第12卷 第3期 华侨大学学报自然科学版 Vol.12 No.3
JOURNAL OF HUAQIAO UNIVERSITY
1991年7月 (NATURAL SCIENCE) Jul. 1991

不定点飞行多级火箭的最优控制

吴 朝 阳

(管理信息科学系)

摘要 本文用极大值原理及动态规划讨论不定点飞行多级火箭的最优控制问题，得出最优控制为$\beta\equiv\beta_{max}$，$\varphi\equiv\varphi_0$的结果.

关键词 多级火箭，最优控制，不定点飞行

0 引言

关于多级火箭，对其最佳质量比、最大有效载荷，最省推进剂方案及最大末速度一般变化规律等问题的探讨，已成为多级火箭理论研究的一翼，这些问题，国外的 A. Cleaver, M. Vertregt, M. L. Williams及国内的竺苗龙、汇众、为民、广宇等人做了不少的工作，除竺苗龙的专著《星际飞行中的几个问题》(陕西1981版)外，有文献[1]、[2]，[4]，[5]等十几篇文章. 而这些研究，都是假定火箭在无空气动力、无重力的条件下，即火箭末速度符合齐奥尔科夫斯基公式的条件下进行的. 本文对火箭末速度的最大值，在考虑重力、末速度方向任意给定的条件下进行了探讨，它不仅是齐氏公式的推广，也是对火箭最省推进剂问题等最优控制问题进行更符合实际的研究的基础.

1 单级火箭的最优控制

有常重力作用在垂直平面飞行的单级火箭，假定主动段终点位置自由，时间自由，要求末速度在倾角为θ_f($0<\theta_f<\pi/2$) 的条件下其值V_f达到最大.

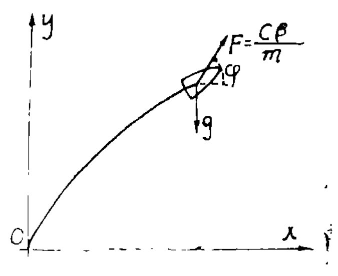

图 1

以发射点为原点，平面oxy为火箭运动的垂直平面，y轴与常重力场反向(图1)，记火箭质心位置为$\vec{r}(x, y)$，速度矢量为$\vec{v}(u, v)$，则有运动方程

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= u,\\
\dot{y} &= v,\\
\dot{u} &= (c\beta/m)\cos\varphi,\\
\dot{v} &= (c\beta/m)\sin\varphi - g,\\
\dot{m} &= -\beta,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

本文1989-02-27收到.

其中c是等效排气速度，β是质量秒耗量。端点条件为

$$t=0; \qquad \vec{r}=0, \qquad \vec{v}=0, \qquad m=m_0, \tag{2}$$

$$t=t_f; \qquad v(t_f)/u(t_f)=\mathrm{tg}\theta_o, \qquad m(t_f)=m_1, \tag{3}$$

指标为

$$J=V_f=\sqrt{u^2(t_f)+v^2(t_f)}, \tag{4}$$

控制区域是

$$0\leqslant\beta\leqslant\beta_{\max}, \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2, \tag{5}$$

Hamilton函数为

$$H=\lambda_1 u+\lambda_2 v+\frac{c\beta}{m}(\lambda_3\cos\varphi+\lambda_4\sin\varphi)-\lambda_4 g-\lambda_5\beta, \tag{6}$$

共轭方程为

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=0,\\ \dot{\lambda}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial y}=0,\\ \dot{\lambda}_3=-\dfrac{\partial H}{\partial u}=-\lambda_1,\\ \dot{\lambda}_4=-\dfrac{\partial H}{\partial v}=-\lambda_2,\\ \dot{\lambda}_5=-\dfrac{\partial H}{\partial m}=\dfrac{c\beta}{m^2}(\lambda_3\cos\varphi+\lambda_4\sin\varphi),\end{cases} \tag{7}$$

横截条件为

$$-H\delta t+\lambda_1\delta x+\lambda_2\delta y+\lambda_3\delta u+\lambda_4\delta v+\lambda_5\delta m-\delta V_f=0, \tag{8}$$

