

具有体力的边界积分方程的整体变换法

施景勋

(土木工程系)

摘要 本文提出用整体变换法求解有体力(自重、等角速旋转惯性力和稳定温度荷载)的边界积分方程。

关键词 整体变换, 边界积分方程, 自重, 等角速旋转惯性力

1 问题的提出

用边界元法研究力学问题, 当不计体力时, 由于边界元的离散只在边界上进行, 因此它与把整个区域作为离散对象的差分法和有限元法相比, 可把问题的维数降低一维, 故边界元法具有输入数据少和计算时间短的优点。

当问题需要计及体力时(例如研究地基问题), 边界积分方程中含有体力且沿场域积分的积分项, 例如二维线弹性力学有下列熟知的矩阵表示的边界积分方程

$$C^i U_i^j + \int_{\Gamma_1} P_{ki}^* \cdot \bar{U}_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} P_{ki}^* \cdot U_k d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_1} U_{ki}^* \cdot P_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_{ki}^* \cdot \bar{P}_k d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ki}^* \cdot b_k d\Omega \quad (l, k=1, 2), \quad (1)$$

其中, Ω ——场域; Γ_1 和 Γ_2 ——场域 Ω 的位移边界和应力边界; $C^i = \begin{cases} 1, i \text{ 点在域内,} \\ 1/2, i \text{ 点在光滑边界上,} \end{cases}$

$U_{ki}^* = \begin{bmatrix} U_{kz}^* & U_{ky}^* \\ U_{kx}^* & U_{ky}^* \end{bmatrix}$ ——基本解的位移; $P_{ki}^* = \begin{bmatrix} P_{kz}^* & P_{ky}^* \\ P_{kx}^* & P_{ky}^* \end{bmatrix}$ ——基本解的面力; $U_i^j = \begin{bmatrix} U_i^j \\ V_i^j \end{bmatrix}$

——单位力作用点 i 的位移, $U_k = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ ——考察点的位移; $P_k = \begin{bmatrix} P_z \\ P_y \end{bmatrix}$ ——考察点的面力; \bar{U}_k 和

\bar{P}_k ——考察点的已知位移和面力; $b_k = \begin{bmatrix} b_z \\ b_y \end{bmatrix}$ ——体力。

其中, 式(1)中的 $\int_{\Omega} U_{ki}^* \cdot b_k d\Omega$ 是含体力且沿场域积分项。当

进行边界元离散时, C. A. Brebbia曾建议: 为计算该项, 可将场

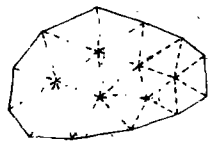


图1 用于体力积分的内部网格

域 Ω 离散如图1的域内单元,并分别算出各单元的值,然后求和。与区域法相比,这样做虽然没有增加新的未知量,但却使边界元能使问题的维数降低一维的优点大打折扣。

为了避免沿场域 Ω 的积分,T. A. Cruse和D. J. Danson提出,把该项的对域积分转化为对边界的积分。为使积分容易进行,他们把该项中的基本解的位移 U_{kl}^* ,分解成用 Galerkin 位移张量 $G_{kl,j}^*$ 的表达式,例如

$$U_{kl}^* = G_{kl,jj}^* - \frac{G_{kl,jl}^*}{2(1-\mu)},$$

其中, μ 为Poisson系数。当体力为自重时,含体力且沿场积分可变成沿边界积分如下:

$$\int_{\Omega} U_{kl}^* \cdot b_k d\Omega = b_k \int_{\Gamma} \left\{ G_{kl,j}^* - \frac{G_{kl,jl}^*}{2(1-\mu)} \right\} n_j d\Gamma.$$

这样处理无疑是正确的,并把工作量较大的场域数值积分问题变成工作量较少的边界数值积分问题。但由于各种力学问题有不同的基本解,尤其是变体力的情况,要把含体力且沿场积分项转化成沿边界积分是相当困难,即使能进行这种转化,它仍是式(1)中的独立项,沿边界离散计算太费机时,因此本文采用整体变换法,以避开上述方法的两个缺点。

众所周知,边界积分方程式(1),可由下列的加权余量方程的左边项经两次分部积分而得到

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k) U_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) P_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (P_k - \bar{P}_k) U_k^* d\Gamma \quad (j, k = 1, 2), \quad (2)$$

