

# 一类问题的最优迭代参数的确定

蔡 火 莹  
(管理信息科学系)

**摘要** 本文给出一类问题的最优迭代参数的一个确定方法,并证明它的收敛性。

**关键词** 可行方向,最优迭代参数,收敛性

## 0 引言

关于线性代数方程组

$$Ax = b \quad (1)$$

的解法问题,1986年,A·Hadjimos,A·Psimarni及A·Yeyios研究并推广了求解问题(1)的AOR方法,并称之为“Generalized Accelerated Overrelaxation Method”,简称GAOR方法<sup>[1]</sup>。

对此,引起国内外学者的兴趣,许多人进一步研究GAOR方法在各种具体矩阵下参数的收敛范围。但是,在这些收敛范围的参数中,哪一个参数对是最佳参数对,研究还不多。本文提出一类问题的最佳迭代参数对的一个确定方法,并讨论它的收敛性。

## 1 GAOR 迭代法

对于所给线性代数方程组  $Ax=b$  的GAOR迭代法为

$$X^{k+1} = [D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1} [(1 - \omega)D_1 + (\omega - r)(D_2 + C_L) + \omega(D_3 + C_u)]X^k + \omega[D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

其中  $A = D_A - C_L - C_u$ ,  $D_A$  是矩阵  $A$  的对角矩阵,  $-C_L$ ,  $-C_u$  分别是矩阵  $A$  的严格下三角矩阵和严格上三角矩阵。 $D_1, D_2, D_3$  是满足下述条件的对角矩阵,即  $D_1 - D_2 - D_3 = D_A = \text{diag}(A)$ ,  $\det(D_1) \neq 0$ ,  $\omega, r \in E_1$ , 分别称为松弛参数和加速参数,且  $\omega \neq 0$ ,  $\det(D_1 - rD_2) \neq 0$ , GAOR 的迭代矩

本文1990—05—23收到。

阵为

$$L_{\omega,r} \equiv L_{\omega,r}(D_1, D_2) = [D_1 - r(D_2 + C_L)]^{-1} [(1 - \omega)D_1 + (\omega - r)(D_2 + C_L) + \omega(D_3 + C_s)]. \quad (3)$$

## 2 迭代矩阵的谱半径表达式

**定理1** 若  $A, D_1 - rD_2$  为 Hermitian 矩阵,  $\lambda$  和  $X$  分别是矩阵  $L_{\omega,r}$  的特征值和相应的特征向量, 即有关系式:  $L_{\omega,r}X = \lambda X$ ,  $|\lambda| = \rho(L_{\omega,r})$ ,  $X \neq 0$ , 则有

$$\rho^2(L_{\omega,r}) = \frac{[(GX, X) - \omega(AX, X)]^2 + [(r/2)(SX, X)]^2}{(GX, X)^2 + [(r/2)(SX, X)]^2}$$

$$G = D_1 - rD_2 - (r/2)H = (1/2)(2D_1 - 2rD_2 - rD_A + rA),$$

式中

$$H = C_L + C_s, \quad S = C_L - C_s.$$

**证明** 由于  $L_{\omega,r}X = \lambda X$ , 可知

$$(D_1 - rD_2 - rC_L)^{-1} [(1 - \omega)D_1 + (\omega - r)(D_2 + C_L) + \omega(D_3 + C_s)]X = \lambda X,$$

进而可得

$$\begin{aligned} & (D_1 - rD_2 - rC_L)\lambda X \\ &= [(1 - \omega)D_1 + (\omega - r)(D_2 + C_L) + \omega(D_3 + C_s)]X \\ &= [D_1 - \omega D_A - rD_2 + (\omega - r)C_L + \omega C_s]X, \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} C_L &= (1/2)(H + S), C_s = (1/2)(H - S), \\ A &= D_A - C_L - C_s = D_A - (C_L + C_s) = D_A - H = D_1 - D_2 - D_3 - H, \end{aligned}$$

得到

$$[D_1 - rD_2 - (r/2)(H + S)]\lambda X = [D_1 - rD_2 - \omega A - (r/2)(H + S)]X,$$