开关函数是

$$K_\beta=(c/m)K_\varphi-\lambda_5, \tag{9}$$

其中

$$K_\varphi=\lambda_3\cos\varphi+\lambda_4\sin\varphi.$$

从端点条件可得横截条件有

$$\lambda_1(t_f)=0, \qquad \lambda_2(t_f)=0,$$

$$\lambda_3(t_f)\cos\theta_f+\lambda_4(t_f)\sin\theta_f-1=0.$$

与共轭方程联立，有

$$\lambda_1\equiv\lambda_2\equiv0, \qquad \lambda_3\equiv\lambda_3(t_f), \qquad \lambda_4\equiv\lambda_4(t_f),$$

而且$\lambda_3(t_f)$，$\lambda_4(t_f)$不同时为零。

应用极大值原理，控制量φ使H达到极大，故k_φ达到极大。因此，φ只能取$\varphi=0$或$\varphi=\pi/2$或使$\dfrac{dk_\varphi}{d\varphi}=0$的点。

易见$\varphi=0$有$\theta_f<0$，$\varphi=\pi/2$有$\theta_f=\pi/2$皆非容许控制，因此最优控制φ^*使$\dot{k}_{\varphi^*}=0$，且

$$\cos\varphi^*=\frac{\lambda_3(t_f)}{\sqrt{\lambda^2_3(t_f)+\lambda^2_4(t_f)}},\qquad \sin\varphi^*=\frac{\lambda_4(t_f)}{\sqrt{\lambda^2_3(t_f)+\lambda^2_4(t_f)}},$$

由最优控制的存在性知$0<\varphi^*<\pi/2$。

对控制β应用极大值原理，有

$$\beta=\begin{cases}\beta_{\max}, & k_\beta>0,\\ 0, & k_\beta<0,\\ 0\leqslant\beta\leqslant\beta_{\max}, & k_\beta\equiv 0,\end{cases}\tag{10}$$

而由式（7）

$$\dot{\lambda}_5=\frac{c\beta}{m^2}(\lambda_3\cos\varphi+\lambda_4\sin\varphi)=\frac{c\beta}{m^2}k_\varphi,$$

故

$$\dot{k}_\beta=\left(\frac{c}{m}k_\varphi-\lambda_5\right)^{\bullet}=\frac{c\beta}{m^2}k_\varphi+\frac{c}{m}\dot{k}_\varphi-\dot{\lambda}_5=\frac{c}{m}\dot{k}_\varphi,$$

在最优控制上$\dot{k}_\varphi=0$，故$\dot{k}_\beta=0$。由火箭起飞的条件知$k_\beta(0)>0$，故$k_\beta>0$恒成立。

因此，最优控制为

$$\beta\equiv\beta_{\max},\qquad \varphi\equiv\varphi^*,$$

而φ可求出如下

$$u(t_f)=\int_0^{t_f}\frac{c\beta}{m}\cos\varphi^* dt=c\ln\frac{m_0}{m_1}\cos\varphi^*,\tag{11}$$

$$v(t_f)=\int_0^{t_f}\left(\frac{c\beta}{m}\sin\varphi^*-g\right)dt=c\ln\frac{m_0}{m_1}\sin\varphi^*-gt_f,\tag{12}$$

由$\beta\equiv\beta_{\max}$求得$t_f=\dfrac{m_0-m_1}{\beta_{\max}}$。再由约束条件$v(t_f)/u(t_f)=tg\theta_f$，有

$$tg\theta_f=\frac{c\ln\dfrac{m_0}{m_1}\sin\varphi^*-gt_f}{c\ln\dfrac{m_0}{m_1}\cos\varphi^*},\tag{13}$$

可得

$$\varphi^*=\theta_f+\arcsin\left(\frac{g\,t_f\cos\theta_f}{c\ln\dfrac{m_0}{m_1}}\right).\tag{14}$$

所以，本节结果为

$$\begin{cases}\beta^*=\beta_{\max},\\ \varphi^*=\theta_f+\arcsin\left(\dfrac{g\,t_f\cos\theta_f}{c\ln\dfrac{m_0}{m_1}}\right).\end{cases}$$