式(2)的原始提法是求下列问题的近似解

$$\begin{cases} \sigma_{jk,j} + b_k = 0, & \text{在}\Omega\text{内,} \\ \bar{U}_k = U_k, & \text{在}\Gamma_1\text{上,} \\ P_k = \bar{P}_k, & \text{在}\Gamma_2\text{上,} \end{cases} \quad (3)$$

假如将原问题[式(3)]称为分析对象的力学状态1,可以应用叠加的概念,认为状态1是由不计体力的状态2与域内的应力仅与体力有关,而和原已知边界条件无关的状态3的叠加。状态3的体内应力和其对应的边界条件,事前可以完全知道,因此,将原问题的已知边界条件扣除状态3的已知边界条件,即得到不计体力的状态2的对应边界条件,将状态2作为求解对象,当求得状态2的解答后再叠加状态3,而得到原问题的解答,因而避开求解含体力的场域积分。

这种整体变换法的实质是利用原问题[式(3)]的场内控制微分方程是线性非齐次偏微分方程的特点。众所周知,线性非齐次偏微分方程的通解(作为状态1)等于齐次方程的通解(作为状态2)和非齐次方程的任何一个特解(作为状态3)之和,因此本变换法属精确变换。

下面以二维弹性力学平面应力问题为例,说明常见的体积力(如:自重;等角速旋转的惯性力和稳定温度荷载)的整体变换法(包括直角坐标和极坐标的情况)。

2 体力仅为自重的直角坐标整体变换法

设式(3)的非齐次方程的通解为 σ_{jk}^1 ,齐次方程的通解为 σ_{jk}^2 和非齐次方程的任何一个特解为 σ_{jk}^3 ,三者之间存在如下关系

$$\sigma_{jk}^1 = \sigma_{jk}^2 + \sigma_{jk}^3, \quad (4)$$

由于体力 $b_k = \text{常量}$, 取式 (3) 的特解

$$\sigma_{jk}^3 = - \begin{bmatrix} b_x \cdot x & 0 \\ 0 & b_y \cdot y \end{bmatrix}, \quad (5)$$

将式 (4) (5) 代入式 (2) 左边项, 即变换成不含体力的场积分

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j}^1 + b_k) U_i^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{jk,j}^2) U_i^* d\Omega, \quad (6)$$

式 (2) 左边作如上的变换, 其右边亦要作相应的变换, 由于特解仅与体力有关, 且与原状态的边界条件无关, 这样很容易根据式 (5) 由边界条件方程式求得特解 (状态 3) 相应的面力为

$$P_i^3 = - \begin{bmatrix} b_x \cdot n_x \cdot x \\ b_y \cdot n_y \cdot y \end{bmatrix}.$$

又原状态的应力边界条件有下列关系:

$$P_i^1 = P_i^2 + P_i^3, \quad (7)$$

将式 (7) 代入式 (2) 右边的沿应力边界 Γ_2 的积分项, 即得

$$\int_{\Gamma_2} (P_i^1 - \bar{P}_k) U_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} (P_i^2 - \bar{P}_k^3) U_i^* d\Gamma, \quad (8)$$

其中

$$\bar{P}_k^3 = \bar{P}_k + \begin{bmatrix} b_x \cdot n_x \cdot x \\ b_y \cdot n_y \cdot y \end{bmatrix}_{\Gamma_2},$$

\bar{P}_k 为原问题的已知应力边界条件。

由于式 (5) 自然满足相容方程, 因此可通过物理方程求应变, 再通过几何方程求位移, 得到特解的相应位移为

$$U_i^3 = - \frac{\mu}{2E} \begin{bmatrix} [(1/\mu)x^2 + y^2]b_x - 2xyb_y \\ [(1/\mu)y^2 + x^2]b_y - 2xyb_x \end{bmatrix}, \quad (9)$$

原问题的位移有下列关系

$$U_i^1 = U_i^2 + U_i^3, \quad (10)$$

式 (10) 使得式 (2) 右边的对位移边界的积分项变为

$$\int_{\Gamma_3} (\bar{U}_k - U_i^1) P_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k^3 - U_i^1) P_i^* d\Gamma, \quad (11)$$