记  $G = D_1 - rD_2 - (r/2)H$ , 可得

$$[G - (r/2)S]\lambda X = (G - \omega A - (r/2)S)X,$$

进而得到

$$\lambda[<GX, X> - r/2<SX, X>] = [<GX, X> - \omega<AX, X> - (r/2)<SX, X>],$$

或

$$\lambda = \frac{<GX, X> - \omega<AX, X> - (r/2)<SX, X>}{<GX, X> - (r/2)<SX, X>}.$$

因为  $D_1 - rD_2, H$  都是 Hermitian 矩阵, 所以  $G$  为 Hermitian 矩阵, 又  $A$  为 Hermitian 矩阵, 所以  $S$  为 Hermitian 矩阵, 于是有

$$\lambda^* \lambda = |\lambda|^2 = \rho^2(L_{\omega,r}) = \frac{(<GX, X> - \omega<AX, X> - (r/2)<SX, X>)^2}{(<GX, X> - (r/2)<SX, X>)^2}.$$

### 3 矩阵 $L_{\omega,r}$ 的特征值和特征向量

若  $L_{\omega,r}$  是一个具有线性初等因子的实元阵, 在 GAOR 方法收敛的范围内, 任意固定一对参数对  $(\omega_0, r_0)$ , 再利用乘幂法或其它方法求出矩阵  $L_{\omega_0, r_0}$  的按模最大特征值和相应的特征向量  $\lambda_0, X_0$ , 这时有关系式:  $L_{\omega_0, r_0} X_0 = \lambda_0 X_0, X_0 \neq 0$ , 或者有  $\lambda_0 = \langle L_{\omega_0, r_0} X_0, X_0 \rangle / \langle X_0, X_0 \rangle$ , 固定  $X_0$ , 放开  $\omega_0, r_0$ , 可得:  $\lambda = \lambda(\omega, r)$ , 如果  $\lambda \geq 0$ , 可用分式线性规划的优化方法求出它的最优解  $(\omega_1, r_1)^{(2)}$ , 相应地有  $\lambda_1 = \lambda(\omega_1, r_1)$ , 如果  $\lambda$  是复数, 可得

$$\lambda^* \lambda = |\lambda|^2 = \overline{\lambda(\omega, r)} \cdot \lambda(\omega, r) = \varphi(\omega, r),$$

再用其它优化方法(下面将要介绍的优化方法), 求出它的最优解  $(\omega_1, r_1)$ , 于是得到

$$|\lambda_1|^2 = \varphi(\omega_1, r_1).$$

这时, 由  $\omega_0, r_0$  过渡到  $\omega_1, r_1$ , 相应的  $\lambda$  由  $\lambda_0$  摄动到  $\lambda_1$ , 并且有  $|\lambda_0| \geq |\lambda_1|$ , 如果矩阵关于  $\omega, r$  病态, 那么这种摄动可能很大, 但在我们的情况下, 矩阵是非病态的, 因为在 GAOR 方法收敛的参数范围内, 总保持  $|\lambda| \leq 1$ , 现在可用  $(\omega_1, r_1)$  代替  $(\omega_0, r_0)$ , 再用乘幂法或其它方法求矩阵  $L_{\omega_1, r_1}$  的按模最大特征值和相应的特征向量  $\lambda_1, X_1$ . 固定  $X_1$ , 放开  $\omega_1, r_1$ , 可得  $|\lambda|^2 = \varphi(\omega, r)$ , 再用优化方法求出最优解  $\omega_2, r_2$ , 进而得到

$$|\lambda_2|^2 = \varphi(\omega_2, r_2),$$

这样交替进行下去, 求出  $\lambda_0, \lambda_1, \dots$  且有条件

$$|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$$

由于  $|\lambda|$  有下界, 从而有极限, 对应于这个极限我们得到最优迭代参数对  $(\omega, r)_\infty$ .

