

# 瞬态两相流动的矢通量分裂解\*

翁荣周

(化工与生化工程系)

**摘要** 本文用矢通量分裂法求解了瞬态两相流问题。首先导出了瞬态两相控制方程的特征根,然后将矢通量分裂成二个矢量使每一个子矢量仅包含一种符号的特征值,再利用一侧差分将方程离散得到稳定性较好的差分方程。最后将数值预测与实验结果进行了比较,数值方法与实验结果十分吻合。

**关键词** 两相流, 矢通量

## 0 前言

瞬态两相流问题在许多工程和科学技术中经常遇到,如原子能发电厂事故发生时在主循环或次循环中都可能出现复杂的两相流现象,在火力发电厂的变工况情况下,常在除氧器的下降管中发生两相流动,严重情况下气泡前沿可达到给水泵的吸入口,引起给水泵工作不稳定甚至停止给水,造成事故。因此瞬态两相流的研究,具有十分重要的工程实践和理论价值。

瞬态两相流是一个非线性双曲线型方程组,在一般的情况下得不到封闭的解析解,因此数值方法具有重要意义。

对双曲线型方程曾用特征线-差分法<sup>[1-3]</sup>求解,但对于亚音速流,方程的特征值有正有负,因此若采用单侧空间差分格式,常引起不稳定,但一侧的空间差分比中心差分来说有较高的计算效率。

G 莫拉斯<sup>[4]</sup>提出了一种 $\lambda$ -格式积分气动力学欧拉方程,该方法考虑了波的传播方向问题,最近有人提出<sup>[5,6]</sup>对于波的不同传播方向,采用不同的差分格式来求解单相流问题。

然而对于瞬态两相流,它远比单相流复杂。我们的目的在于寻找一种适合于瞬态两相流的矢通量分裂方法求解两相流问题。

## 1 瞬态两相流方程组及特征根

在绝热、无滑动和均相热平衡情况下,一维瞬态两相流问题可采用三方程的控制方程<sup>[1]</sup>

1990-02-08收到。

\*作者1989年间在英国斯特拉斯克来底大学进行的部份研究工作。

$$A \frac{\partial W}{\partial t} + B \frac{\partial W}{\partial z} = C, \quad (1)$$

这里

$$W = \begin{bmatrix} G \\ P \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -C^2 \rho_{gf} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2G}{\rho_m} & 1 & -\frac{\rho_{gf} G^2}{\rho_m^2} \\ 0 & \frac{G}{\rho_m} & -\frac{C^2 \rho_{gf} G}{\rho_m} \\ \frac{1}{\rho_{gf}} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$C = \begin{bmatrix} g \rho_m - \frac{2fG^2}{d\rho_m} \\ \frac{2fG^3}{d\rho_m^2 \beta (\rho C_p)_m} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中  $C$  是音速

$$C^2 = \frac{h_{gf} \rho_f \rho_g}{C_{pf} \beta \rho_m^2 \rho_{fg}}. \quad (6)$$

在均相热平衡态下

$$\beta = \frac{T_f}{h_{gf}} (V_g - V_f), \quad (7)$$

$$\rho_m = \alpha \rho_g + (1 - \alpha) \rho_f. \quad (8)$$

如果用  $A^{-1}$  左乘式 (1), 得

$$\frac{\partial W}{\partial t} + D \frac{\partial W}{\partial z} = E, \quad (9)$$

这里

$$D = \begin{bmatrix} \frac{2G}{\rho_m} & 1 & -\frac{G^2 \rho_{gf}}{\rho_m} \\ C^2 & \frac{G}{\rho_m} & -\frac{C^2 G \rho_{gf}}{\rho_m} \\ \frac{1}{\rho_{gf}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$E = \begin{pmatrix} g\rho_m - \frac{2fG^3}{d\rho_m} \\ \frac{2fG^3}{d\rho_m^2 \beta(\rho C_p)_m} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