其中

$$\bar{U}_k^3 = \bar{U}_k + \frac{\mu}{2E} \begin{bmatrix} [(1/\mu)x^2 + y^2]b_x - 2xyb_y \\ [(1/\mu)y^2 + x^2]b_y - 2xyb_x \end{bmatrix},$$

式 (2) 用变换式 (6)、(8)、(11) 代换即得不含体力的加权余量方程

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j}^2) U_i^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k^3 - U_i^1) P_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (P_i^2 - \bar{P}_k^3) U_i^* d\Gamma, \quad (12)$$

将式 (12) 左边项进行两次分部积分, 并引进基本解, 即得代替式 (1) 求解的边界积分方程

$$\begin{aligned}
 C^i \cdot U_i^2 + \int_{\Gamma_1} P_{i1}^* \bar{U}_i^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} P_{i2}^* U_i^2 d\Gamma \\
 = \int_{\Gamma_1} U_{i1}^* P_{i1}^2 \cdot P_{i1}^3 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_{i2}^* \bar{P}_i^2 d\Gamma,
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_i^2 &= \bar{U}_i + \frac{\mu}{2E} \begin{bmatrix} [(1/\mu)x^2 + y^2]b_x - 2xyb_x \\ [(1/\mu)y^2 + x^2]b_y - 2xyb_x \end{bmatrix}, \\
 \bar{P}_i^2 &= \bar{P}_i + \begin{bmatrix} b_x \cdot n_x \cdot x \\ b_y \cdot n_y \cdot y \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

\bar{U}_i 和 \bar{P}_i 为原问题的已知位移和应力的边界条件。

公式(13)求得解 U_i^2 和 σ_{jk}^2 后用下式变换成式(1)的真正解 $U_i^1 (=U_i^2)$ 和 $\sigma_{jk} (= \sigma_{jk}^1)$ 为

$$\begin{aligned}
 U_i^1 &= U_i^2 - \frac{\mu}{2E} \begin{bmatrix} [(1/\mu)x^2 + y^2]b_x - 2xyb_y \\ [(1/\mu)y^2 + x^2]b_y - 2xyb_x \end{bmatrix}, \\
 \sigma_{jk}^1 &= \sigma_{jk}^2 - \begin{bmatrix} b_x \cdot x & 0 \\ 0 & b_y \cdot y \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

3 体力为等角速旋转惯性力的直角坐标的整体变换法

对于具有均匀密度 ρ , 以等角速度 ω 绕垂直于该平面旋转轴旋转物体产生的惯性力, 根据达朗贝尔原理, 此惯性力可作为体力 b_k 对待,

$$b_k = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = -\rho\omega^2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

将式(3)的偏微分方程用位移表示为

$$\begin{aligned}
 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \rho\omega^2 x &= 0, \\
 \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - \rho\omega^2 y &= 0,
 \end{aligned}$$

根据上式取其特解

$$U_i^3 = \begin{bmatrix} u^3 \\ v^3 \end{bmatrix} = \frac{1-\mu^2}{6E} \rho\omega^2 \begin{bmatrix} x^3 \\ y^3 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

将其代入几何方程, 再由物理方程得出式(3)的偏微分方程的特解为

$$\sigma_{jk}^3 = \frac{1}{2} \rho\omega^2 \begin{bmatrix} x^2 + \mu y^2 & 0 \\ 0 & y^2 + \mu x^2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

有了特解可以完全按照上面的步骤得到代替式(1)求解的边界积分方程

$$\begin{aligned}
 & C_i \cdot U_i^{2i} + \int_{\Gamma_1} P_{i,1}^* \cdot \bar{U}_i^2 \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_2} P_{i,1}^* \cdot U_i^2 \cdot d\Gamma \\
 & = \int_{\Gamma_1} U_{i,1}^* \cdot P_i^2 \cdot d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_{i,1}^* \cdot \bar{P}_i^2 \cdot d\Gamma, \quad (16)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_i^2 &= \bar{U}_i - \frac{1-\mu^2}{6E} \rho \omega^2 \left[\frac{x^3}{y^3} \right]_{\Gamma_1}, \\
 \bar{P}_i^2 &= \bar{P}_i - \frac{1}{2} \rho \omega^2 \left[\frac{(x^2 + \mu y^2) n_x}{(y^2 + \mu x^2) n_y} \right]_{\Gamma_2},
 \end{aligned}$$