### 4 最优迭代参数的计算步骤

从以上的讨论中可知, 需要求解一个如下形式的非线性规划问题.

$$(NLP) \begin{cases} \min p^2(L_{\omega,r}) = \frac{(\langle GX, X \rangle - \omega \langle AX, X \rangle)^2 + ((r/2) \langle SX, X \rangle)^2}{(\langle GX, X \rangle)^2 + ((r/2) \langle SX, X \rangle)^2}, \\ s.t. \quad 0 \leq \omega \leq a, \\ \quad \quad 0 \leq r \leq b, \end{cases}$$

这个问题是一个具有线性约束的非线性规划问题, 下面就其一般形式对它进行讨论,

对于所给具有线性约束的非线性规划问题

$$(NLP) \begin{cases} \min f(x), \\ x \in R \\ R = \{x | Ax \geq b, x \geq 0\}, \end{cases}$$

假设其目标函数  $f(x)$  是  $E_n$  上的连续可微实值函数, 则求解 (NLP) 问题的改进的可行方向法的具体计算步骤如下: (1) 给出初始正数  $M = M_0 > 0$ , 给出初始基础可行解  $x^0 \in \bar{R} = \{x | Ax \geq b\}$ ,

$\sum_{i=1}^n x_i \leq M, x \geq 0\}$ ; (2) 给出循环参数初值  $k = 0$ ; (3) 求解线性规划问题

$$(LPK) \begin{cases} \min f_*(x), \\ x \in \bar{R} \\ \bar{R} = \{x | Ax \geq b, \sum_{i=1}^n X_i \leq M, x \geq 0\}, \end{cases}$$

由初始基础可行解  $x^0$  出发, 经过单纯形方法迭代, 求出它的基础最优解  $y^1$  (由于目标函数连续, 可行域有界闭集, 基础最优解必存在); (4) 若  $f_*(x^1)(y^1 - x^1) = 0$ , 转去执行 (7), 否则转去执行 (5); (5) 用一维搜索法求

$$\min f(x^1 + \lambda(y^1 - x^1)), \quad \lambda \in [0, 1]$$

的最优解  $\lambda_k \in [0, 1]$ ; (6) 求下一个迭代点  $x^{k+1} = x^k + \lambda_k(y^1 - x^k)$ , 令  $x^0 = y^1, k = k + 1$ , 转去执行

(3); (7) 若  $\sum_{i=1}^n x_i^k = M$ , 则令  $M = 2M, x^k = y^0$ , 转去执行 (2), 否则停机, 得到最优解  $x^k \approx x_{\max}$ 。

## 5 收敛分析

引理2 对于一般规划问题

$$(pp) \begin{cases} \min f(x), \\ s.t. \quad g(x) \geq 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

其中目标函数, 诸约束函数都是  $E_n$  上的连续可微函数, 则相应的 (KT) 问题是

$$(KT) \begin{cases} \varphi_*(x, u) = f_*(x) - u^T g_*(x) \geq 0, & x \geq 0, \\ \varphi_*(x, u)x = f_*(x)x - u^T g_*(x)x = 0, \\ \varphi_*(x, u) = -g(x) \leq 0, u \geq 0, \\ u^T \varphi_*(x, u) = -u^T g(x) = 0, \end{cases}$$

式中

$$\varphi(x, u) = f(x) - u^T g(x).$$

证明 (略)。

引理3 设目标函数  $f(x)$ , 约束函数  $g(x)$  都是  $E_n$  上的连续可微函数,  $\bar{x}$  为 (pp) 问题的最优解, 且在点  $\bar{x}$  处满足约束规格, 则存在  $\bar{u} \geq 0$ , 使  $(\bar{x}, \bar{u})$  为 (KT) 问题的解。

证明 (略)。

引理4 若  $f(x), -g_i(x), i = 1, 2, \dots, m$  都是  $E_n$  上的可微凸函数, 且  $(\bar{x}, \bar{u})$  是 (KT) 问题的解, 则  $\bar{x}$  是 (pp) 问题的最优解。

证明 (略)。

引理5 设目标函数  $f(x)$  连续, 且非线性规划问题

$$(NLP) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in R \\ R = \{x | Ax \geq b, x \geq 0\} \end{cases}$$

的最优解集  $R^*$  非空有界, 则存在正数  $M > 0$ , 使非线性规划问题

$$(\bar{p}) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \bar{R} = \{x | Ax \geq b, \sum_{i=1}^n x_i \leq M, x \geq 0\} \end{cases}$$

