第12卷 第4期 华侨大学学报自然科学版 Vol. 12 №. 4
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1991年10月 (NATURAL SCIENCE) Oct. 1991

正态-极值Ⅰ型可靠度的 Bayes 方法

程 细 玉
(管理信息科学系)

摘要 在强度一应力模型中,设强度服从正态分布.应力服从极值Ⅰ型分布,其中应力已知,强度未知。本文应用 Bayes 方法,就强度参数的无信息验前分布得到了结构可靠度 P_r 的置信下限和正态一正态模型可靠度的置信下限,最后给出了实例计算。

关键词 强度一应力模型,无信息验前分布、结构可靠度

0 引言

Birnbaum 和 Mccarty 在 X 和 Y 相互独立且具有连续的累积分布函数条件下,给出了结构可靠度 $p_r=p_r(X>Y)$ 的非参数置信上限,开始了 $p_r(X>Y)$ 的研究,但一般局限在指数分布及正态分布,而且参数的限制比较苛刻(如要求应力和强度的方差相等)。本文则在较一般的情况下,得到正态一极值Ⅰ型及正态一正态可靠度的置信下限。

一般地,设随机变量 X、Y 的联合密度为 $f(x,y|\Omega)$,其中 Ω 表示密度的未知参数集合。因此,如令 $V=X-Y$,则有 $\theta=p_r(X>Y)=p_r[v>0|\Omega]=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(v+y,y(\Omega)dydv=\theta(\Omega)$,即 θ 仅为参数的函数。事实上,当参数指定一个先验分布后,θ 也为一个随机变量。设 D 表示从特定母体 $f(x,y|\Omega)$ 中得到的独立样本数据,$p(\Omega)$ 为 Ω 中元素的先验分布密度则由 Bayes 定理得到 Ω 的后验密度 $p(\Omega|D)\propto L(D|\Omega)p(\Omega)$,其中 $L(D|\Omega)$ 是基于数据 D 的极大似然函数。因此,由 $\theta=\theta(\Omega)$ 的后验密度 $p_1(\theta|D)$ 可以构造 θ 的一个区间估计

$$p_r(\theta_1<\theta<\theta_2|D)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}p_1(\theta|D)d\theta,\qquad(\theta_1<\theta_2)。$$

1 主要结果

设强度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,μ 和 σ^2 未知,应力 $Y\sim\exp\{-\exp(-\frac{y-\alpha}{\beta})\}$,$\alpha$ 和 β 已知,$-\infty<\alpha<+$

本文1990-04-04收到。

∞，$0<\beta<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$，$X_1\cdots X_n$ 为来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 iid 样本，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$s^2=\frac{1}{n-1}\sum(X_i-\bar{X})^2$。

一般地，可设 μ,σ 有先验分布，我们选用 Jeffreys 推荐的，被认为反映了对参数无知的 $p(\mu,\sigma)\propto\frac{1}{\sigma}$。

引理1　$p_r=p(X>Y)=E_\varphi\{F(\frac{\sigma\eta+\mu-\beta}{\alpha})\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)F(\frac{\sigma x-\mu-\beta}{\alpha})dx$，其中 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(x^2/2)$，$F(x)=\exp\{-\exp(-x)\}$，$E_\varphi\{g(\eta)\}$ 为标准正态 $N(0,1)$ 变量 η 的函数 $g(\eta)$ 的数学期望。

证明　$p_r=p(X>Y)=p(\frac{x-\mu}{\sigma}>(\frac{Y-\alpha}{\beta}\cdot\beta-\mu+\alpha)/\sigma)$，令 $\eta=\frac{x-\mu}{\sigma}$，$\xi=\frac{Y-\alpha}{\beta}$，则

$$p_r=p(\eta>\frac{\beta}{\sigma}\xi-\frac{\mu-\alpha}{\sigma}=\iint\limits_{y<(\sigma x+\mu-\alpha)/\beta}\varphi(x)F(y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)F(\frac{\sigma x+\mu-\alpha}{\beta})dx=E_\varphi\{F(\frac{\sigma\eta-\mu-\alpha}{\beta}\ 。$$

引理2　$\forall x\in R$，如果 $\sigma x-\mu$ 的水平为1-γ 的置信下限为 $h(x;\bar{x},s^2,1-\gamma)$，则 $p_r=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)F(\frac{\sigma x-\mu-\alpha}{\beta})dx$ 的水平1-γ 的置信下限为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)F(\frac{h(x;\bar{x},s^2,1-\gamma)-\alpha}{\beta})dx$。