2　二级火箭的最优控制

二级火箭的运动方程与式（1）形式相同，但两级火箭的排气速度c_1、c_2，质量秒耗量

β_1，β_2等参数则各不相同。

记第一级火箭熄火时刻t_1时的速度值为V_1，倾角为α，则$u(t_1)=V_1\cos\alpha$，$v(t_1)=V_1\sin\alpha$。

应用Bellman最优性原理，最优控制使两级火箭分别达到最优，因此不存在中间推力弧，也没有自由飞行段，所以有

$$\beta_1^*\equiv\beta_{1\max},\qquad \varphi_1^*\equiv\varphi_{10},\tag{15}$$

$$\beta_2^*\equiv\beta_{2\max},\qquad \varphi_2^*\equiv\varphi_{20}.\tag{16}$$

记第一、二级火箭包含负载的总质量分别为m_{01}、m_{02}，包含负载的空质量分别为m_{11}、m_{12}，则有

$$u(t_f)-u(t_1)=\int_{t_1}^{t_f}\frac{c_2\beta_2}{m_2}\cos\varphi_2 dt=c_2\ln\frac{m_{02}}{m_{12}}\cos\varphi_{20},\tag{17}$$

$$v(t_f)-v(t_1)=\int_{t_1}^{t_f}\left(\frac{c_2\beta_2}{m_2}\sin\varphi_2-g\right)dt=c_2\ln\frac{m_{02}}{m_{12}}\sin\varphi_{20}-g(t_f-t_1)\tag{18}$$

再由式（11）、（12）有

$$u(t_f)=c_1\ln\frac{m_{01}}{m_{11}}\cos\varphi_{10}+c_2\ln\frac{m_{02}}{m_{12}}\cos\varphi_{20},\tag{19}$$

$$v(t_f)=c_1\ln\frac{m_{01}}{m_{11}}\sin\varphi_{10}+c_2\ln\frac{m_{02}}{m_{12}}\sin\varphi_{20}-gt_f,\tag{20}$$

其中

$$t_f=\frac{m_{01}-m_{11}}{\beta_{1max}}+\frac{m_{02}-m_{12}}{\beta_{2max}}.\tag{21}$$

假定β_1、β_2、c_1、c_2、m_{01}、m_{11}、m_{02}、m_{22}为火箭的固定参数，则由α的定义，有$v(t_1)/u(t_1)=\mathrm{tg}\alpha$，参考上一节即知$\varphi_{10}$是$\alpha$的单变量函数，可记$\varphi_{10}=\varphi_1(\alpha)$。同时，$u(t_1)=u_1(\alpha)$，$v(t_1)=v_1(\alpha)$也都是$\alpha$的单变量函数，再由式（19）、（20）及终端条件$v(t_f)/u(t_f)=\mathrm{tg}\theta_f$知$\varphi_{20}$也是$\alpha$的单变量函数，记$\varphi_{20}=\varphi_2(\alpha)$。

整个二级火箭的最优控制使V_f达到最大，而由$u(t_f)=V_f\cos\theta_f$及$v(t_f)=V_f\sin\theta_f$知$u(t_f)$、$v(t_f)$与V_f同步达到最大，也就是说，最优控制要求角α使$u(t_f)$、$v(t_f)$都达到最大。

为简便计，记 $A=c_1\ln\dfrac{m_{01}}{m_{11}}$，$B=c_2\ln\dfrac{m_{02}}{m_{12}}$，则

$$\frac{du(t_f)}{d\alpha}=A(-\sin\varphi_1)\frac{d\varphi_1}{d\alpha}+B(-\sin\varphi_2)\frac{d\varphi_2}{d\alpha},\tag{22}$$

$$\frac{dv(t_f)}{d\alpha}=A\cos\varphi_1\frac{d\varphi_1}{d\alpha}+B\cos\varphi_2\frac{d\varphi_2}{d\alpha}.\tag{23}$$