的最优解集  $\bar{R}^*$  也非空有界, 且  $\bar{R}^* = R^*$ 。

**证明** 首先证明  $R^*$  是一个闭集, 若  $R^*$  是一个有限点集, 它自然是一个闭集, 若  $R^*$  是一个无穷点集, 由于它有界, 自然存在极限点, 设  $\bar{x}^*$  是  $R^*$  中的任意一个极限点, 从  $R^*$  中取出一个收敛于  $\bar{x}^*$  的点列  $\{x^k\}$ , 由于  $x^k \in R^*$ , 于是对于任意点  $x \in R$ , 必有  $f(x^k) \leq f(x)$ , 让  $k \rightarrow \infty$ , 取极限, 并考虑到目标函数的连续性, 可知  $f(\bar{x}^*) \leq f(x)$ , 由于  $x$  为  $R$  中的任意点, 所以  $\bar{x}^* \in R^*$  因为  $\bar{x}^*$  是  $R^*$  的任意极限点, 由此推知  $R^*$  是一个有界闭集, 此外又知  $\sum_{i=1}^n x_i$  是  $R^*$  上的连续函数, 它在  $R^*$  上可以取到最大值, 今记  $M = \max_{x \in R^*} (\sum_{i=1}^n x_i) + 1$ , 这样, 我们就找到正数  $M > 0$ , 然后利用这个正数  $M$  和非线性规划问题 (NLP), 可以构造一个非线性规划问题

$$(\bar{p}) \begin{cases} \min f(x), \\ x \in \bar{R} \\ \bar{R} = \{x | Ax \geq b, \sum_{i=1}^n x_i \leq M, x \geq 0\} \end{cases}$$

下面证明, 非线性规划问题  $(\bar{p})$  的最优解集  $\bar{R}^* = R^*$ 。首先  $R^* \subseteq \bar{R}^*$ , 由于  $R^*$  非空, 所以  $\bar{R}^*$  亦非空, 于是存在  $x^* \in \bar{R}^*$ , 且  $x^* \in R^*$ , 此外任取  $\bar{x}^* \in \bar{R}^*$ , 自然有:  $f(\bar{x}^*) = f(x^*) \leq f(x)$ ,  $x \in R$ 。由此推知,  $\bar{R}^* \subseteq R^*$ , 即  $\bar{R}^* = R^*$ 。命题证毕。

**引理6** 设目标函数  $f(x)$  是可微凸函数,  $M_0 > 0$ , 非线性规划问题

$$(\bar{p}_0) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \bar{R} \\ \bar{R} = \{x | Ax \geq b, \sum_{i=1}^n x_i \leq M_0, x \geq 0\} \end{cases}$$

的最优解  $\bar{x} \in \bar{R}$ , 满足条件  $\sum_{i=1}^n \bar{x}_i < M_0$ , 则  $\bar{x}$  为非线性规划问题 (NLP) 的最优解。

**证明** 因  $\bar{x}$  是问题  $(\bar{p}_0)$  的最优解, 又问题  $(\bar{p}_0)$  的约束函数是线性函数, 因此在点  $\bar{x} \in \bar{R}$  处满足约束规格, 又因目标函数与约束函数皆连续可微, 由引理3知, 存在  $\bar{u} \geq 0$ ,  $\bar{u}_{m+1} \geq 0$ , 使得  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{m+1})$  满足 (KT) 条件, 即

$$\begin{aligned} f_x(\bar{x}) - [\bar{u}^T, \bar{u}_{m+1}] \begin{bmatrix} A \\ -e^T \end{bmatrix} &\geq 0 \quad (\bar{x} \geq 0), & f_x(\bar{x})\bar{x} - [\bar{u}^T, \bar{u}_{m+1}] \begin{bmatrix} A \\ -e^T \end{bmatrix} \bar{x} &= 0, \\ - (A\bar{x} - b) &\leq 0, \quad (\bar{u} \geq 0), & -\bar{u}^T (A\bar{x} - b) &= 0, \\ - (M_0 - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i) &\geq 0 \quad (\bar{u}_{m+1} \geq 0), & -\bar{u}_{m+1} (M_0 - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i) &= 0, \end{aligned}$$

