

拟线性退缩抛物型方程解的 弱最大值原理和渐近性

梁 学 信

(管理信息科学系)

摘要 考虑拟线性退缩抛物型方程的初边值问题(1),(2),证明广义解的弱最大值原理成立。并得到解的衰减估计。

关键词 抛物型方程, 广义解, 弱最大值原理, 渐近性

0 引言

本文考虑拟线性退缩抛物型方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta(|u|^m u) = f(x, t, u, \nabla u), & \text{在 } Q_T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad |u|_\infty = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

其中常数 $m > 0$, Ω 是 n 维欧氏空间的有界域, 边界为 $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$ 。

当 f 关于 u 的增长阶为 $\alpha + 1$, 在 $\alpha > m$, 且初值适当大时, 解会在有限时间内发生 blow-up^[1]。Nakao 在文[2]中证明了方程的右端 $|f(x, u)| \leq k_0 |u|^{\alpha+1}$, 即使在 $\alpha > m$ 下, 只要初值适当小, 整体解存在, 且有形为 $|u(x, t)| \leq c(1+t)^{-\frac{1}{m}}$ 的衰减估计。文[3]讨论方程 $u_t = \Delta\phi(u)$ 和 $(\beta(u))_t = \Delta u - \gamma(u)$ 的初边值问题正解的渐近性, 有类似的估计式。本文讨论 f 同时含有未知函数 u , u 的一阶导数 ∇u , 及已知函数的情况, 先继续文[4, 5]的工作, 证明广义解的弱最大值原理成立。其次证明小初值或某些情况下一般初值时, 问题(1),(2)的解有衰减估计式 $|u(x, t)| \leq c(1+t)^{-\frac{1}{m}}$, 且对某些 f , 有 $c = \max_{\bar{\Omega}} |u_0(x)|$ 。

1 引理及定义

记 $\|u\|$, 为 $u \in L^1(\Omega)$ 的范数。 $W^{1,p}(\Omega)$ 是通常的 Sobolev 空间。 $L^1((0, T); L^1(\Omega))$ 是范数为

· 本文 1990—03—01 收到。

* 福建省科学基金资助课题。

$$\|u\|_{p,q,T} = \left[\int_0^T \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{q/p} dt \right]^{1/q}, \quad p, q \geq 1$$

的函数空间。 $p=q$ 时,范数记为 $\|u\|_{p,q,T}$ 。 $L^\infty((0,\infty);L^p(\Omega))$ 是以

$$\|u\|_{p,\infty,T} = \text{vrai max}_{0 \leq t \leq T} \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}$$

为范数的函数空间。 $L^2((0,T);W^{1,2}(\Omega))$ 是以

$$\|\nabla u\|_{2,q,T} = \left(\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt \right)^{1/2}$$

为范数的函数空间。

引理 1⁽²⁾ 设 $|u|^r u \in W^{1,r}(\Omega)$, $r > 0, p > 1$, 那么

$$\|u\|_r \leq c \|u\|_1^{1-\theta} \|\nabla(|u|^r u)\|_p^{\theta/(r+1)} \quad (3)$$

其中 c 不依赖于 Ω . $\theta = (\gamma+1)(r^{-1}-q^{-1})[n^{-1}-p^{-1}+(\gamma+1)r^{-1}]^{-1}$, $q \geq \gamma+1$, 和 (i) $n > p$ 时, $1 \leq r \leq q \leq \frac{(\gamma+1)np}{n-p}$; (ii) $n = p > 1$ 时, $1 \leq r \leq q < \infty$; (iii) $1 \leq n < p$ 时, $1 \leq r \leq q \leq \infty$.

引理 2 设 $|u|^{\frac{m}{2}} u \in L^\infty((0,T);L^{\frac{4}{m+2}}(\Omega)) \cap L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))$, 则 $u(x,t) \in L^l(Q_T)$, $l = m+2+4/n$, $m \geq 0$, 且

$$\left(\int_0^T \int_{\Omega} |u|^{m+2+\frac{4}{n}} dx dt \right)^{1/(1+\frac{2}{n})} \leq c \left\{ \text{vrai max}_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla(|u|^{\frac{m}{2}} u)|^2 dx dt \right\}, \quad (4)$$

其中常数 c 不依赖于 u .

证 记 $v = |u|^{\frac{m}{2}} u$, 并用 Hölder 不等式得

$$\int_{\Omega} |u|^{m+2+\frac{4}{n}} dx = \int_{\Omega} |v|^{2(1+\frac{4}{n(m+2)})} dx \leq \left(\int_{\Omega} |v|^{\frac{2n}{n+2}} dx \right)^{1-\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega} |v|^{\frac{4}{n+2}} dx \right)^{\frac{2}{n}},$$

再用 Sobolev 不等式得

$$\int_{\Omega} |u|^{m+2+\frac{4}{n}} dx \leq c_0 \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) \left(\int_{\Omega} |v|^{\frac{4}{n+2}} dx \right)^{\frac{2}{n}},$$