如果方程(9)的特征根都是实数,那么该方程是双曲线型,为了求方程(9)的特征根,令

$$|D - \lambda_i I| = 0, \quad (12)$$

由此得到方程(9)的特征根是

$$\lambda_1 = \frac{G}{\rho_m} + C, \quad \lambda_2 = \frac{G}{\rho_m} - C, \quad \lambda_3 = \frac{G}{\rho_m}. \quad (13)$$

流体速度  $u = G/\rho_m$ , 如  $|u| < C$  为亚音速流动,在化工,动力管道中,液体的流速一般在0.5—3m/s之间,远低于音速;气体、蒸汽流速虽可达30m/s,甚至更高,但仍属亚音速区,故管道中多属于此流动。在这种情形下有混合特征根,因此求解时必须考虑特征根的这种情形。

## 2 相容方程和边界条件

方程(9)需要附加初始和边界条件,对于边界条件,在一般情况下需要知道管道进出口截面的质量流量  $G$ , 压力  $P$  和空穴度  $\alpha$ , 但对于双曲线方程,其中某些边界条件可以由初始时刻值来决定,也就是由相容方程来决定,这种边界条件称为计算边界条件。

下面来推导相容方程,设  $[L^i]$  表示相应于特征根  $\lambda_i$  的左特征向量,为导出此特征向量,有

$$L^i \{ D - \lambda_i I \} = 0, \quad (14)$$

这里  $L^i = [L^i_1 L^i_2 L^i_3]$ , 对  $\lambda_1 = (G/\rho_m) + C$ , 由式(14)得

$$[L^1_1 L^1_2 L^1_3] \begin{pmatrix} \frac{G}{\rho_m} - C & 1 & -\frac{G^2 \rho_{gf}}{\rho_m^2} \\ C^2 & -C & -\frac{C^2 G \rho_{gf}}{\rho_m} \\ -\frac{1}{\rho_{gf}} & 0 & -\frac{G}{\rho_m} - C \end{pmatrix} = 0, \quad (15)$$

解出式(15),得相应于  $\lambda_1$  的特征向量

$$[L^1] = [1 \quad C \quad -\frac{G \rho_{gf}}{\rho_m}], \quad (16)$$

类似的相应于  $\lambda_2, \lambda_3$  的特征向量

$$[L^2] = [-1 \quad -\frac{1}{C} \quad \frac{\rho_{gf} G}{\rho_m}], \quad (17)$$

$$[L^3] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C^2} & \rho_{gf} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

现在用这些特征向量左乘式(19), 便得到分别相应于 $\lambda_i$ 的相容方程

$$L^i \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} + D \frac{\partial W}{\partial z} \right\} = L^i E,$$

由式(14), 上式可写成

$$L^i \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W}{\partial z} \right\} = L^i E, \quad (19)$$

因此分别相应于 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 和 $\lambda_3$ 的相容方程是

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{C} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\rho_{gf} G}{\rho_m} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \left( \frac{G}{\rho_m} + C \right) \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{1}{C} \left( \frac{G}{\rho_m} + C \right) \frac{\partial p}{\partial z} \\ - \left( \frac{G}{\rho_m} + C \right) \frac{\rho_{gf} G}{\rho_m} \frac{\partial \alpha}{\partial z} = g \rho_m - \frac{2fG^2}{d\rho_m} + \frac{1}{C} \frac{2fG^3}{d\rho_m^2 \beta(\rho c_p)_m}, \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{C} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho_{gf} G}{\rho_m} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \left( \frac{G}{\rho_m} - C \right) \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{1}{C} \left( \frac{G}{\rho_m} - C \right) \frac{\partial p}{\partial z} \\ + \left( \frac{G}{\rho_m} - C \right) \frac{\rho_{gf} G}{\rho_m} \frac{\partial \alpha}{\partial z} = -g \rho_m + \frac{2fG^2}{d\rho_m} + \frac{2fG^3}{cd\rho_m^2 \beta(\rho c_p)_m}, \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{C^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_{gf} \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \frac{1}{C^2} \left( \frac{G}{\rho_m} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{G\rho_{gf}}{\rho_m} \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) \\ = -\frac{2fG^3}{C^2 d \rho_m^2 \beta(\rho c_p)_m}. \end{aligned} \quad (20c)$$