式中  $e^T = [1, 1, \dots, 1] \in E_n$ , 因  $\sum_{i=1}^n \bar{x}_i < M_0$ , 由此推知  $\bar{u}_{m+1} = 0$ , 进而推知

$$\begin{aligned} f_x(\bar{x}) - \bar{u}^T A &\geq 0, \quad (\bar{x} \geq 0), & f_x(\bar{x})\bar{x} - \bar{u}^T A\bar{x} &= 0, \\ - (A\bar{x} - b) &\leq 0 \quad (\bar{u} \geq 0), & \bar{u}^T (A\bar{x} - b) &= 0. \end{aligned}$$

即 $(\bar{x}, \bar{u})$ 为(NLP)问题的(KT)问题的解,由于目标函数为可微凸函数,约束函数为线性函数,由引理4知, $\bar{x}$ 为(NLP)问题的最优解。

引理7 设目标函数为可微凸函数,为 $\bar{x}$ 线性规划问题

$$(LPO) \begin{cases} \min f_x(\bar{x})x \\ x \in \bar{R} \\ \bar{R} = \{x | Ax \geq b, \sum_{i=1}^n x_i \leq M_0, x \geq 0\} \end{cases}$$

的最优解,则 $\bar{x}$ 为非线性规划问题

$$(\bar{p}_0) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \bar{R} \\ \bar{R} = \{x | Ax \geq b, \sum_{i=1}^n x_i \leq M_0, x \geq 0\} \end{cases}$$

的最优解。

证明 由于 $\bar{x}$ 为线性规划问题(LPO)的最优解,又因(LPO)的约束函数都是线性函数,因此在 $\bar{x}$ 处满足约束规格,此外又知(LPO)的目标函数和约束函数都是连续可微函数,由引理3知,存在 $\bar{u} \geq 0, \bar{u}_{m+1} \geq 0$ ,使 $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{m+1})$ 为(LPO)的(KT)问题的解,即

$$\begin{aligned} f_x(\bar{x}) - [\bar{u}^T, \bar{u}_{m+1}] \begin{bmatrix} A \\ -e^T \end{bmatrix} \bar{x} &\geq 0 \quad (\bar{x} \geq 0), & f_x(\bar{x})\bar{x} - [\bar{u}^T, \bar{u}_{m+1}] \begin{bmatrix} A \\ -e^T \end{bmatrix} \bar{x} &= 0, \\ - (A\bar{x} - b) &\leq 0, \quad (\bar{u} \geq 0), & - \bar{u}^T (A\bar{x} - b) &= 0, \\ - (M_0 - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i) &\leq 0 \quad (\bar{u}_{m+1} \geq 0), & - \bar{u}_{m+1} (M_0 - \sum_{i=1}^n \bar{x}_i) &= 0, \end{aligned}$$

式中 $e^T = [1, 1, \dots, 1] \in E_n$ ,即 $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{u}_{m+1})$ 满足 $(\bar{p}_0)$ 问题的(KT)条件,又因目标函数是可微凸函数,约束函数是线性函数由引理4知, $\bar{x}$ 为问题 $(\bar{p}_0)$ 的最优解。

定理8 设目标函数是可微凸函数,(NLP)问题的最优解集 $R^*$ 非空有界,则采用线性逼近法可以求出(NLP)问题的最优解。

证明 在迭代点 $x^k$ 处,相应的线性规划问题

$$(LPK) \begin{cases} \min f_x(x^k)x \\ x \in \bar{R} \\ \bar{R} = \{x | Ax \geq b, \sum_{i=1}^n x_i \leq M, x \geq 0\} \end{cases}$$

必存在基础最优解 $y^k$ ,这是因为目标函数连续,约束集合 $\bar{R}$ 为有界闭集,从而存在最优解,进而存在基础最优解,如果存在 $k_0$ ,使得成立关系式 $f_x(x^{k_0})(y^{k_0} - x^{k_0}) = 0$ ,则 $x^{k_0}$ 为线性规划问题(LPK<sub>0</sub>)的最优解,由引理5,6,7知, $x^{k_0}$ 为非线性规划问题(NLP)的最优解,若不存在 $k$ ,使成立关系式 $f_x(x^k)(y^k - x^k) = 0$ ,则目标函数 $f(x)$ 在 $x^k$ 处存在可行下降方向 $y^k - x^k$ ,采用一维搜索法又可得到下一个迭代点 $x^{k+1} = x^k + \lambda_k(y^k - x^k)$ ,这样就得到无穷迭代点列 $\{x^k\}$ ,由于 $\{x^k\}$ 被包含在可行域 $\bar{R}$ 的极点的凸组合中,因此它是一个有界集,从而存在极限点,设 $x^\infty$ 是它的任意一个极限点,并存在子序列收敛于这个极限点,不妨设 $x^{k_1} \rightarrow x^\infty$ ,同理有 $y^{k_1} \rightarrow y^\infty, \lambda_{k_1} \rightarrow \lambda_\infty$ ,并且有。