对 t 积分,并用 Young 不等式得

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |u|^{m+2+\frac{4}{n}} dx dt &\leq c_0 \left(\text{vrai max}_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} |v|^{\frac{4}{n+2}} dx \right)^{\frac{2}{n}} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dt \\ &\leq c^{1+\frac{2}{n}} \left\{ \left(\text{vrai max}_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} |v|^{\frac{4}{n+2}} dx \right)^{1+\frac{2}{n}} + \left(\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dt \right)^{1+\frac{2}{n}} \right\} \\ &\leq c^{1+\frac{2}{n}} \left\{ \text{vrai max}_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} |v|^{\frac{4}{n+2}} dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dt \right\}^{1+\frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

将右端的 v 换回到 u ,便得所求的不等式。

引理 3 记 $U = \max(1, \|u(0)\|_\infty, \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_r)$, 如果对任意的 $r > d$, $u(x,t)$ 满足不等式

$$U_{2r-d} \leq (Cr^\theta)^{\frac{1}{2}} U^{1+\sigma(r)}, \quad (5)$$

其中 $c > 0, d > 0, \theta \geq 0$ 是常数, $0 \leq \sigma(r) \leq c/r$, 那么存在与 u 无关的常数 $\delta > 0, \rho > 0$, 及 $k(r)$ 使 $\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_\infty \leq c^\delta k(r) U^\rho$.

证 取 r 满足 $r_\nu = 2^\nu(r-d)+d$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$, 那么由式(5)做迭代得

$$U_{r_{\nu+1}} \leq C^\delta k_\nu(r) U_{r_\nu}^\rho, \quad (6)$$

其中, $\rho_\nu = [(1+\sigma(r))][1+\sigma(r_1)] \cdots [1+\sigma(r_\nu)]$, 因为

$$\ln \rho_n = \sum_{i=0}^n \ln[1 + \sigma(r_i)] < \sum_{i=0}^n \sigma(r_i) \leq c \sum_{i=0}^n \frac{1}{r_i} < \frac{c}{r-d} \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} < \frac{2c}{r-d},$$

所以 $n \rightarrow \infty$ 时, $\ln \rho_n$ 收敛, 从而 ρ_n 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho$.

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{1}{r_n} + \frac{1 + \sigma(r_n)}{r_{n-1}} + \dots + \frac{[1 + \sigma(r_n)] \dots [1 + \sigma(r_1)]}{r} \\ &< \rho \sum_{i=0}^n \frac{1}{r_i} < \frac{\rho}{r-d} \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} < \frac{2\rho}{r-d}. \end{aligned}$$

所以 $n \rightarrow \infty$ 时, δ_n 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \delta$,

$$\begin{aligned} k_n(r) &= r_n^{\theta/r_n} r_{n-1}^{\theta/[1+\sigma(r_n)]} \dots r_1^{\theta/[1+\sigma(r_1)]} \\ &< (r_n^{1/r_n} r_{n-1}^{1/[1+\sigma(r_n)]} \dots r_1^{1/[1+\sigma(r_1)]})^{\theta} \\ &< [(2^{\theta} r)^{1/r_n} (2^{\theta-1} r)^{1/r_{n-1}} \dots r^{1/r_1}]^{\theta} \\ &= (2^{\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i}} r^{\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i}})^{\theta} \end{aligned}$$

所以 $n \rightarrow \infty$ 时, $k_n(r)$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(r) = k(r)$, 对式(6)取极限, 便得结论.

定义 设 $|u|^{\frac{1}{2}}u \in L^\infty((0, T); L^{\frac{4}{m+1}}(\Omega)) \cap L^2((0, T); W^{1,2}(\Omega))$ 如果对任意 $\varphi \in C^1(0, T); W^{1,2}(\Omega)$ 积分恒等式

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_\Omega \{-u\varphi_t + \nabla \varphi \cdot \nabla(|u|^{\frac{1}{2}}u) - f(x, t, u, \nabla u)\varphi\} dx dt \\ &+ \int_\Omega u(x, t)\varphi(x, t)|_{t=0} dx = 0, \quad \forall t \in (0, T), \end{aligned} \quad (7)$$

成立, 则称 $u(x, t)$ 是问题(1), (2)的广义解.

2 弱最大值原理

设 $f(x, t, u, \xi)$ 在 $Q_T \times R^1 \times R^n$ 上定义, 并且当 u, ξ 固定时, 关于 x, t 为可测函数, 当 x, t 固定时, 关于 u, ξ 为连续. 此外, 设 $f(x, t, u, \xi)$ 满足下面结构条件

$$|f(x, t, u, \xi)| \leq b(x, t)|u|^{\alpha+1} + d(x, t)|\xi|^p, \quad (8)$$

其中常数 $\alpha > m > 0, m+1 < \beta < 2$

定理 1 设 f 满足结构条件(8), 且

$$b(x, t) \in L^q(Q_T), \quad q > \frac{n(m+2)}{2} + 2,$$

$$d(x, t) \in L^{r_0}(Q_T), \quad r_0 > \frac{n+2}{2-\beta},$$

$$|u|^{\frac{1}{2}}u \in L^\infty((0, T); L^{\frac{4}{m+1}}(\Omega)) \cap L^2((0, T); W^{1,2}(\Omega)) \cap L^p(Q_T)$$

和 $u(x, t)$ 满足方程(7). 其中

$$\begin{aligned} p = \max(\lambda_1, \lambda_2) &= \max\left\{\frac{q[n(\alpha-m)(m+2+4/n)+2m]}{2q-n(m+2+4/n)}, \right. \\ &\quad \left. \frac{r_0(n+2)(\beta-m-1)+mr_0(2-\beta)}{r_0(2-\beta)-(n+2)}\right\}. \end{aligned}$$

如果 $\max_{\bar{Q}} u_0(x) = M_0, M_0 \geq 0$, 那么 $\max_{Q_T} u(x, t) \leq M_0, \forall T > 0$; 如果 $\min_{\bar{Q}} u_0(x) = M_1, M_1 \leq 0$, 那么 $\min_{Q_T} u(x, t) \geq M_1, \forall T > 0$.