由式(16)得到 \bar{U}_i^2 和 σ_{jk}^2 后用下式换成式(1)的真正解 $U_k (=U^1_k)$ 和 $\sigma_{jk}(\sigma^1_{jk})$:

$$\begin{aligned}
 U_k^1 &= U_k^2 + \frac{1-\mu^2}{6E} \rho \omega^2 \left[\frac{x^3}{y^3} \right], \\
 \sigma_{jk}^1 &= \sigma_{jk}^2 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 \begin{bmatrix} x^2 + \mu y^2 & 0 \\ 0 & y^2 + \mu x^2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

4 体力为稳定温度荷载的直角坐标的整体变换法

将稳定温度荷载作为体力 b_k

$$b_k = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = - \frac{E\alpha}{1-\mu} \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix},$$

T ——变温温度场函数, 事先可知; α ——物体的线热胀系数.

对这问题, 文献[3]已得出特解为

$$\sigma_{jk}^3 = - \frac{E}{1+\mu} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y} \\ - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \cdot \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$U_k^3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

其中, φ ——位移函数, 它是下列方程的特解

$$\Delta^2 \varphi = (1-\mu)\alpha T.$$

由于变温, 使应力边界产生的已知面力

$$\bar{P}_k = \frac{EaT}{1-\mu} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix},$$

按上述步骤, 可得到代替式(1)求解的边界积分方程

$$\begin{aligned} C_i^1 \cdot U_i^1 + \int_{\Gamma_1} P_{i,1}^* \cdot \bar{U}_i^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} P_{i,1}^* \cdot U_i^2 d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_1} U_{i,1}^* \cdot P_i^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_{i,1}^* \cdot \bar{P}_i^2 d\Gamma, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{P}_i^2 = -\frac{EaT}{1-\mu} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}_{\Gamma_2} - \frac{E}{1+\mu} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix}_{\Gamma_2}, \\ \bar{U}_i^2 = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}_{\Gamma_1}. \end{aligned}$$

求得 U_i^2 和 σ_{jk}^2 后用下式求式(1)的真正解 U_i^1 和 σ_{jk}^1 :

$$U_i^1 = U_i^2 + \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{jk}^1 = \sigma_{jk}^2 - \frac{E}{1+\mu} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \end{pmatrix}.$$

5 具有体力的极坐标的特解

众所周知二维线弹性极坐标的平衡微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + k_r = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + k_\theta = 0, \end{cases} \quad (19)$$

对于上述的三种体力, 在极坐标平衡方程中都是变体力。例如:

1) 体力仅为自重。在直角坐标中的体力分量为 b_x 和 b_y 是常量, 但在极坐标中的体力分量为

$$\begin{cases} k_r = b_x \cos \theta + b_y \sin \theta, \\ k_\theta = b_y \cos \theta - b_x \sin \theta, \end{cases}$$

2) 体力仅为等角速旋转的惯性力, 其极坐标中的体力分量为

$$\begin{cases} k_r = -\rho\omega^2 r, \\ k_\theta = 0. \end{cases}$$

3) 体力为稳定温度荷载, 其极坐标中的体力分量为

$$\begin{cases} k_r = -\frac{E\alpha}{1-\mu} \frac{\partial T}{\partial r}, \\ k_\theta = -\frac{E\alpha}{1-\mu} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}. \end{cases}$$

当体力为自重, 已知道极坐标的应力与直角坐标的应力存在如下转换关系

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_x \cdot \cos^2 \theta + \sigma_y \cdot \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta, \\ \sigma_\theta = \sigma_x \cdot \sin^2 \theta + \sigma_y \cdot \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta, \\ \tau_{r\theta} = [\sigma_x - \sigma_y] \cos \theta \cdot \sin \theta + \tau_{xy} [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta], \end{cases} \quad (20)$$

同时两种坐标系的位移亦存在如下关系

$$\begin{cases} u_r = u \cdot \cos \theta + v \cdot \sin \theta, \\ u_\theta = v \cdot \cos \theta - u \cdot \sin \theta. \end{cases} \quad (21)$$