$$\begin{aligned} f_x(x^k)x &\geq f_x(x^k)y^k, & x &\in \bar{R}, \\ f_x(x^k)(y^k - x^k) &< 0, & x^{k+1} &= x^k + \lambda_k(y^k - x^k). \end{aligned}$$

让  $k_1 \rightarrow \infty$ , 考虑到目标函数连续可微, 于是有

$$\begin{aligned} f_z(x^\infty)x &\geq f_z(x^\infty)y^\infty, \quad x \in \bar{R}, \\ f_z(x^\infty)(y^\infty - x^\infty) &\leq 0, \quad x^{\infty+1} = x^\infty + \lambda_\infty(y^\infty - x^\infty). \end{aligned}$$

易证  $f_z(x^\infty)(y^\infty - x^\infty) = 0$ , 由此推知  $x^\infty$  为线性规划问题  $(L_{F_\infty})$  的最优解。

## 6 结论

因为问题(NLP)的目标函数  $\rho^2(\omega, r)$  是  $\omega, r$  的连续可微函数, 且约束集合  $R = \{\omega, r | 0 \leq \omega \leq a, 0 \leq r \leq b\}$  是一个有界闭集, 因此其最优解集  $R^*$  必是一非空有界集, 由定理8知, 采用线性逼近法求解, 至少可以求出它的(KT)点, 如果目标函数是凸函数, 便可以求出它的最优点  $(\omega, r)_{op}$ 。

## 7 计算实例

采用本文所列出的算法, 求解具有线性约束的非线性规划问题。

$$\begin{aligned} \text{例1 } \min \quad & f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_1 - 3x_2 - 5x_3, \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

引入松弛变量  $x_4, x_5 \geq 0$ , 并取初始点  $x(0) = [0, 0, 0, 5, 6]^T$ , 然后构造相应的线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 - 3x_2 - 5x_3, \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_4 = 5, \quad 3x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

经过10次迭代, 在精度为  $E = 10^{-4}$  条件下, 得到原始规划问题的近似最优解为

$$x^* = [0, 0.4001, 0.7001]^T.$$

例2 对于所给线性代数方程组  $Ax = b$ ,

其中,

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 6 & 3 & 12 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 20 \\ 33 \\ 36 \end{bmatrix}.$$

1) 构造 GAOR 迭代

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= [D_1 - r(D_2 + C_1)]^{-1} [(1 - \omega)D_1 + (\omega - r)(D_2 + C_1) + \omega(D_3 + C_2)]x^k \\ &\quad + \omega[D_1 - r(D_2 + C_1)]^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} A &= D_A - C_1 - C_2, D_1 - D_2 - D_3 = D_A, D_A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \\ -C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}, -C_2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\det(D_1) \neq 0, D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$r, \omega \in E, \omega \neq 0, \det(D_1 - rD_2) = r^2 \neq 0.$$

## 2) GAOR 的迭代矩阵

$$L_{\omega}, r = [D_1 - r(D_2 + C_1)]^{-1}[(1 - \omega)D_1 + (\omega - r)(D_2 + C_1) + \omega(D_3 + C_1)]$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(r, \omega) & a_{12}(r, \omega) & a_{13}(r, \omega) \\ a_{21}(r, \omega) & a_{22}(r, \omega) & a_{23}(r, \omega) \\ a_{31}(r, \omega) & a_{32}(r, \omega) & a_{33}(r, \omega) \end{bmatrix},$$