由 $\dfrac{du(t_f)}{d\alpha}=0$，$\dfrac{dv(t_f)}{d\alpha}=0$ 可推出

$$\cos\varphi_2\sin\varphi_1-\sin\varphi_2\cos\varphi_1=0,$$

即

$$\sin(\varphi_1-\varphi_2)=0,$$

因$\varphi_1\in[0,\pi/2]$，$\varphi_2\in[0,\pi/2]$，故此时有

$$\varphi_1=\varphi_2.\tag{24}$$

又由$u(t_f)\sin\theta_f - v(t_f)\cos\theta_f \equiv 0$，对$\alpha$求二阶导数有

$$A\sin(\theta_f-\varphi_1)\left(\frac{d\varphi_1}{d\alpha}\right)^2 + A\cos(\theta_f-\varphi_1)\frac{d^2\varphi_1}{d\alpha^2}$$

$$+B\sin(\theta_f-\varphi_2)\left(\frac{d\varphi_2}{d\alpha}\right)^2 + B\cos(\theta_f-\varphi_2)\frac{d^2\varphi_2}{d\alpha^2} \equiv 0. \tag{25}$$

而在角 α 使 $\frac{du(t_f)}{d\alpha} = \frac{d(v_f)}{d\alpha} = 0$时，$\varphi_1 = \varphi_2$ 且

$$\frac{du(t_f)}{d\alpha} = -A\sin\varphi_1\frac{d\varphi_1}{d\alpha} - B\sin\varphi_2\frac{d\varphi_2}{d\alpha},$$

故此时有

$$A\frac{d\varphi_1}{d\alpha} = -B\frac{d\varphi_2}{d\alpha},$$

把它与$\varphi_1=\varphi_2$同时代入式（25），则有

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\alpha^2} = \frac{-1}{B\cos(\theta_f-\theta_1)}\left[\left(A+\frac{A^2}{B}\right)\sin(\theta_f-\theta_1)\left(\frac{d\varphi_1}{d\alpha}\right)^2 + A\cos(\theta_f-\theta_1)\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\right]. \tag{26}$$

在使$\frac{du(t_f)}{d\alpha} = \frac{dv(t_f)}{d\alpha} = 0$的$\alpha=\alpha^*$处，有

$$\left.\frac{d^2u(t_f)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha^*} = -A\cos\varphi_1\left(\frac{d\varphi_1}{d\alpha}\right)^2 - A\sin\varphi_1\frac{d^2\varphi_1}{d\alpha} - B\cos\varphi_2\left(\frac{d\varphi_2}{d\alpha}\right)^2 - B\sin\varphi_2\frac{d^2\varphi_2}{d\alpha},$$

把式（26）及$\varphi_1=\varphi_2$代入即有

$$\left.\frac{d^2u(t_f)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha^*} = -\frac{A\cos\theta_f}{B\cos(\theta_f-\varphi_1)}(A+B)\left(\frac{d\varphi_1}{d\alpha}\right)^2. \tag{27}$$

这说明在角α使 $\frac{du(t_f)}{d\alpha}=0$ 时即有$\frac{d^2u(t_f)}{d\alpha^2}<0$,因此，这样的$\alpha$是唯一的，且它使$u(t_f)$达到最大。

下面通过计算来求出α^*及最优控制φ_{10}、φ_{20}，由式（24）有

$$u(t_f) = (A+B)\cos\varphi_{10},$$
$$v(t_f) = (A+B)\sin\varphi_{10} - gt_f,$$

应用式（14）有

$$\varphi_{10} = \theta_f + \arcsin\frac{gt_f\cos\theta_f}{A+B} = \theta_f + \mathrm{arc\ sin}\frac{gt_f\cos\theta_f}{c_1\ln\frac{m_{01}}{m_{11}} + c_2\ln\frac{m_{02}}{m_{12}}}, \tag{28}$$

易见$\theta_f \leqslant \varphi_{10} \leqslant \pi/2$，而

$$u(t_1) = A\cos\varphi_1,$$
$$v(t_1) = A\sin\varphi_1 - gt_1,$$
$$v(t_1)/u(t_1) = \mathrm{tg}\alpha^*,$$

故

$$\alpha^* = \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\varphi_{10} - \frac{gt_1}{A\cos\varphi_{10}}\right) \tag{29}$$

可以证明$\theta_f \leqslant \alpha^* \leqslant \varphi_{10}$，因此$\alpha^*$是存在的，再由唯一性知最优控制为

$$\begin{cases}\beta_1{}^* \equiv \beta_{1\max}, \\ \beta_2{}^* \equiv \beta_{2\max}, \\ \varphi_1{}^* \equiv \varphi_2{}^* = \theta_f + \arcsin \dfrac{g t_f \cos\theta_f}{c_1 \ln \dfrac{m_{01}}{m_{11}} + c_2 \ln \dfrac{m_{02}}{m_{12}}}.\end{cases}$$