证 用反证法证, 设结论不真, 那么 $M = \max_{Q_T} u(x, t) > M_0$, 我们证明引出矛盾. 设 $0 \leq M_0 < k < M$, 记 $(u-k)^+ = \max(u-k, 0)$ 那么 $(u-k)^+ = 0$, 在 $\Omega \times \{t=0\}$, 先设 u_t 存在, 那么在式 (7) 中取 $\varphi = (u-k)^+$ 作试验函数, 并将第一项分部积分得

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} (u-k)^+ u_t dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} \nabla (u-k)^+ \cdot \nabla (|u|^{\frac{n}{2}} u) dx dt \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} f(x, t, u, \nabla u) (u-k)^+ dx dt, \end{aligned}$$

应用结构条件 (8) 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |(u-k)^+|^2 dx + \frac{4(m+1)}{(m+2)^2} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla (|u|^{\frac{n}{2}} u)|^2 dx dt \\ & \leq \int_0^t \int_{\Omega} (b(x, t) |u|^{q+1} + d(x, t) |\nabla u|^p) (u-k)^+ dx dt. \end{aligned} \quad (9)$$

因式 (9) 各项都非负, 对 t 取上确界, 不等号仍保持, 且积分的有效区域实际只是 $A = A(k) \setminus A(M)$, 其中, $A(k) = Q_T \cap \{u(x, t) > k\}$.

用 Hölder 不等式, 式 (9) 右端第一项有

$$\begin{aligned} & \int_A b(x, t) |u|^{q+1} (u-k)^+ dx dt \\ &= \int_A b(x, t) |u|^{q-m+\frac{2m}{n(m+2+4/n)}} \cdot |u|^{\frac{(m+1+2/n)(m+2)}{m+2+4/n}} (u-k)^+ dx dt \\ &\leq \|b\|_{l, A} \|u\|_{\lambda_1, A}^{q-m+\frac{2m}{n(m+2+4/n)}} \left(\int_A |u|^{m+2} dx dt \right)^{\frac{m+1+2/n}{m+2+4/n}} \\ &\quad \cdot \left(\int_A |(u-k)^+|^{m+2+4/n} dx dt \right)^{\frac{1}{m+2+4/n}}, \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\lambda_1 = q[n(\alpha-m)(m+2+4/n)+2m]/[2q-n(m+2+4/n)]$.

用引理 2, 式 (10) 右端的

$$\begin{aligned} & \left(\int_A |(u-k)^+|^{m+2+4/n} dx dt \right)^{\frac{1}{m+2+4/n}} \\ & \leq C \left\{ \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} |(u-k)^+|^2 dx + \int_A |\nabla (|u-k)^+|^{\frac{n}{2}} (u-k)^+|^2 dx dt \right\} \\ & \leq C \left\{ \operatorname{vrai} \max_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} |(u-k)^+|^2 dx + \int_A |\nabla (|u|^{\frac{n}{2}} u)|^2 dx dt \right\} \\ & \stackrel{(2)}{=} CI. \end{aligned} \quad (11)$$

用嵌入定理, 式 (10) 右端的

$$\int_A |u|^{m+2} dx dt \leq C \int_A |\nabla (|u|^{\frac{n}{2}} u)|^2 dx dt \leq CI. \quad (12)$$

以 (11), (12) 代入 (10) 的右端得

$$\int_A b(x, t) |u|^{q+1} (u-k)^+ dx dt \leq C \|b\|_{l, Q_T} \|u\|_{\lambda_1, A}^{q-m+\frac{2m}{n(m+2+4/n)}} I. \quad (13)$$

用 Hölder 不等式, 嵌入定理及引理 2, 式 (9) 右边的第二项

$$\begin{aligned}
& \int_A d(x, t) |\nabla u|^\beta (u - k)^+ dx dt \\
& \leq \int_A d(x, t) |u|^{\beta-m-1+\frac{m(2-\beta)}{n+2}} \cdot |u|^{\frac{m\beta}{2}} |\nabla u|^\beta (u - k)^+ + \frac{(n(m+2)+4)(2-\beta)}{2(n+2)} dx dt \\
& \leq \frac{4}{(m+2)^2} \|d\|_{r_0, A} \|u\|_{\lambda_1, A}^{\beta-m-1+\frac{m(2-\beta)}{n+2}} \|\nabla(|u|^{\frac{m}{2}} u)\|_2^2 \left(\int_A |(u - k)^+|^{\frac{n(2-\beta)}{2(n+2)}} dx dt \right)^{\frac{n(2-\beta)}{2(n+2)}} \\
& \leq C \|d\|_{r_0, Q_T} \|u\|_{\lambda_1, A}^{\beta-m-1+\frac{m(2-\beta)}{n+2}} I^{\frac{\beta}{2}} \cdot I^{\frac{2-\beta}{2}} \\
& = C \|d\|_{r_0, Q_T} \|u\|_{\lambda_1, A}^{\beta-m-1+\frac{m(2-\beta)}{n+2}} I, \tag{14}
\end{aligned}$$