关于边界条件。从式(13)知, 在管的入口截面有一根特征线从内部向外部穿过, 这根特征线可确定一个入口截面的计算边界条件, 它由相容方程(20b)确定, 入口截面其余二个边界条件必须给定。对于出口截面, 由式(13)知有二根特征线穿过, 由此有二个计算边界条件, 它们分别由相容方程(20a)和(20c)确定, 另一个必须给定。

### 3 矢量通量分裂及差分方程

现在回到式(9), 令

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{C} & -\frac{\rho_{gf} G}{\rho_m} \\ -1 & \frac{1}{C} & \frac{\rho_{gf} G}{\rho_m} \\ 0 & -\frac{1}{C^2} & \rho_{gf} \end{bmatrix},$$

将其左乘到式(9)并经适当变换得

$$T^{-1} \frac{\partial W}{\partial t} + H_D T^{-1} \frac{\partial W}{\partial z} = T^{-1} E, \quad (21)$$

这里 $H_D$ 是式(9)特征根的对角矩阵

$$H_D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

式(21)又可写成下式

$$-\frac{\partial W}{\partial t} + TH_D T^{-1} \frac{\partial W}{\partial z} = E, \quad (23)$$

比较式(9)与式(23)得

$$D = TH_D T^{-1} \quad (24)$$

现在如果 $\lambda_i$ ,  $H_D$ 和 $D$ 分别被分成正负的两部分, 即

$$\lambda_i = \lambda_i^+ + \lambda_i^-, \quad (25a)$$

$$H_D = H_D^+ + H_D^-, \quad (25b)$$

$$D = D^+ + D^-, \quad (25c)$$

得

$$D^+ = TH_D^+ T^{-1}, \quad (26)$$

$$D^- = TH_D^- T^{-1}, \quad (27)$$

这里

$$\lambda_i^+ = \frac{\lambda_i + |\lambda_i|}{2}, \quad \lambda_i^- = \frac{\lambda_i - |\lambda_i|}{2}, \quad (28)$$

将式(23)代入式(28), 特征值就分裂成如下式

$$\lambda_1^+ = \frac{u+c+|u+c|}{2}, \quad \lambda_1^- = \frac{u+c-|u+c|}{2}, \quad (29a)$$

$$\lambda_2^+ = \frac{u-c+|u-c|}{2}, \quad \lambda_2^- = \frac{u-c-|u-c|}{2}, \quad (29b)$$

$$\lambda_3^+ = \frac{u+|u|}{2}, \quad \lambda_3^- = \frac{u-|u|}{2}. \quad (29c)$$

最后, 在 $0 \leq u \leq C$ 范围内, 子矢通量 $[D]^+$ ,  $[D]^-$ 分别是:

$$[D]^+ = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{2} \left(1 + \frac{G}{C\rho_m}\right) & \frac{\lambda_1}{2C} \left(1 + \frac{G}{C\rho_m}\right) & -\frac{\lambda_3 G}{C^2 \rho_m} - \frac{\lambda_1 \rho_{gf} G}{2\rho_m} \left(1 + \frac{G}{C\rho_m}\right) + \frac{\lambda_3 \rho_{gf} G}{\rho_m} \\ \frac{\lambda_1 C}{2} & \frac{\lambda_1}{2} & -\frac{\lambda_1 \rho_{gf} GC}{2\rho_m} \\ \frac{\lambda_1}{2C\rho_{gf}} & \frac{\lambda_1}{2C^2 \rho_{gf}} - \frac{\lambda_3}{C^2 \rho_{gf}} & -\frac{\lambda_1 G}{2C\rho_m} + \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad (30a)$$

$$[D]^- = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2}{2} \left(1 - \frac{G}{C\rho_m}\right) & -\frac{\lambda_2}{2C} \left(1 - \frac{G}{C\rho_m}\right) & -\frac{\lambda_2 \rho_{gf} G}{2\rho_m} \left(1 - \frac{G}{C\rho_m}\right) \\ -\frac{\lambda_2 C}{2} & \frac{\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_2 C \rho_{gf} G}{2\rho_m} \\ -\frac{\lambda_2}{2C\rho_{gf}} & \frac{\lambda_2}{2C^2 \rho_{gf}} & \frac{\lambda_2 G}{2C\rho_m} \end{bmatrix} \quad (30b)$$