3 多级火箭的最优控制

多级火箭在终点位置自由，时间自由，末速度在倾角为$\theta_f(0<\theta_f<\pi/2)$的条件下达到最大值的最优控制，结果与上节相似，下面以三级火箭为例进行讨论。

应用动态规划理论，三级火箭的最优控制使由第二、三级火箭组成的"二级子火箭"的控制是最优的，因此，有最优控制使$\beta_2\equiv\beta_{2m3x}$，$\beta_3\equiv\beta_{3\max}$，$\varphi_2\equiv\varphi_3\equiv\varphi_{30}$。由最优性，又知第一级火箭达到局部最优化，因此也有$\beta_1\equiv\beta_{1\max}$，$\varphi_1\equiv\varphi_{10}$。

记 $A=c_1\ln\dfrac{m_{01}}{m_{11}}$，$B=c_2\ln\dfrac{m_{02}}{m_{12}}$，$C=c_3\ln\dfrac{m_{03}}{m_{13}}$，假定第一级火箭熄火时刻$t_1$时火箭速度值为$V_1$，倾角为$\alpha$，则

$$u(t_1)=V_1\cos\alpha=A\cos\varphi_{10}, \tag{30}$$

$$v(t_1)=V_1\sin\alpha=A\sin\varphi_{10}-gt_1, \tag{31}$$

$$u(t_f)=A\cos\varphi_{10}+B\cos\varphi_{20}+C\cos\varphi_{30}, \tag{32}$$

$$v(t_f)=A\sin\varphi_{10}+B\sin\varphi_{20}+C\sin\varphi_{30}-gt_f. \tag{33}$$

由控制的最优性，对任何α，有$\varphi_{20}\equiv\varphi_{30}$，即

$$\varphi_2(\alpha)\equiv\varphi_3(\alpha),$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{du(t_f)}{d\alpha}&=-A\sin\varphi_1\frac{d\varphi_1}{d\alpha}-B\sin\varphi_1\frac{d\varphi_2}{d\alpha}-C\sin\varphi_3\frac{d\varphi_3}{d\alpha}\\&=-A\sin\varphi_1\frac{d\varphi_1}{d\alpha}-(B+C)\sin\varphi_3\frac{d\varphi_3}{d\alpha},\end{aligned} \tag{34}$$

$$\frac{dv(t_f)}{d\alpha}=A\cos\varphi_1\frac{d\varphi_1}{d\alpha}+(B+C)\cos\varphi_3\frac{d\varphi_3}{d\alpha}. \tag{35}$$

与上节相似，有唯一角α使$u(t_f)$，$v(t_f)$达到最大，此时有

$$\varphi_{10}=\varphi_{30}.$$

综上结果，三级火箭的最优控制为

$$\begin{cases}\beta_1{}^*\equiv\beta_{1\max},\\ \beta_2{}^*\equiv\beta_{2\max},\\ \beta_3{}^*\equiv\beta_{3\max},\\ \varphi_1{}^*\equiv\varphi_2{}^*\equiv\varphi_3{}^*=\varphi^*.\end{cases} \tag{36}$$

经计算可得

$$\varphi^* = \theta_f + \arcsin\frac{g t_f \cos\theta_f}{c_1 \ln\frac{m_{01}}{m_{11}} + c_2 \ln\frac{m_{02}}{m_{12}} + c_3 \ln\frac{m_{03}}{m_{13}}}, \tag{37}$$

其中

$$t_f = \frac{m_{01} - m_{11}}{\beta_{1\max}} + \frac{m_{02} - m_{12}}{\beta_{2\max}} + \frac{m_{03} - m_{13}}{\beta_{3\max}}.$$

一般地，n 级火箭的最优控制为

$$\begin{cases} \beta_i^* \equiv \beta_{i\max}, & i = 1, 2, \cdots, n, \\ \varphi_i^* \equiv \theta_f + \arcsin\left(g t_f \cos\theta_f \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \ln\frac{m_{0i}}{m_{1i}} \right), & i = 1, 2, \cdots, n, \end{cases} \tag{38}$$