证明　因$\forall x\in R$，$\sigma x+\mu$ 的置信下限为 $h(x;\bar{x},s^2,1-\gamma)$，即 $p(\sigma x-\mu\geqslant h(x;\bar{x},s^2,1-\gamma))=1-\gamma$，故 $P(\varphi(x)F(\frac{\sigma x-\mu-\alpha}{\beta}\geqslant\varphi(x)F(\frac{h(x;\bar{x},s^2,1-\gamma)-\alpha}{\beta}))=1-\gamma$，从而 $P(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)F(\frac{\sigma x-\mu-\alpha}{\beta})dx\geqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)F(\frac{h(x;\bar{x},s^2,1-\gamma)-\alpha}{\beta})dx)\geqslant 1-\gamma$，故原命题得证。

引理3　μ 的后验分布为正态分布 $N(\bar{x},\frac{\sigma^2}{n})$，$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ 的后验分布为 χ^2_{n-1}。

证明　$L(\mu,\sigma)\propto\sigma^{-n}\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^{-2}[n-1)s^2-n(\mu-\bar{x})^2]\}$，又 $p(\mu,\sigma)\propto\sigma^{-1}$（$(\mu,\sigma)$的联合先验分布密度），所以$(\mu,\sigma)$的联合后验密度

$$p(\mu,\sigma|\bar{x},s^2)\propto\sigma^{-(n+1)}\exp\{-\frac{1}{2}\sigma^{-2}[n-1)s^2+n(\mu-\bar{x})^2]\}$$

$$=\sigma^{-(n+1)}\exp[-\frac{1}{2}\sigma^{-2}(n-1)s^2]\cdot\exp[-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu-\bar{x})^2]$$

对 σ 积分立得 μ 的后验分布为 $N(\bar{x},\frac{\sigma^2}{n})$，对 μ 积分立得 $p(\sigma^2|\bar{x},s^2)\propto\sigma^{-n}\exp\{-\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\}$，故知令 $Z=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$，则有 $Z\sim\chi^2_{n-1}$。

定理1　对于给定的 x，$\delta=\mu-\sigma x$，则有 $\frac{\sqrt{n}(\delta-\bar{x})}{\sqrt{s^2}}\sim t_{n-1}(\sqrt{n}x)$，其中 $t_{n-1}(\sqrt{n}x)$ 为非中心 t 分布，自由度为 $n-1$，非中心参数 $\sqrt{n}x$。

证明　由引理3，δ 的条件后验密度 $f(\delta|\sigma)$ 为 $N(\bar{x}+x\sigma,\frac{\sigma^2}{n})$，令 $Z=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$，则 δ 的条件后验密度 $f(\delta|z)$ 为 $N(\bar{x}-x\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{z}},\frac{(n-1)s^2}{nz})$，由引理3知 $Z\sim\chi^2_{n-1}$，故(δ,z)的联合后验密

度

$$f(\delta,z|\bar{x},s^2)=\sqrt{\frac{nz}{2\pi(n-1)s^2}}\cdot\exp\{-\frac{nz}{2(n-1)s^2}(\delta-\bar{x}-x\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{z}})^2$$

$$\cdot\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\cdot z^{\frac{n-1}{2}-1}\cdot\exp\{-\frac{z}{2}\}$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\cdot\sqrt{\frac{n}{2\pi(n-1)s^2}}\cdot z^{\frac{n}{2}-1}\cdot\exp\{-\frac{n(\delta-\bar{x})^2+(n-1)s^2}{2(n-1)s^2}z$$

$$+\frac{nz}{(n-1)s^2}\cdot(\delta-\bar{x})\cdot x\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{z}}-\frac{n}{2}x^2\}$$

$$(z>0,\ -\infty<\delta<+\infty).$$

故δ的后验密度$f_1(\delta|\bar{x},s^2)=\int_0^\infty f(\delta,z|\bar{x},s^2)dz$，令$z=2(n-1)s^2/(n(\delta-\bar{x})^2+(n-1)s^2)y$，则$\int_0^\infty f(\delta,z|\bar{x},s^2)dz=a\int_0^\infty\exp\{-y+b\sqrt{y}\}\cdot y^{\frac{n}{2}-1}dy$，其中

