第12卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol.12 No.3
1991年7月 JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Jul. 1991

# 平面弯曲弹性失稳的加权余量解

杜 耀 星

（土木工程系）

**摘要** 本文利用加权余量法推导出狭长矩形截面简支梁在纯弯曲时，发生弹性失稳的临界弯矩$M_{cr}$计算式.

**关键词** 加权余量法，弹性失稳，简支梁，狭长矩形截面，临界弯矩

## 0 引言

结构或杆件丧失稳定性都是突如其来，事先观察不到什么征兆，这在承受中心受压直杆的弹性失稳现象已为工程设计人员所熟知。对于狭长矩形截面梁，尽管荷载是作用在最大刚度平面$xy$内（见图1）而发生弯曲，当荷载小于某一临界值时，这种梁的平面弯曲平衡状态是稳定的。但是，由于梁的轴线不可能绝对平直，此外，荷载的作用线也不可能分毫无差地与横截面长轴重合。所以，梁在外力作用下，除了在$xy$平面内发生弯曲外，还会在$xz$平面内引起弯曲以及绕$x$轴的扭转。后面这两种变形，在外力不太大时乃属于次要变形。可是，当外力不断增大而达到临界值时，由于梁横截面对$y$轴的抗弯刚度$EI_y$和抗扭刚度$GI_T$远小于横截面对$z$轴的抗弯刚度$EI_z$，所以上述的次要变形就会随着外力的增加而迅速增大，致使这种狭长矩形截面梁的弯曲平衡状态成为不稳定，直到最后发生弹性失稳。

关于求解狭长矩形截面梁发生弹性失稳的临界荷载值，可以用求解弯曲和扭转角的微分方程的办法，也可以用能量法得到求解，本文采用加权余量法来求出这种梁发生弹性失稳的临界荷载。

关于加权余量法的基本原理，读者可以参阅文〔1〕，〔2〕。

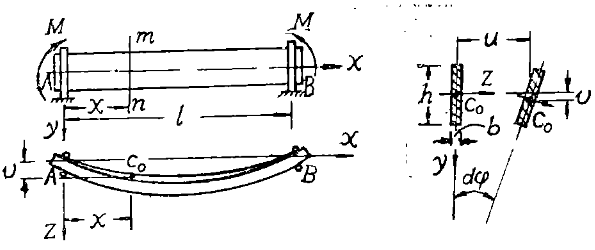
## 1 扭转角微分方程的推导

在采用加权余量法求解本问题的临界荷载时，首先必须建立本问题的控制方程，即扭转角的微分方程。

现以承受纯弯曲的狭长矩形截面的支梁为例来推导扭转角微分方程。设这种矩形截面梁在两端铰支处截面可以绕$y$，$z$轴作微小转动，但不允许有$y$，$z$方向的位移，也不可能$x$轴转

本文1990-04-09收到.

动，如图 1（a）所示。




(a)　　　(b)

图 1　简支梁侧向弹性失稳

失稳时，在距$A$端为$x$的任意截面$mn$，其形心 $c_0$ 沿 $z$ 轴和 $y$ 轴的位移分别以$u$,$v$表示，截面的扭转角以$\varphi$表示，如图1（b）所示。此时，在两个主轴平面内的弯矩分别为

$$M_y = M\cos\varphi, \tag{1}$$

$$M_z = M\sin\varphi, \tag{2}$$

对于微小变形情况，以上两式可改写为

$$M_y \approx M, \tag{3}$$

$$M_z \approx M\varphi, \tag{4}$$

而扭矩可取为

$$M_T = -M\frac{du}{dx}, \tag{5}$$

对于弯曲和扭转的平衡微分方程式，由材料力学可知为

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI_z}, \\ &\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M\varphi}{EI_y}, \\ &\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M}{GC}\ \frac{du}{dx}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