其中，$t_f = \sum\limits_{i=1}^{n} [(m_{0i} - m_{1i})/\beta_{i\max}]$。

4　火箭作空间飞行的最优控制

先考虑单级火箭，设坐标如图2，常重力沿z轴的反方向，球坐标参数为φ及θ，其中$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$。

设单级火箭在三维空间飞行，终点位置及时间都是自由的，要求目标函数$J = V_f$在末速水平倾角为θ_f($0 < \theta_f < \pi/2$)的约束下达到最大。

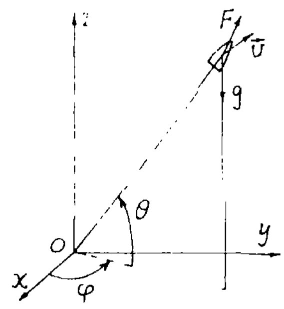

图2

记火箭质心位置矢量为$\vec{r}(x, y, z)$，速度矢量为$\vec{v}(u, v, w)$，则火箭运动方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = v, \\ \dot{z} = w, \\ \dot{u} = \frac{c\beta}{m} \cos\theta \cos\varphi, \\ \dot{v} = \frac{c\beta}{m} \cos\theta \sin\varphi, \\ \dot{w} = \frac{c\beta}{m} \sin\theta - g, \\ \dot{m} = -\beta. \end{cases} \tag{39}$$

Hamilton函数为

$$\begin{aligned} H = {} & \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w - \lambda_6 g \\ & + \beta \left[\frac{c}{m} (\lambda_4 \cos\theta \cos\varphi + \lambda_5 \cos\theta \sin\varphi + \lambda_6 \sin\theta) - \lambda_7 \right] \end{aligned} \tag{40}$$

共轭方程为

$$
\left\{
\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\
\dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \\
\dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \\
\dot{\lambda}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial u} = -\lambda_1, \\
\dot{\lambda}_5 &= -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_2, \\
\dot{\lambda}_6 &= -\frac{\partial H}{\partial w} = -\lambda_3, \\
\dot{\lambda}_7 &= -\frac{\partial H}{\partial m} = \frac{c\beta}{m^2}(\lambda_4\cos\theta\cos\varphi + \lambda_5\cos\theta\sin\varphi + \lambda_6\sin\theta).
\end{aligned}
\right. \tag{41}
$$

横截条件

$$-H\delta t + \lambda_1\delta x + \lambda_2\delta y + \lambda_3\delta z + \lambda_4\delta u + \lambda_5\delta v + \lambda_6\delta u + \lambda_7\delta m - \delta V_f = 0, \tag{42}$$

即

$$H(t_f) = 0,\ \lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = 0, \tag{43}$$

及

$$\lambda_4(t_f)\cos\theta_f\cos\theta_1 + \lambda_5(t_f)\cos\theta_f\sin\theta_1 + \lambda_6(t_f)\sin\theta_f - 1 = 0, \tag{44}$$

其中θ_f为给定的末速水平倾角，θ_1为末速度在xy平面的投影矢量与x轴的夹角。

由式（41）、（43）、（44）有

$$\lambda_1 \equiv 0, \tag{45}$$

$$\lambda_2 \equiv 0, \tag{46}$$

$$\lambda_3 \equiv 0, \tag{47}$$

$$\lambda_4 \equiv \lambda_4(t_f), \tag{48}$$

$$\lambda_5 \equiv \lambda_5(t_f), \tag{49}$$

$$\lambda_6 \equiv \lambda_6(t_f), \tag{50}$$

且λ_4，λ_5，λ_6不同时为零。

由极大值原理，φ角使$\lambda_4\cos\theta\cos\varphi + \lambda_5\cos\theta\sin\varphi$达到极大，故与第一节相似．可得

$$\cos\varphi = \frac{\lambda_4(t_f)}{\sqrt{\lambda^2{}_4(t_f) + \lambda^2{}_5(t_f)}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\lambda_5(t_f)}{\sqrt{\lambda^2{}_4(t_f) + \lambda^2{}_5(t_f)}}.$$