这样方程(9)变为如下形式

$$\frac{\partial W}{\partial t} + D^+ \frac{\partial W}{\partial z} + D^- \frac{\partial W}{\partial z} = E \quad (31)$$

按照Fourier稳定性分析<sup>[8]</sup>, 为了满足稳定性要求, 式(31)左边的第二项必须用向后差分而第三项必须向前差分, 现用 $\nabla$ 表示一阶向后差算子, 用 $\Delta$ 表示一阶前差算子, 那么式(31)可以写成如下显式的差分方程

$$W_j^{i+1} = W_j^i + E\Delta t - \{D^+ + \nabla W_j^i + D\Delta W_j^i\} \frac{\Delta t}{\Delta z}, \quad (32)$$

$$|\lambda_{\max}^{\pm}| \frac{\Delta t}{\Delta z} \leq 1 \quad (33)$$

时方程(32)稳定<sup>[11]</sup>.

#### 4 理论预测与实验结果的比较

为了与实验结果进行比较, 将管道分成 $N$ 个截面, 参看图1. 在入口截面取质量流量 $G$ 为计算边界条件, 取压力 $p$ 和汽泡空穴度 $\alpha$ 为给定边界条件.

对出口截面, 取压力 $p$ 和空穴度 $\alpha$ 为计算边界条件, 取质量流量 $G$ 为给定边界条件.

图2和图3分别是当 $\Delta t = 0.001$ ,  $\Delta z = 1$ 时, 管中不同截面处空穴度 $\alpha$ 和压力 $p$ 随时间的变化关系曲线, 其中实线是进口截面所给定的边界条件.

图4、5表示理论预测与实验结果<sup>[9]</sup>的比较情况, 图4是管的中间截面处空穴度 $\alpha$ 随时间的变化关系, 图5是管的出口与进口截面处压力差随时间的变化关系, 图4中的实线是进口截面处的给定边界条件. 这两个图中的虚线是本文的理论值而\*是相同条件下的实验结果. 从图4、5可知, 理

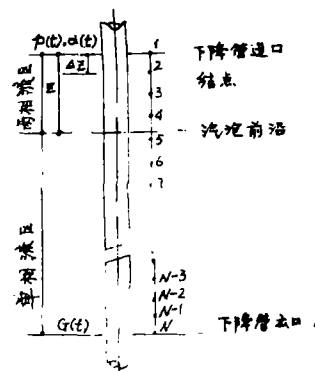


图1 管道的结点划分

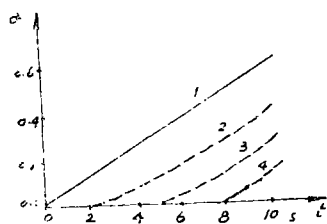


图2 不同截面处 $\alpha$ 与 $t$ 关系  
1—进口截面; 2—距进口3m  
3—距进口6m; 4—距进口10m

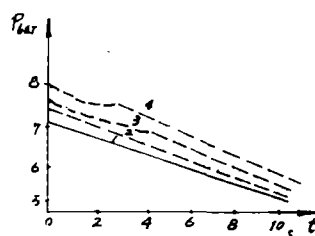
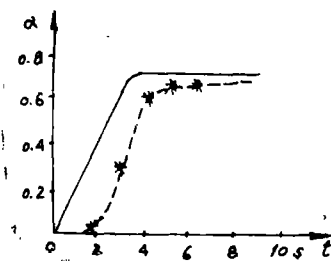
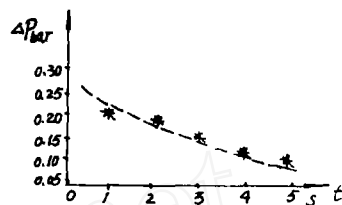