其中 $\lambda_2 = [r_0(n+2)(\beta-m-1) + mr_0(2-\beta)]/[r_0(2-\beta) - (n+2)]$ 又因 $[4(m+1)/(m+2)^2] > \frac{1}{2}$ ($0 \leq m < 1$), 所以将式(13), (14)代入式(9), 并约去 I 得

$$\frac{1}{2} \leq C(\|b\|_{r, Q_T} \|u\|_{\lambda_1, A}^{\beta-m-1+\frac{2m}{n(m+2)+4}} + \|d\|_{r_0, Q_T} \|u\|_{\lambda_2, A}^{\beta-m-1+\frac{m(2-\beta)}{n+2}}), \tag{15}$$

因 $u \in L^1(Q_T) \cap L^2(Q_T)$, 及 $\text{mes}(A(k) \setminus A(M)) \rightarrow 0$, 当 $k \rightarrow M$. 由 Lebesgue 积分的绝对连续性, 当 $k \rightarrow M$ 时, 式(15)右端趋于0, 由此得到矛盾.

从以上的证明看出, 只要式(9)成立, 那么定理正确, 而不必假定 u_i 存在. 而只要 u 是定理中所给函数, 经过极限过程, 可证式(9)成立^[6].

以 $-u$ 代替 u , 重复上面的证明, 便得定理第二部分的结论. 综合定理的两个结论, 得

$$\max_{Q_T} |u(x, t)| \leq \max_Q |u_0(x)|, \forall T > 0. \tag{16}$$

当 $\beta=1, m=0$ 时, 定理1仍成立. 因这时式(9)变为

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_Q |(u - k)^+|^2 dx + \iint_A |\nabla u|^2 dx dt \\
& \leq \iint_A (b(x, t) |u|^{\alpha+1} + d(x, t) |\nabla u|)(u - k)^+ dx dt. \tag{17}
\end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}
& \iint_A b(x, t) |u|^{\alpha+1} (u - k)^+ dx dt \\
& \leq C \|b\|_{r, A} \|u\|_{\lambda_1, A}^\alpha \left(\text{vrai} \max_{0 \leq k \leq r} \int_Q |(u - k)^+|^2 dx + \iint_A |\nabla u|^2 dx dt \right) \\
& = C \|b\|_{r, Q_T} \|u\|_{\lambda_1, A}^\alpha J \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \iint_A d(x, t) |\nabla u| (u - k)^+ dx dt \\
& \leq \|d\|_{r_0, A} \left(\iint_A |\nabla u|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_A |(u - k)^+|^{2(1+\frac{2}{r_0})} dx dt \right)^{\frac{1}{2(1+\frac{2}{r_0})}} (\text{mes} A)^{\frac{1}{r_0+2}-\frac{1}{r_0}} \\
& \leq c \|b\|_{r_0, Q_T} (\text{mes} A)^{\frac{1}{r_0+2}-\frac{1}{r_0}} J \text{ (由引理 2)}. \tag{19}
\end{aligned}$$

将式(18), (19)代入式(17), 类似地有

$$\frac{1}{2} \leq C[\|b\|_{r, Q_T} \|u\|_{\lambda_1, A}^\alpha + \|d\|_{r_0, Q_T} (\text{mes} A)^{\frac{1}{r_0+2}-\frac{1}{r_0}}]. \tag{20}$$

因 $r_0 > n+2$, 及 $\text{mes} A \rightarrow 0$, 当 $k \rightarrow M$, 所以, 令 $k \rightarrow M$, 由式(20)便得矛盾.

3 解的衰减估计

引理4 设 $f(x, t, u, \xi)$ 满足结构条件(8), 且

$$b(x, t) \in L^\infty((0, \infty); L^{q_0}(\Omega)), \quad \|b\|_{q_0} \leq \delta_1, \quad q_0 > n/2,$$

$$d(x, t) \in L^\infty((0, \infty); L^{r_1}(\Omega)), \quad \|d\|_{r_1} \leq \delta_2, \quad r_1 > n/(2-\beta), \quad u_0(x) \in L^{p_0+m+2}(\Omega).$$

其中 $p_0 > \max\{\frac{q_0(\alpha-m)}{2q_0-n}-2, \frac{nr_1(\beta-m-1)}{r_1(2-\beta)-n}-2\}$, 那么存在常数 c_1 和 c_2 , 使对方程(1)的解, 当

$$c_1 \delta_1 \|u_0\|_{p_0+m+2}^{p_0-m} + c_2 \delta_2 \|u_0\|_{p_0+m+2}^{p_0-m-1} < \frac{4(m+1)(p_0+1)}{(p_0+m+2)^2}$$

满足时, 有

$$\|u(t)\|_{p_0+m+2} \leq c(1+t)^{-\frac{1}{m}}, \quad \forall t > 0, \quad (21)$$

$$\|u\|_{p_0+m+2, Q_T} \leq c, \quad \forall T > 0, \quad (22)$$

其中 c_1, c_2 将在证明中给出, c 不依赖 T .