其中$EI_z$和$EI_y$分别为在两个主轴平面内的抗弯刚度，$GC$为狭长矩形截面的抗扭刚度，若矩形截面的高度为$h$，宽度为$b$，则可近似地取

$$C \approx (1/3)hb^3. \tag{7}$$

由于$I_z$远大于$I_y$，所以失稳总是发生在最小刚度平面内，为了求出临界弯矩$M_{cr}$，只需考虑式（6）最后两式即可。为此，将式（6）第三式对$x$求导一次得

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{M}{GC}\ \frac{d^2u}{dx^2}, \tag{8}$$

以式（6）中的第二式代入式（8）得

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{M^2\varphi}{GCEI_y},$$

令

$$K^2=\frac{M^2}{GCEI_y}, \tag{9}$$

则得

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+K^2\varphi=0, \tag{10}$$

式（10）就是狭长矩形截面简支梁在纯弯曲下扭转角的微分方程，这也就是应用加权余量法求解的控制方程。

## 2 用加权余量法求解弹性失稳时的临界弯矩$M_{cr}$

选取以三角级数表示的试函数

$$\varphi=A_1\sin\frac{\pi}{l}x+A_3\sin^3\frac{\pi}{l}x+A_5\sin^5\frac{\pi}{l}x+\cdots,$$

如果只取此级数的第一项

$$\varphi=A\sin\frac{\pi}{l}x, \tag{11}$$

作为试函数也能得到足够准确的解答，其中$A_1$为待定系数；$N_i=\sin\frac{\pi}{l}x$为基函数。

将式（11）对$x$微分两次，得

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=-A_1\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sin\frac{\pi}{l}x, \tag{12}$$

以式（11），（12）代入控制方程式（10）得余量为

$$R_L=-A_1\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)+K^2A\sin\frac{\pi x}{l},$$

若取权函数$W_i$等于基函数$N_i$，即

$$W_i=N_i=\sin\frac{\pi x}{l},$$

于是得加权余量方程，并令其等于零，即

$$\begin{aligned}\int_v R_LW_i dV&=\int_0^l\left[-A\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sin\frac{\pi x}{l}+K^2A_1\sin\frac{\pi x}{l}\right]\sin\frac{\pi x}{l}dx\\&=-A_1\int_0^l\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2-K^2\right]\sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)dx\\&=-A_1\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2-K^2\right]\int_0^l\sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)dx=0,\end{aligned}$$

由上式可知，必有

$$\int_0^l\sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right)dx=0 \tag{13}$$

或

$$-A_1\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2-K^2\right]=0. \tag{14}$$

以式（9）代入式（14）得

$$\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - \frac{M^2}{EI_yGC} = 0,$$

所以

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l}\sqrt{EI_yGC}。\tag{15}$$

式（15）就是狭长矩形截面简支梁承受纯弯曲时发生弹性失稳的临界弯矩。

## 参　考　文　献


[1] 徐文焕、陈虬，加权余量法在结构分析中的应用，中国铁道出版社，（1985），5—26。

[2] 杜耀星，圆环和圆拱承受均匀径向载荷时弹性失稳的加权余量解，华侨大学学报（自然科学版），4（1990）.

[3] 孙训方等，材料力学（下册），人民教育出版社，（1980），160—162.

[4] 武汉水电学院，材料力学（下册），水利电力出版社，（1960），466—470.

[5] Cernica, J. N., *Strength of Materials*, second edition, (1979), 419—424.

[6] 刘鸿文，高等材料力学，高等教育出版社，（1985），246—250.


# Weighted Residual Solution of Elastic Instability of a Simple Supported Beam Subjected to Plane Bending


Du Yaoxing

( *Department of Civil Engineering* )



**Abstract** Elastic instability may occur when a simple supported beam with narrower rectangular section is snbjected to pure plane bending. For calculating its critical bending moment (Mcr), a formula is derived by weighted residual method in this paper.



**Key words** wighted residual method, elastic instability, simple supported beam, narrower rectangular section, critical bending moment