$$a=\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\cdot\sqrt{\frac{n}{2\pi(n-1)s^2}}\cdot[\frac{2(n-1)s^2}{n(\delta-\bar{x})^2+(n-1)s^2}]^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{n}{2}x^2},$$

$$b=\frac{2n(\delta-\bar{x})\cdot x}{\sqrt{2n(\delta-\bar{x})^2+2(n-1)s^2}},$$

故

$$f_1(\delta|\bar{x},s^2)=a\int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1}\sum_{i=0}^\infty(\frac{(b\sqrt{y})^i}{i!}\exp\{-y\}dy=a\sum_{i=0}^\infty\Gamma(\frac{n+i}{2})\cdot\frac{b^i}{i!}$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\cdot\sqrt{\frac{n}{2\pi(n-1)s^2}}\cdot[\frac{2(n-1)s^2}{n(\delta-\bar{x})^2+(n-1)s^2}]^{\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{n}{2}x^2}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^\infty\frac{\Gamma(\frac{n+i}{2})}{i!}\cdot\frac{[2n(\delta-\bar{x})\cdot x]^i}{[2n(\delta-\bar{x})^2+2(n-1)s^2]^{\frac{i}{2}}}.$$

令$v=(\sqrt{n}(\delta-\bar{x}))/\sqrt{s^2}$，则

$$f(v|\bar{x},s^2)=\frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})}\cdot\exp\{-\frac{(\sqrt{n}x)^2}{2}\}\cdot(\frac{1}{v^2+n-1})^{\frac{n}{2}}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^\infty\frac{\Gamma(\frac{n+i}{2})}{i!}(v\sqrt{n}x)^i[\frac{2}{v^2+n-1}]^{\frac{i}{2}}.$$

所以

$$\frac{\sqrt{n}(\delta-\bar{x})}{\sqrt{s^2}}=v\sim t_{n-1}(\sqrt{n}x).$$

定理2 在强度为正态$N(a,\sigma^2)$，应力$Y\sim\exp\{-\exp(-\frac{y-\sigma}{\beta})\}$的强度—应力结构可靠性

模型中,如果 σ^2,a 未知,α,β 已知,并假设(a,σ)的验前分布为无信息的验前分布,则其可靠度 $p_r=p_r(X>Y)$的一个水平为$1-\gamma$的置信下限为

$$L_{pr}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)F(\frac{\sqrt{s^2/n}h(x)+\bar{X}-\sigma}{\beta})dx,$$

其中 $h(x)$ 为 $\int_0^h t_{n-1,\sqrt{n}x}(y)dy=\gamma$ 的解。

证明 由引理1,$p_r=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)F(\frac{\sigma x+\mu-\alpha}{\beta})dx$.由定理1知,$\forall X\in R$,$\sigma x+\mu$ 的水平为$1-\gamma$的置信下限为 $\sqrt{s^2/n}h(x)+\bar{X}$,其中 $h(x)$ 为 $\int_0^h t_{n-1,\sqrt{n}x}(y)dy=\gamma$ 的解.对于给定的 x,利用非中心 t 分布表可以确定 h 的值,由引理2知 p_r 的水平 $1-\gamma$ 的一个置信下限为 $L_{pr}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)F(\frac{\sqrt{s^2/n}h(x)+\bar{X}-\sigma}{\beta})dx$.

应当注意:在一般的应用中,可认为应力是已知的,强度是未知的,所以定理2解决了正态—极值 I 型结构可靠度的置信下限问题,因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)F(\frac{\sqrt{s^2/n}h(x)+\bar{X}-\sigma}{\beta})dx$ 收敛,对给定的 x,立得 $h(x)$,故计算 L_{pr}的程序在计算机上可以实现。

从定理2的证明易知此方法也适用于正态—正态模型的结构可靠度估计问题。

定理3 在正态—正态结构可靠性模型中设强度 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,应力 $Y\sim N(\alpha,\beta^2)$,其中 μ 和 σ^2未知,α,和 β^2已知,在假设(μ,σ)的验前分布为无信息验前分布下,结构可靠度 $p_r=p_r(X>Y)$的水平为$1-\gamma$的置信下限下

$$L_{p_r}^{*}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\Phi(\frac{\sqrt{s^2/n}h(x)+\bar{X}-\sigma}{\beta})dx$$