证 以 $|u|^{p_0+m}$ 乘程(1)两边, 在 Ω 积分, 将第二项分部积分, 并利用结构条件(8)得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p_0+2} \frac{d}{dt} \|u\|_{p_0+m+2}^{p_0+m+2} + \frac{4(m+1)(p_0+1)}{(p_0+m+2)^2} \|\nabla(|u|^{\frac{p_0+m}{2}} u)\|_2^2 \\ & \leq \int_{\Omega} b(x, t) |u|^{p_0+m+2} dx + \int_{\Omega} d(x, t) |u|^{p_0+m+1} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned} \quad (23)$$

用 Hölder 不等式及引理1, 式(23)右边

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b(x, t) |u|^{p_0+m+2} dx \\ & \leq \|b\|_{q_0} \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{q_0(p_0+m+2)}{q_0-1-\frac{1}{p_0+m}}} dx \right)^{1-\frac{1}{q_0}} \\ & \leq c \|b\|_{q_0} (\|u\|_{p_0+m+2}^{p_0-m} \|\nabla(|u|^{\frac{p_0+m}{2}} u)\|_2^{\frac{2\theta}{p_0+m+2}})^{p_0+m+2}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $\theta = \frac{p_0+m+2}{p_0+m+2} \frac{n(q_0\alpha+p_0+2)}{q_0(2(p_0+2)+nm)}$, 因 $p_0 > \frac{nq_0(\alpha-m)}{2q_0-n}-2$, 所以 $0 < \theta < \frac{p_0+m+2}{p_0+m+2}, (1-\theta)(p_0+m+2) > \alpha-m$. 又根据嵌入定理, 有

$$\|u\|_{p_0+m+2} \leq c \|\nabla(|u|^{\frac{p_0+m}{2}} u)\|_2^{\frac{2}{p_0+m+2}}, \quad (25)$$

以式(25)代入式(24)便得

$$\int_{\Omega} b(x, t) |u|^{p_0+m+2} dx \leq c_i \|b\|_{q_0} \|u\|_{p_0+m+2}^{p_0-m} \|\nabla(|u|^{\frac{p_0+m}{2}} u)\|_2^2. \quad (26)$$

用 Hölder 不等式及引理1, 式(23)右边的

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} d(x, t) |u|^{p_0+m+1} |\nabla u|^2 dx \\ & \leq \|b\|_{r_1} \left(\int_{\Omega} |u|^{p_0+m} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{r_1}{2}} \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{r_1(p_0(2-\beta)+2-m\beta)}{r_1(2-\beta)-2}} dx \right)^{\frac{r_1(2-\beta)-2}{2r_1}} \\ & \leq \frac{4}{(p_0+m+2)^2} \|d\|_{r_1} \|\nabla(|u|^{\frac{p_0+m}{2}} u)\|_2^2 \\ & \quad \cdot (c \|u\|_{p_0+m+2}^{p_0-m} \|\nabla(|u|^{\frac{p_0+m}{2}} u)\|_2^{\frac{2\theta}{p_0+m+2}})^{\frac{p_0(2-\beta)+2-m\beta}{2}} \end{aligned} \quad (27)$$

其中 $\theta_1 = \frac{(p_0+m+2)(2-\beta)}{p_0(2-\beta)+2-m\beta} \cdot \frac{n[2(p_0+2)+\gamma_1(2\beta-2-m\beta)]}{(2-\beta)[2(p_0+2)+nm]}$, 因 $p_0 > \frac{n\gamma_1(\beta-m-1)}{\gamma_1(2-\beta)-n} - 2$, 所以

$$0 < \theta_1 < \frac{(p_0+m+2)(2-\beta)}{p_0(2-\beta)+2-m\beta}, \quad \frac{(1-\theta_1)[p_0(2-\beta)+2-m\beta]}{2} < \beta-m-1,$$

再用嵌入定理, 由式(27)得

$$\int_{\Omega} d(x,t) |u|^{\frac{p_0+m}{2}} |\nabla u|^2 dx \leq c_2 \|d\|_{\gamma_1} \|u\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} \|\nabla(|u|^{\frac{p_0+m}{2}} u)\|_{\frac{2}{3}}^2. \quad (28)$$

将式(26), (28)代入式(23)便得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} \\ & \leq (p_0+2) \left[-\frac{4(m+1)(p_0+1)}{(p_0+m+2)^2} + c_1 \|b\|_{\gamma_0} \|u\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} + c_2 \|d\|_{\gamma_1} \|u\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} \right] \\ & \cdot \|\nabla(|u|^{\frac{p_0+m}{2}} u)\|_{\frac{2}{3}}^2 \leq (p_0+2) \left[-\frac{4(m+1)(p_0+1)}{(p_0+m+2)^2} + c_1 \delta_1 \|u\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} + c_2 \delta_2 \|u\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} \right] \cdot \\ & \|\nabla(|u|^{\frac{p_0+m}{2}} u)\|_{\frac{2}{3}}^2. \end{aligned} \quad (29)$$