因此, 可以通过容易求得的直角坐标系的特解, 再利用式(20), (21)转换成式(19)的特解, 即

1) 体力仅为自重, 由式(5), (9)代入式(20), (21)得式(19)的特解为

$$\begin{cases} \sigma_r^3 = -b_x \cdot r \cdot \cos^3 \theta - b_y \cdot r \cdot \sin^3 \theta, \\ \sigma_\theta^3 = -\frac{1}{2} r (b_x \cdot \sin \theta + b_y \cdot \cos \theta) \sin(2\theta), \\ \tau_{r\theta}^3 = -\frac{1}{2} r (b_y \cdot \sin \theta - b_x \cdot \cos \theta) \cdot \sin(2\theta), \\ u_r^3 = -\frac{\mu r^2}{2E} \left[\left(\frac{1+2\mu}{\mu} \cdot \cos^2 \theta - 1 \right) b_x \cdot \cos \theta + \left(\frac{1+\mu}{\mu} \sin^2 \theta - 1 \right) b_y \cdot \sin \theta \right], \\ u_\theta^3 = -\frac{\mu r^2}{2E} \left[\left(\frac{1+2\mu}{\mu} - \frac{1+\mu}{\mu} \cos^2 \theta \right) b_x \cdot \cos \theta - \left(\frac{1+2\mu}{\mu} - \frac{1+\mu}{\mu} \sin^2 \theta \right) b_y \cdot \sin \theta \right]. \end{cases}$$

2) 体力仅为等角速旋转惯性力, 由式(14), (15)代入式(20), (21)得式(19)的特解为

$$\begin{cases} \sigma_r^3 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 [1 - 2(1-\mu) \cdot \sin^2 \theta + 2(1-\mu) \cdot \sin^4 \theta], \\ \sigma_\theta^3 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 [\mu + 2(1-\mu) \cdot \sin^2 \theta - 2(1-\mu) \cdot \sin^4 \theta], \\ \tau_{r\theta}^3 = -\frac{1}{4} \rho \omega^2 (1-\mu) r^2 \cos(2\theta) \cdot \sin(2\theta), \\ u_r^3 = \frac{1-\mu^2}{6E} \rho \omega^2 r^3 [\cos^4 \theta + \sin^4 \theta], \\ u_\theta^3 = \frac{1-\mu^2}{6E} \rho \omega^2 r^3 [\sin^2 \theta - \cos^2 \theta] \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta. \end{cases}$$

3) 体力仅为稳定温度荷载, 文献[3]给出的特解如下

$$\sigma_r^3 = -\frac{E}{1+\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right),$$

$$\sigma_\theta^3 = -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2},$$

$$\tau_{r\theta}^3 = -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)$$

$$\begin{cases} u_r^3 = \partial \varphi / \partial r, \\ u_\theta^3 = (1/r)(\partial \varphi / \partial \theta). \end{cases}$$

有了这些特解, 只要按照上述的方法就可得到整体变换公式, 不再赘述。

6 结语

本文利用叠加原理, 从熟知的概念出发, 提出把考虑体力影响的边界积分方程, 用整体变换法变成不计体力的边界积分方程, 从而不必去找层次较高的各种问题的不同基本解的 Galerkin 位移张量, 使主程序趋于统一, 当必须同时考虑几种体力的影响时, 只需将变换后的边界条件叠加, 进行一次性计算, 可节省机时和容量。在使用叠加原理时, 本文巧妙地利用线性非齐次偏微分方程的特性, 把须考虑体力的问题分解成只考虑面力影响而不计体力的问题和预先可得到解答的应力只与体力有关的问题。本文给出了体力为等角速旋转惯性力的直角坐标和极坐标的特解以及体力为自重的极坐标的特解。

参 考 文 献.

- [1] Brebbia, C. A. 等, 边界元法的工程应用, 陕西科学技术出版社, (1985).
- [2] Brebbia, C. A. ed, *Progress in Boundary Element Methods* (Vol. 2), Penntech Press, (1983).
- [3] 徐芝纶, 弹性力学, 人民教育出版社, (1979).

Overall Transformation Method for Solving Boundary Integral Equation with body Forces

Shi Jingxun

(Department of Civil Engineering)

Abstract This paper poses the method of overall transformation for solving boundary integral equation with body forces. The body forces here include gravitational force, steady rotational inertia, and steady thermal loadings.

Key words overall transformation, boundary integral equation, gravitational force, steady rotational inertia.