其中

$$a_{11}(r, \omega) = 1 - \frac{8\omega}{9-r}, \quad a_{12}(r, \omega) = \frac{3\omega}{9-r},$$

$$a_{13}(r, \omega) = -\frac{2\omega}{9-r}, \quad a_{21}(r, \omega) = \frac{3\omega(r-1)}{9-r},$$

$$a_{22}(r, \omega) = \frac{\omega(9-13r)}{12(9-r)} + (1-\omega),$$

$$a_{23}(r, \omega) = \frac{\omega(7r+9)}{12(9-r)},$$

$$a_{31}(r, \omega) = \frac{\omega(-9r^2+58r-9)}{13(9-r)}$$

$$a_{32}(r, \omega) = \frac{3r\omega(r-6)}{13(9-r)} + \frac{\omega(11r-12)}{52},$$

$$a_{33}(r, \omega) = -\frac{12r\omega(r-6)}{13(9-r)} - \frac{r\omega}{52} + \frac{\omega}{13} + (1-\omega).$$

## 3) 暂时固定 $\omega, r$ , 计算迭代矩阵特征值

设特征值为  $\lambda$ , 相应的特征向量为  $X \neq 0$ , 于是有  $L_{\omega, r}X = \lambda X$ , 由此推知  $|L_{\omega, r} - \lambda I| = 0$ , 其特征方程为

$$\lambda^3 - P_1\lambda^2 + P_2\lambda - P_3 = 0,$$

其中

$$P_1 = a_{11}(r, \omega) + a_{22}(r, \omega) + a_{33}(r, \omega),$$

$$P_2 = \begin{vmatrix} a_{11}(r, \omega) & a_{12}(r, \omega) \\ a_{21}(r, \omega) & a_{22}(r, \omega) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}(r, \omega) & a_{23}(r, \omega) \\ a_{32}(r, \omega) & a_{33}(r, \omega) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(r, \omega) & a_{13}(r, \omega) \\ a_{31}(r, \omega) & a_{33}(r, \omega) \end{vmatrix},$$

$$P_3 = \begin{vmatrix} a_{11}(r, \omega) & a_{12}(r, \omega) & a_{13}(r, \omega) \\ a_{21}(r, \omega) & a_{22}(r, \omega) & a_{23}(r, \omega) \\ a_{31}(r, \omega) & a_{32}(r, \omega) & a_{33}(r, \omega) \end{vmatrix}.$$

这是一个实系数的三次方程, 令  $\lambda = \mu + p_1/3$ , 可转化成缺平方项的实系数三次方程  $\mu^3 + p_1\mu + q = 0$  其中  $p = p_2 - p_1^2/3, q = p_1p_2/3 - 2p_1^3/27 - p_3$ , 按卡当公式求解可得:  $\mu_1 = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}, \mu_2 = \varepsilon \sqrt[3]{A} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{B}, \mu_3 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{A} + \varepsilon \sqrt[3]{B}$ , 其中  $A = -q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}, B = -q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}, \varepsilon = (-1 + i\sqrt{3})/2$ , 而  $\lambda_1 = \mu_1 + p_1/3, \lambda_2 = \mu_2 + p_1/3, \lambda_3 = \mu_3 + p_1/3$ . (因为  $\varepsilon$  是三次单位根所以乘  $\varepsilon$  相当于旋转  $120^\circ$ , 乘  $\varepsilon^2$  相当于旋转  $240^\circ$ , 从而  $\mu_1$  按模最大), 今构造具有线性约

束的非线性规划问题

$$\begin{cases} \min & \lambda_1 = \mu_1 + p_1/3, \\ \text{s.t.} & 0 < r, \omega < 2. \end{cases}$$

再按例1方法求最优解。

### 参 考 文 献

- [1] Hadjilinos, A., Psimarni, A. and Yeyios, A., *LAA*, 75, (1986), 117—132.
- [2] 魏权龄, 王日爽等, 数学规划与优化设计, 国防工业出版社, (1984).

## The Determination of the Optimal Iterative Parameter for a Certain kind of Problems

Cai Huoying

(Department of Management Information Science)

**Abstract** This paper points out the way to choose the optimal iterative parameter for a certain kind of problems, and demonstrates its convergence.

**Key words** feasible direction, optimal iterative parameter, convergence