其中 $h(x)$的意义同定理2,$\Phi(x)$为标准正态函数。

证明 易知 $p_r=p(X>Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\Phi(\frac{\sigma x+\mu-\alpha}{\beta})dx$,重点关于正态—极值 I 型结构可靠度的论述即可得到结果。

鉴于定理1及定理2在应用上的困难,我们给出以下的近似结果。

因为$\frac{\sqrt{n}(\delta-\bar{x})}{\sqrt{s^2}}\sim t_{n-1}(\sqrt{n}x)$。故 δ 的水平$1-\gamma$的置信下限为 $\bar{x}-\sqrt{(S^2/n}\cdot t_{n-1,\sqrt{n}x}(1-\gamma)$,$t_{n-1,\sqrt{n}x}(1-\gamma)$为 $t_{n-1,\sqrt{n}x}(y)$的分位点。文[2]给出了中心非 t 分布分位点一个很好的近似,即

$$\begin{aligned}t_{n-1,\sqrt{n}x}(1-\gamma)=&\Phi_{1-\gamma}+\sqrt{n}x+\frac{1}{4}[\Phi_{1-\gamma}^3+\Phi_{1-\gamma}+(2\Phi_{1-\gamma}^2+1)\sqrt{n}x\\&+\Phi_{1-\gamma}nx^2]/n+\frac{1}{96}[5\Phi_{1-\gamma}^5-16\Phi_{1-\gamma}^3+3\Phi_{1-\gamma}+3(4\Phi_{1-\gamma}^4+12\Phi_{1-\gamma}^2+1)\\&\cdot\sqrt{n}x+6(\Phi_{1-\gamma}^3+4\Phi_{1-\gamma})nx^2-4(\Phi_{1-\gamma}^2-1)\cdot n^{\frac{3}{2}}x^3-3\Phi_{1-\gamma}n^2x^4]/n^2\triangleq g(x),\end{aligned}$$

则 $g(x)$ 为 x 的一元四次多项式,从而 L_{pr} 的一个很好的近似为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)F[\frac{\sqrt{(s^2/n)}g(x)+\bar{X}-\sigma}{\beta}]dx$.

例 以同一实测数据,结构应力的 $\alpha_2=3.29894836$,$\beta_2=0.77449603$,结构强度的 iid 样

本统计特征为 $n=5,\bar{X}=9.5,S_n=2.73829874$，模拟成正态－极值 I 型模型。取置信水平 $1-\gamma=0.95$，算得 p_r 的 MVUE 为0.9853540，p_r 的 MLE 为0.974653843。此时 $\Phi_{0.75}=-1.64$，$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$，$F(x)=\exp\{-\exp(-x)\}$，$g(x)$ 为一元四次多项式，系数均已知，计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)F[\frac{\sqrt{(s^2/n)}g(x)+\bar{X}-\sigma}{\beta}]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{x^2}{2}-\exp(-\frac{\sqrt{(s^2/n)}g(x)+\bar{X}-\sigma}{\beta})\}dx,$$

按照一般的计算积分 $\int_A^B G(x)dx$ 的程序，由于积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{x^2}{2}-\exp(-\frac{\sqrt{(s^2/n)}g(x)+\bar{X}-\sigma}{\beta})\}dx$ 收敛，采用 Simpson 方法计算的 $L_r\approx0.924$，可见置信下限与 MVUE 和 MLE 比起来结果令人满意。

同理，计算正态－正态模式可靠度置信下限 L_r^* 可用 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\Phi(\frac{\sqrt{(s^2/n)}g(x)+\bar{X}-\sigma}{\beta})dx$ 近似得到。

参考文献

〔1〕Marlz, H. F. and Waller, R. A, *Bayesian Rleiability Analysis*, *John Wiley sons*, *New York*, (1982). 223－224.

〔2〕方开泰、许建伦，统计分布，科学出版社，(1987)，206－207.

Bayesian Hethod on Structural Reliability of Normal-Extreme Model I

Cheng Xiyu

(Departmnet of Management Information Science)

Abstract In strength－stress model, let strength be observed to mormal distribution and let stress be observed to extreme I model distribution, where stress is known and strength unknown. By applying Bayesjan method, the fiducial lower limit of structural reliability pr and the fiducial lower limit of normal－normal extreme model reliability are obtained with respect to the information－free a priori distribution of strength parameter. The calculation of example is given finally.

Key words strength－stress model, information－free a priori distribution, structural reliability