再由控制θ使$\lambda_4\cos\theta\cos\varphi + \lambda_5\cos\theta\sin\varphi + \lambda_6\sin\theta$达到极大，知角$\theta$也取定常值。

$$k_\beta = \frac{c}{m}[\lambda_4\cos\theta\cos\varphi + \lambda_5\cos\theta\sin\varphi + \lambda_6\sin\theta] - \lambda_7,$$

$$\dot{k}_\beta = \frac{c\beta}{m^2}[\lambda_4\cos\theta\cos\varphi + \lambda_5\cos\theta\sin\varphi + \lambda_6\sin\theta] - \dot{\lambda}_7 = 0,$$

即由λ_4、λ_5、λ_6及φ、θ取常值知k_β也取常值，再由$k_\beta(0)>0$知k_β恒大于零．因此，最优控制为

$$\begin{cases}\beta^*\equiv\beta_{\max},\\ \varphi^*\equiv\varphi_0,\\ \theta^*\equiv\theta_0.\end{cases}\tag{51}$$

选取坐标系使火箭初速度有如下分量形式：

$$\vec{v}(0)=(0,\ v_0,\ w_0)^T,\ 且v_0\geqslant 0.$$

做积分求出末速度分量为

$$u(t_f)=c\cos\theta_0\cos\varphi_0\ln\frac{m_0}{m_1},$$

$$v(t_f)=c\cos\theta_0\sin\varphi_0\ln\frac{m_0}{m_1}+v_0,$$

$$w(t_f)=c\sin\theta_0\ln\frac{m_0}{m_1}+w_0-gt_f,$$

所以

$$\begin{aligned}V^2_f&=u^2(t_f)+v^2(t_f)+w^2(t_f)\\&=\left(c\ln\frac{m_0}{m_1}\right)^2+v^2_0+(w_0-gt_f)^2+2c(w_0-gt_f)\ln\frac{m_0}{m_1}\sin\theta_0\\&\quad+2cv_0\ln\frac{m_0}{m_1}\cos\theta_0\sin\varphi_0.\end{aligned}$$

由于$0<\theta_0<\pi/2$，故上式末项在$\varphi_0=\pi/2$时达到最大，因而最优控制有$\varphi_0=\pi/2$，$u(t_f)=0$，再根据限制条件知θ_0应满足条件$w(t_f)/v(t_f)=\mathrm{tg}\theta_f$.

从以上讨论可以看到，无论如何选择坐标系，最优控制使飞行轨道在初始速度所在的垂直平面内。

对二级火箭，由第一级的最优性，它是沿垂直平面飞行的，后一级火箭则由上述结论知它在第一级熄火时末速度所在的垂直平面内飞行，这说明二级火箭在空间飞行的最优轨道是在某垂直平面内。

对一般n级火箭，如果要求在末速水平倾角为θ_f的条件下作不定点飞行，则火箭的最优控制使之在垂直平面内运动。而点火时初速为零的条件下，由球对称性，此运动平面可以与任何需要的方向重合。

火箭作空间飞行时其最优控制使之作垂直平面运动，则控制变量β、θ的取值与火箭在此平面飞行的最优控制相同，因此空间问题就化为平面问题了。空间飞行的最优控制可通过垂直平面飞行的最优控制来计算。换句话说，本文至此完全解决了空间中n级火箭做不定点飞行的最优控制问题。

参　考　文　献

[1] 汇众，关于多级火箭的几个问题，航空学报，3(1978)．

[2] Hui Zhong, General Varing Law of the Largest Velocity of Step-rocket, 中国科学技术大学学报，14，3(1984)．

[3] Lawdan, D.F., *Optimal Trajectoies for Space Narigation*, Butterworth and Co. (Publishers) Ltd, (1963).

[4] Williams, M.L., , The Calculatio of Fuel Distribution in Step-rockets, *Journal of British Interplanetry Society*, 16,4 (1957).

[5] 为民、广宇. 关于多级火箭若干问题的探讨. 西北大学学报. 2 (1974).

The Optimal Control of Step-Rocket under the Condition of Non-Locatng Point Space Flight

Wu Zhaoyang

(*Department of Management Informaticn Science*)

Abstract In the light of the principle of maximum and dynamic programming, this paper deals with the optimal control of step-rocket under the condition of non-locating point space flight. The optimal control is proved to be $\beta \equiv \beta_{max}$, $\varphi \equiv \varphi_0$.

Key words multistage rockets, optimal control, indefinite point navigation