如果初值 $u_0(x)$ 满足

$$c_1 \delta_1 \|u_0\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} + c_2 \delta_2 \|u_0\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} < \frac{4(m+1)(p_0+1)}{(p_0+m+2)^2},$$

那么, 由式(29)知, 存在 t_1 , 当 $t \in [0, t_1]$ 时

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} < 0, \quad t \in [0, t_1],$$

所以

$$\|u\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} < \|u_0\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}}, \quad t \in [0, t_1].$$

从 t_1 开始, 重复上述作法, 并继续下去, 得

$$\forall \text{rai} \max_{\Omega} \int_{\Omega} |u|^{\frac{p_0+m}{2}} dx < \int_{\Omega} |u_0|^{\frac{p_0+m}{2}} dx, \quad (30)$$

由此, 再用嵌入定理, 由式(29)得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|u\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} \\ & < c_0 \left[-\frac{4(m+1)(p_0+1)}{(p_0+m+2)^2} + c_1 \delta_1 \|u_0\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} + c_2 \delta_2 \|u_0\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} \right] \|u\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}+2} \\ & = -c \|u\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}+2} \quad (c > 0), \end{aligned} \quad (31)$$

对 t 积分, 便得式(21)。

再由 $\|u\|_{p_0+m+2}$ 的单调性, 类似地, 由式(29)得

$$\int_0^T \|\nabla(|u|^{\frac{p_0+m}{2}} u)\|_{\frac{2}{3}}^2 dt \leq c, \quad \forall T > 0, c \text{ 不依赖 } T.$$

类似于式(26)的推导, 可证

$$\|u\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} \leq c \|u\|_{p_0+m+2}^{\frac{p_0+m}{2}} \|\nabla(|u|^{\frac{p_0+m}{2}} u)\|_{\frac{2}{3}},$$

再由式(30)知, 上式对 t 积分便得式(22), 证毕。

定理2 设引理4的条件满足, 且 $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$, 那么存在常数 c , 使

$$\|u(t)\|_\infty \leq c(1+t)^{-\frac{1}{2}}.$$

证 设 $u = (1+t)^{-\frac{1}{m}}v$, $\tau = \ln(1+t)$, 则问题(1),(2)变为

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \Delta(|v|^m v) = \frac{v}{m} + f(x, e^\tau - 1, ve^{-\frac{\tau}{m}}, \nabla ve^{-\frac{\tau}{m}}) e^{\frac{(1+m)\tau}{m}}, \\ v|_{\infty} = 0, \quad v(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (1')$$

$$v|_{\infty} = 0, \quad v(x, 0) = u_0(x), \quad (2')$$

$$\begin{aligned} & |f(x, e^\tau - 1, ve^{-\frac{\tau}{m}}, \nabla ve^{-\frac{\tau}{m}}) e^{\frac{(1+m)\tau}{m}}| \\ & \leq b(x, t) |v|^{m+1} e^{-\frac{m}{m}\tau} + d(x, t) |\nabla v|^p e^{-\frac{p}{m}\tau} \\ & \leq b(x, t) |v|^{m+1} + d(x, t) |\nabla v|^p. \end{aligned} \quad (31)$$

先用引理3和引理4证明 $\|v\|_\infty \leq c$. 为此取 $p > \max(p_0, \frac{nq_1(h-m)}{2q_1-n})$, 其中 $q_1 = \frac{r_1(2-\beta)}{2} > \frac{n}{2}$, $h =$

$\frac{2\beta-2-\beta}{2-\beta} > m$ 以 $|v|^p$ 乘(1'), 在 Ω 积分, 由结构条件(31)得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p+2} \frac{d}{dt} \|v\|_{p+2}^2 + \frac{4(m+1)(p+1)}{(p+m+2)^2} \|\nabla(|v|^{\frac{p+m}{2}} v)\|_2^2 \\ & \leq \int_{\Omega} b(x, t) |v|^{p+m+2} dx + \int_{\Omega} d(x, t) |v|^{p+1} |\nabla v|^p dx + \int_{\Omega} \frac{1}{m} |v|^{p+2} dx. \end{aligned} \quad (32)$$

用 Hölder 不等式及嵌入定理得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b(x, t) |v|^{p+m+2} dx \leq \|b\|_{q_0} \|v\|_{\frac{p+m+2}{2}}^{p_1} \|v\|_{\frac{p+m+2}{2}}^{p_2} \\ & \leq \|b\|_{q_0} \|v\|_{\frac{p+m+2}{2}}^{p_1} (c \|\nabla(|v|^{\frac{p+m}{2}} v)\|_2)^{\frac{2p_2}{p+m+2}}, \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = p + m + 2, \\ \frac{1}{q_0} + \frac{2\theta_1}{p+m+2} + \frac{(n-2)\theta_2}{n(p+m+2)} = 1, \end{cases}$$

解得

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{q_0[2(p+m+2) - (n-2)(a-m)] - n(p+m+2)}{(n+2)q_0} > 0, \\ \theta_2 &= \frac{nq_0[p+m+2+2(a-m)] + n(p+m+2)}{(n+2)q_0}. \end{aligned}$$

