial l_i} \sin\alpha_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \cos\alpha_i), \quad (22) \\ B_z &= -\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{4\pi} j \sum_{i=1}^n [\frac{3}{2} l_i - \frac{1}{2} l_i \ln \frac{\mu_{33} N}{\mu_{11}\mu_{22}} + p_i l_i \frac{T}{N} \\ &\quad - \frac{Q}{2p_i M} \ln N + \frac{QT}{MN} + \frac{p_i^2 l_i \mu_{11} \mu_{22}}{p_i^2 \mu_{11} \mu_{22} + (Q + M l_i)^2} \\ &\quad - \frac{2p_i \sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{M} \arctan(\frac{Q + M l_i}{p_i \sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}})]_{l_{i1}}^{l_{i2}} \cos\alpha_i, \quad (23) \\ B_x &= -\frac{\sqrt{\mu_{11}\mu_{22}}}{4\pi} j \sum_{i=1}^n [\frac{3}{2} l_i - \frac{1}{2} l_i \ln \frac{\mu_{33} N}{\mu_{11}\mu_{22}} + p_i l_i \frac{T}{N} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{Q}{2p_i M} \ln N + \frac{QT}{MN} + \frac{p_i^2 l_i \mu_{11} \mu_{22}}{p_i^2 \mu_{11} \mu_{22} + (Q + M l_i)^2} \\
 & - \frac{2p_i \sqrt{\mu_{11} \mu_{22}}}{M} \arctan \left( \frac{Q + M l_i}{p_i \sqrt{\mu_{11} \mu_{22}}} \right) \Big] l_i^2 \cos \alpha_i, \quad (24)
 \end{aligned}$$

式中,  $N = \mu_{22} R_1^2 + \mu_{11} R_2^2$ ;  $T = \mu_{22} R_1 \sin \alpha_i - \mu_{11} R_2 \cos \alpha_i$ . 当介质为线性各向同性时, 因有  $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu$ , 由式(23)、(24), 得

$$B_z = \frac{\mu j}{4\pi} \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{3}{2} l_i + l_i \ln R_i + 2p_i \arctan \left( \frac{l_i}{p_i} \right) \right] l_i^2 \cos \alpha_i, \quad (25)$$

$$B_r = \frac{\mu j}{4\pi} \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{3}{2} l_i + l_i \ln R_i + 2p_i \arctan \left( \frac{l_i}{p_i} \right) \right] l_i^2 \sin \alpha_i, \quad (26)$$

式(25)、(26)正是所预料的磁线性各向同性介质中的结果。

### 3 计算程序框图

计算机程序(略)。

图5为计算电流平行平面场量的程序流程框图。各向异性介质的磁导率、电流密度、几何参数等作为原始数据输入, 计算的场点数和场点的坐标作为计算输入量, 向量位值及磁感应强度分量作为计算结果输出。

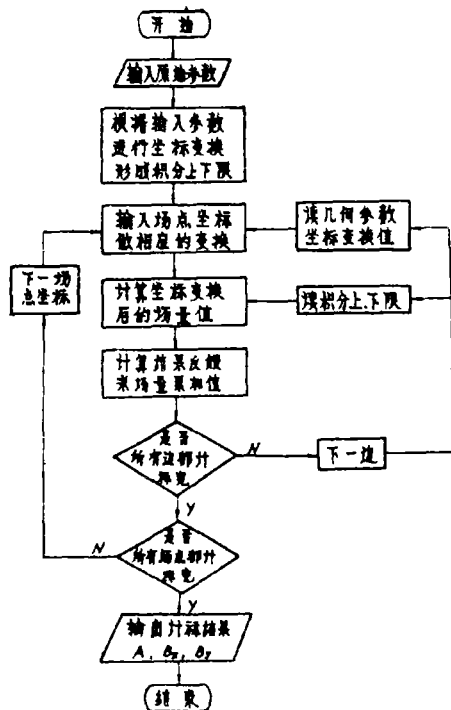


图5 程序流程框图

## 参 考 文 献

- [1] 王建成、陈荣年,磁各向异性的毕奥-萨伐尔定律及其应用,华侨大学学报(自然科学版), 10,2(1989).
- [2] 陈荣年,电网络基本方程的场论,电子学报,2(1987).
- [3] 郭硕鸿,电动力学,高等教育出版社,(1985).
- [4] 盛剑霓,电磁场数值分析,科学出版社,(1984).
- [5] 樊明武、颜威利,电磁场积分方程法,机械工业出版社,(1988).
- [6] Piergiorgio, L. E. Uslenghi, *Nonlinear Electromagnetics*, Academic Press, INC. , (1980).
- [7] Seely, S. , Poularikas, A. D. , *Electromagnetics, Classcal and Modern Theory and Applications*, Marcel Dekker INC. , (1979).

### Integration for the Use of Parallel Plane Field Provoked by a Current in Magnetic Anisotropic Media

Wang Jiancheng

(Department of Electric Technique)

**Abstract** For the use of parallel plane field excited by a current in magnetic anisotropic media, the integral expressions of magnetic vector potential  $\vec{A}$  and magnetic induction intensity  $\vec{B}$  are derived in this paper. A numerical method is thus provided for solving practical engineering problems.

**Key words** anisotropy electric current, field, integration