图3 不同截面处 $p$ 与 $t$ 关系  
1—进口截面; 2—距进口3m  
3—距进口6m; 4—距进口10m

论预测和实验结果十分吻合。

图4  $\alpha$ 与 $t$ 关系图5 压差 $\Delta p$ 与时间 $t$ 关系

## 5 结论

瞬态两相流是工程和科学技术中具有重要意义的课题,对于流动模型和求解方法尚不十分成熟,都有待进一步研究。

本文采用的无滑动均相热平衡的三方程模型基本上是一个较好的模型。

本文提出的将方程组的矢通量分裂成两个子矢通量使每一个子矢通量仅包含一种符号特征根的求解方法,

克服了采用一侧空间差分的不稳定性问题,对于求解瞬态两相流动问题具有普遍意义。

## 符 号 说 明

$C_p$ —J/kg $^{\circ}$ C, 定压比热;  $C$ —m/s, 音速;  $d$ —m, 管径;  $f$ —摩擦系数;  $G$ —kg/m $^2$ ·s, 质量流量;  $g$ —m/s $^2$ , 重力加速度;  $h_f$ —kJ/kg, 液体饱和焓;  $h_g$ —kJ/kg, 蒸汽饱和焓;  $h_{fg}$ —kJ/kg, 汽化潜热;  $p$ —kg/m $^2$ , 压力;  $T$ — $^{\circ}$ C, K, 温度;  $t$ —s, 时间;  $u$ —m/s, 速度;  $V_g$ —m $^3$ /kg, 蒸汽比容;  $V_f$ —m $^3$ /kg, 液体比容;  $z$ —m, 长度;  $\alpha$ —空穴度;  $\beta$ —m $^2$ ·k/kg, 饱和状态下温度随时间的变化率;  $\rho$ —kg/m $^3$ , 密度;  $\rho_m$ —kg/m $^3$ , 平均密度;  $\theta$ —与铅垂方向的夹角;  $\lambda$ —特征值。

## 参 考 文 献

- [1] Courant, R., Lcaacson, E. and Ress, M., *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 7, (1952), 243—255.
- [2] Whitham, G.B., *Linear and Non-Linear Waves*, Miley New York, (1974).
- [3] Gonzalez-sontel, J.M. and Lahey, Jr. R.T., *J. Heat Transfer*, 95(470), (1973).
- [4] Morotti, G., The  $\lambda$ -scheme, *Computers and fluids*, 7, (1979), 191—205.
- [5] Chakravarthy, S.R., Anderson, D.A. and Salas, M., *AIAA Pasadena, California*, (1980), 80—0268.
- [6] Steger, J.L., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 13, (1978), 175—188.
- [7] Banerjee, E. and hancox, W.T., *Int. J. Multiphase Flow*, 4, (1978) 437—460.

- [8] Steger, J.L. and warming, R.F., *J.of Comp.Physics*, 40, (1981), 263—293.  
[9] Kim, Choon, NG 'Some Aspects of Transient Two-phase Flow, *ph.D.Thesis, Univ.of strathclyde, Glasgow*.

## Solution of Transient Two-Phase Flow by Split Flux Vector Method

Weng Rongzhou

(*Deptment of Chenmical and Biochemical Engineering*)

**Abstract** The problem of transient two-phase flow is solved by split flux vector method in this pader. The characteristic root is derived firstly from the governing equation of transient two-phase flow. And then the flux vector is split into two component vectors, each containing the eigenvalue of one specific sign. To make the ebuation discrete by means of one-sided difference, a fairly stable difference equation is obtained. The predicted numerical values are comared with experiment data finally. It shows a curious coincidence.

**Key words** two-phase flow, flux vector