对(33)的右边用 Young 不等式继续得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b(x, t) |v|^{p+m+2} dx & \leq \frac{(m+1)(p+1)}{(p+m+2)^2} \|\nabla(|v|^{\frac{p+m}{2}} v)\|_2^2 \\ & + \left[\frac{(m+1)(p+1)}{(p+m+2)^2} \right]^{\frac{\theta_2}{p+m+2-\theta_2}} (c_1^{\frac{2\theta_2}{p+m+2-\theta_2}} \|b\|_{q_0}^{\theta_1} \|v\|_{\frac{p+m+2}{2}}^{p_1})^{\frac{p+m+2}{p+m+2-\theta_2}} \end{aligned}$$

以 θ_2 代入, 知 $\frac{2\theta_2}{p+m+2}$, $\frac{\theta_2}{p+m+2-\theta_2}$ 及 $\frac{p+m+2}{p+m+2-\theta_2}$ 的界与 p 无关, 所以由上不等式得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} b(x, t) |v|^{p+m+2} dx \\ & \leq \frac{(m+1)(p+1)}{(p+m+2)^2} \|\nabla(|v|^{\frac{p+m}{2}} v)\|_2^2 + c_1(p+m+2)^{\lambda_1} \|v\|_{\frac{p+m+2}{2}}^{\frac{\theta_1(p+m+2)}{p+m+2-\theta_2}}, \end{aligned} \quad (34)$$

λ_1, c_1 是与 p 无关的正数.

用 Young 不等式, 只要 p 适当大, 有

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} d(x, t) |v|^{p+1} |\nabla v|^p dx \\
& \leq \int_{\Omega} |v|^{p+m} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} d^{\frac{2}{2-\beta}} |v|^{p+m+2} dx \\
& \leq \frac{(m+1)(p+1)}{2(p+m+2)^2} \|\nabla(|v|^{\frac{p+m}{2}} v)\|_2^2 + \int_{\Omega} d^{\frac{2}{2-\beta}} |v|^{p+m+2} dx,
\end{aligned} \quad (35)$$

其中 $h = \frac{2\beta-2-m\beta}{2-\beta} > m$. 对式(35)右边的第二项, 因 $d(x, t) \in L^{\infty}((0, \infty); L^1(\Omega))$, 所以 $d^{\frac{2}{2-\beta}} \in L^{\infty}((0, \infty); L^{\frac{\gamma_1(2-\beta)}{2}}(\Omega))$, $\gamma_1(2-\beta)/2 > n/2$. 类似于式(34)的推导得

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} d(x, t) |v|^{p+1} |\nabla v|^p dx \\
& \leq \frac{(m+1)(p+1)}{2(p+m+2)^2} \|\nabla(|v|^{\frac{p+m}{2}} v)\|_2^2 + c_2(p+m+2)^{\lambda_2} \|v\|_{\frac{p+m+2}{\frac{p+m+2}{2}-\theta_4}}^{\frac{\theta_3(p+m+2)}{p+m+2-\theta_4}},
\end{aligned} \quad (36)$$

其中 θ_3, θ_4 是 θ_1 和 θ_2 中的 q_0 用 $\frac{\gamma_1(2-\beta)}{2}$, α 用 h 代替得到, 并不失一般性, 设 $\alpha \geq h$. λ_2, c_2 是与 p 无关的正数.

类似于式(34)的推导, 得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m} \int_{\Omega} |v|^{p+2} dx \\
& \leq \frac{(m+1)(p+1)}{2(p+m+2)^2} \|\nabla(|v|^{\frac{p+m}{2}} v)\|_2^2 + c_3(p+m+2)^{\lambda_3} \|v\|_{\frac{p+m+2}{\frac{p+m+2}{2}-\theta_6}}^{\frac{\theta_5(p+m+2)}{p+m+2-\theta_6}},
\end{aligned} \quad (37)$$

其中 θ_5, θ_6 是 θ_1, θ_2 中 $q_0 \rightarrow \infty$, α 用 0 代替而得到, c_3, λ_3 是与 p 无关的正数.

以式(34), (36), (37)代入式(32), 将含 $\|\nabla(|v|^{\frac{p+m}{2}} v)\|_2^2$ 的项移到左边, 并对该项应用嵌入定理得

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|v\|_{\frac{p+m+2}{2}}^2 + c_4 \|v\|_{\frac{p+m+2}{2}}^{\frac{p+m+2}{2}+2} \\
& \leq c_5(p+m+2)^{\theta_2} (\|v\|_{\frac{p+m+2}{\frac{p+m+2}{2}-\theta_2}}^{\frac{\theta_1(p+m+2)}{p+m+2-\theta_2}} + \|v\|_{\frac{p+m+2}{\frac{p+m+2}{2}-\theta_4}}^{\frac{\theta_3(p+m+2)}{p+m+2-\theta_4}} + \|v\|_{\frac{p+m+2}{\frac{p+m+2}{2}-\theta_6}}^{\frac{\theta_5(p+m+2)}{p+m+2-\theta_6}}),
\end{aligned} \quad (38)$$

θ, c_4, c_5 是不依赖于 p 的正数. 因

$$\frac{\theta_1(p+m+2)}{p+m+2-\theta_2} = (p+m+2) \left[1 + \frac{q_0(n+2)(\alpha-m)}{(2q_0-n)(p+m+2)-2nq_0(\alpha-m)} \right],$$

如果记

$$\tau = \frac{p+m+2}{2}, \quad \sigma(\tau) = \frac{q_0(n+2)(\alpha-m)}{(2q_0-n)(p+m+2)-2nq_0(\alpha-m)},$$

$$V_r = \max(1, \|v_0\|_{\infty}, \sup_{t \geq 0} \|v\|_r),$$

并注意到 $\sigma(\tau)$ 对 α 是增函数及 $\alpha \geq h$ 的假定, 由式(38)知, 不管 $\frac{d}{dt} \|v\|_{\frac{p+m+2}{2}}^2$ 的符号如何, 都有

$$V_{2\tau-m} \leq (cr^{\theta})^{\frac{1}{\tau}} V_{\tau}^{1+\sigma(\tau)},$$

又由引理4的式(21)式, 得

$$\|v\|_{p_0+2} = (1+t)^{\frac{1}{m}} \|u\|_{p_0+2} \leq c,$$

因此再根据引理3, 便得 $\|v\|_{\infty} \leq c$, 从而

$$\|u\|_{\infty} \leq c(1+t)^{-\frac{1}{m}}.$$

定理3 设问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta(|u|^m u) = g(x, t, u, \nabla u), \\ u(x, t) = u_0(x), \quad u|_{\infty} = 0, \end{cases} \quad (1'')$$

其中

$$g(x, t, u, \nabla u) = f(x, t, u, \nabla u) - f_1(x, t)u, \quad f_1(x, t) \geq \frac{1}{m(1+t)}.$$

f 满足结构条件(8), 且

$$b(x, t) \in L_{(0, \infty)}^{\infty}(\Omega) \cap L_{Q_T}^1, \quad q > \frac{n(m+2)}{2} + 2, \quad q_0 > \frac{n}{2},$$

$$d(x, t) \in L_{(0, \infty)}^{\infty}(\Omega); \quad L^1(\Omega) \cap L_{Q_T}^1, \quad \gamma_0 > \frac{n+2}{2-\beta}, \quad \gamma_1 > \frac{n}{2-\beta}, \quad u_0(x) \in L^{\infty}(\Omega).$$

那么当引理4的条件满足时, 有 $\|u\|_{\infty} \leq M_0(1+t)^{-\frac{1}{m}}$, 其中 $M_0 = \max_{\Omega} |u_0(x)|$.

证 设 $u = (1+t)^{-\frac{1}{m}}v$, $\tau = \ln(1+t)$, 则问题(1''), (2'')变为

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \Delta(|v|^m v) = \left[\frac{1}{m} - e^{\tau} f_1(x, t)\right]v + f(x, e^{\tau} - 1, v e^{-\frac{\tau}{m}}, \nabla v e^{-\frac{\tau}{m}}) e^{\frac{(1+m)\tau}{m}}, \\ v(x, 0) = u_0(x), \quad v|_{\infty} = 0. \end{cases}$$

因

$$\frac{1}{m} - e^{\tau} f_1(x, t) = \frac{1}{m} - (1+t)f_1(x, t) \leq 0, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & |f(x, e^{\tau} - 1, v e^{-\frac{\tau}{m}}, \nabla v e^{-\frac{\tau}{m}}) e^{\frac{(1+m)\tau}{m}}| \\ & \leq b(x, t)|v|^{m+1} + d(x, t)|\nabla v|^p, \end{aligned}$$

由于有式(39), 可引用引理4得 $v(x, t) \in L^{q_0+m+2}(Q_T)$, 且

$$\|v\|_{q_0+m+2, Q_T} \leq c \quad c \text{ 不依赖于 } T.$$

取 p_0 适当大, 引用定理1得

$$|v(x, \tau)| \leq \max_{\Omega} |v(x, 0)| = \max_{\Omega} |u_0(x)| = M_0,$$

从而

$$|u(x, t)| = (1+t)^{-\frac{1}{m}} |v(x, t)| \leq M_0(1+t)^{-\frac{1}{m}}.$$

当 $d(x, t) = 0$, 即 f 不含 u 的导数时, 以上内容都只设 $m > 0$.

参 考 文 献

- [1] Levine, H. A., Sack, P. E., *J. Differential Equations*, 52(1984), 135—161.
- [2] Nakao, M., *Non. Analysis*, 10, 3(1986), 299—314.
- [3] Bertsch, M., Peletier, L. A., *Arch. Rational Mech. Anal.*, 91, 3(1985), 207—229.
- [4] 梁鉴廷、吴在德、梁学信, 一致抛物型方程广义解的弱最大值原理和唯一性定理, *数学研究与评论*, 3, 3(1983), 67—71.
- [5] 梁学信, 非一致拟线性抛物型方程广义解的极值原理, *华侨大学学报(自然科学版)*, 6, 1(1985), 23—32.

- [6] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Uralceva, N. N., *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, V. 23, Amer. Math. soc. Providence, R. I., (1968).

Weak Maximum Principle and Asymptotic Property Displayed by the Solution of Quasilinear Degenerate Parabolic Equation

Liang Xuexin

(*Department of Management Information Science*)

Abstract Taking the initial and boundary values of quasilinear degenerate parabolic equations (1), (2) into account, this paper demonstrates the weak maximum principle of the generalized solutions to be true, and obtains the decay estimates of the solutions.

Key words parabolic equation, generalized solution, weak maximum principle, asymptotic property